Christoph Lübbert
Viktoriastraße 36
D-64293 Darmstadt

Tel: 06151 422298
T-Mobil: 0171 2045811
eMail1: clind04@yahoo.de

Darmstadt, 10.10.2006

Teerunde TUD – 9. „Schnupperrunde“ am 13.10.2006

Thema: **„Was ist Beweisen?“**

Position von: Christoph Lübbert

Wortherkunft

Im Wort "beweisen" steckt "weisen" und das Präfix "be".

"Weisen" hat dieselbe Wurzel wie indogerm. *woid*, griech. *oid*, lat. *vid* (sehen), vedisch *ved*, sskr.*vid*, pali *vijj*, ahd./mhd. *wisen*, got. *wisija*, altslav. *vede*,... (sehen, wissen) ist also verwandt mit "sehen" und mit "wissen".

Das Präfix "be" ist eine Verstärkung und Transitivisierung, so dass "beweisen" zu lesen ist wie "wissen machen" – mhd: „*wîs toun*“ – oder (in Bezug auf die ursprüngliche Bedeutung "sehen") wie "sichtbar machen" oder "(etwas) zeigen". In diesem Sinne wird "beweisen" in der Tat auch heute noch benutzt.

Peter gab in seiner Positionierung (vom 10.8.06) einen dem gemäß richtigen Definitionsvorschlag, dem ich mich zunächst anschließe:

„Definition (Vorschlag): Ein Beweis ist eine Handlung, die zu einem (mehr oder weniger vollkommen) gesicherten Wissen führt.“

Dabei ist das „(mehr oder weniger vollkommen)“ zu Recht in Klammern gesetzt, denn dies geht nicht aus dem Wort „beweisen“ hervor; es kann in der Definition weggelassen werden. Auch der Zusatz „gesichertes“ ist eigentlich überflüssig, denn etymologisch gesehen war „Wissen“ etwas Vermutetes, das durch den Vorgang des, wîs tuon’ (mhd.) in der jeweiligen Gesellschaft als anerkanntes Gemeingut von einer Autorität (Kirche, Fürst etc.) öffentlich kundgetan und somit gültig und also „gesichert“ (und dem gemäß zu beflogen) war.

Geschichtliche Anmerkung

„Beweisen“ tat man in früheren Zeiten hauptsächlich bei gerichtlichen Angelegenheiten. In die Philosophie und Mathematik gelangte das deutsche Wort „Beweis“ / „beweisen“ eigentlich erst im 17. Jh. in den Sprachgebrauch (wenn auch die Beweismethoden viel älter sind).

Was mich beim Vorgang des „Beweisens“ hier weniger interessiert

Dass man beim mathematischen Beweisen die Gesetze der mathematischen Logik und die Substitutions- und Schlussregeln benutzt, ist selbstverständlich und hier nicht Gegenstand meines Interesses. Auch, dass man bei Anwendung der Logik, der Schluss- und Substitutionsregeln sich eines „Kalküls“ bedient (das Wort kommt vom römischen *calculus* und bezeichnete die Kalksteinchen, die als Rechenhilfen [z.B. auf dem über 3000 Jahre alten Abacus-Rechenbrett] oder bei Brettspielen benutzt wurden), sehe ich eher als praktische und abkürzende „Rechenhilfe“ an, die bewirkt, dass die Definition, Beschreibung und Handhabung von Strukturen, sowie ihr weiterer Ausbau, übersichtlicher und kürzer dargestellt werden, so dass Missverständnisse und Handhabungsfehler eher minimiert werden können als beim Gebrauch einer natürlichen Sprache (in einem 3 cm langen Zeichentext findet man schneller Unstimmigkeiten als in einem 3 m langen).

Offene Frage: Was geschieht wirklich beim Vorgang des (mathematischen) „Beweisens“?

Das Folgende ist nur eine nähere Beschreibung der offenen Frage. eine Antwort kann ich nicht geben.

„Beweisen“ ist (wie beim Hausbau) der Vorgang, welcher den Wusch zu erfüllen versucht, Gegebenes, schon Bekanntes / Akzeptiertes und Gesichertes (also schon „Gebautes“) durch etwas Neues / Erwünschtes zu vervollständigen, ohne dass das schon Vorhandene „Schaden leidet“ (modern gesprochen: ohne dass ein Widerspruch entsteht). Symbolisiert A das schon gesicherte Gegebene (also eine Ansammlung von untereinander widerspruchsfreien Sätzen) und b das neue Teil, so möchte man „A →b herleiten“. Das sieht so aus, als würde man versuchen, irgendwo von A ausgehend einen „Weg nach b“ zu konstruieren.

Wie man aus der Logik weiß, bestehen für das neue Teil b grundsätzlich drei Möglichkeiten:

(i) Aus der Annahme b ergibt sich ein Widerspruch zu A. In diesem Fall: ¬(A und b) also : ¬A v ¬b, d.h. also A→¬b, also ¬b. Man kann also b nicht hinzunehmen ohne dass A Schaden leidet.

(ii) Aus der Annahme ¬b ergibt sich ein Widerspruch zu A, d.h., es kann nicht A und zugleich ¬b sein, d.h. es kann nur „¬Avb“ sein. In diesem Fall sagt man, dass b aus A herleitbar ist: A und „A →b“, also b.

(iii) Weder aus der Annahme b noch aus der Annahme ¬b ergibt sich ein Widerspruch zu A. In diesem Fall ist b, wie man sagt, „unabhängig“ von A, und man darf entweder „A und b“ oder auch „A und ¬b“ behaupten (natürlich darf man A nicht zugleich durch b und durch ¬b erweitern). Jedenfalls kann man auch in diesem Fall nicht behaupten, dass b aus A herleitbar sei („A→b“).

Diese drei grundsätzlichen Möglichkeiten geben natürlich noch überhaupt keinen Hinweis darauf, wie man „den Weg nach b“ bauen könnte, sie machen nur deutlich, dass es eventuell gar nicht geht.

Zu Anfang weiß man ja gar nicht, welche der 3 Möglichkeiten eintreten wird. Was also ist es, das einen ermuntert, trotzdem weiterzumachen?

Es ist eine intuitive Vorstellung von „Nähe“ oder „Ferne“ des neuen Teils b zum Gegebenen, A. Auch innerhalb des bekannten, gesicherten Systems A hat man bereits diese Vorstellung „wie weit zwei Sätze a_1, a_2 aus A von einander entfernt sind“. Hat man zu Beispiel a_2 aus a_1 (eventuell unter zu Hilfenahme weiterer bekannter Tatsachen h_i aus A) gefolgert, so drückt sich das in der Länge der Beweiskette „$a_1 \rightarrow h_1 \rightarrow h_2 \rightarrow ... \rightarrow a_2$“ aus. Ist die Länge einer solchen Beweiskette also ein Maß für die Entfernung zwischen a_1 und a_2? Nein, auch das stimmt nicht, denn mit wachsender Erfahrung, wie man sich in dem schon bekannten System A bewegt, akzeptiert man „Abkürzungen“, also eventuell einen kürzeren Weg von a_1 nach a_2, mit weniger Zwischenschritten. Ein Beweis erscheint daher um so „eleganter“, je kürzer die Beweisketten von A nach b sind. Allerdings geben die schließlich veröffentlichten „eleganten“ Beweise oft wenig Auskunft über die wirkliche Arbeit der Beweisfindung (die ist dann meist nicht mehr von Interesse, wenn das Ergebnis vorliegt).

Es ist wie in einer Großstadt, A, mit ihren Gebäuden, Straßen, Einbahnstraßen, Schienenwegen, Ampeln, Verkehrsschildern , Schranken, Barrieren, Brücken, Mauern, Unterführungen usw. Mit zunehmender Erfahrung findet man immer kürzere Wege zwischen zwei

Punkten und weiß auch, welche Wege verboten sind. Soll nun ein neues Objekt (ein Gebäude oder auch eine Straße etc...), b, integriert werden, so gibt das Bauamt zwar die grundsätzlichen Vorschriften, die befolgt werden müssen, jedoch keinerlei Hilfe über die Einzelheiten der Erstellung und des Zugangs. Dieses Analogon erscheint mir wie ein sehr komplexer Verband, in dem zwar eine Art Ordnungsrelation existiert, in dem aber außerdem eine mir noch unbekannte Art Topologie herrscht („Nähe“ / „Ferne“ von Aussagen), von der ich nicht einmal weiß, ob sie nicht doch nur subjektiv begründbar ist.

Mir ist leider keine Annäherung an die Beantwortung der Offenen Frage gelungen, was (neben der Beachtung der Logik, also der „Vorschriften“) beim „Beweisen“ eigentlich vor sich gehe. Ich habe es nur mit einer Analogie (der Großstadt) versucht. Vielleicht könnte die Verbands-Idee weiterhelfen.