3 Mehrwertige Prädikatenlogik

Hier nur ein relativ kurzer Blick darauf, wie man mehrwertige Prädikatenlogik ansetzen kann. Ich habe mich dabei ausschließlich an den Standarddefinitionen für die ***klassische*** Prädikatenlogik 1. Stufe orientiert und von da aus die Abweichungen der mehrwertigen Prädikatenlogik von der klassischen Prädikatenlogik in meiner eigenen Terminologie identifiziert. Das Thema „mehrwertige Prädikatenlogik“ ist hier aber bei weitem nicht vollständig behandelt.

Da ich weniger an rein mathematischen Anwendungen, sondern eher an Anwendungsmöglichkeiten „am Rande oder außerhalb der Mathematik“ interessiert bin, also an Anwendungen, die nicht so rigoros durchstrukturiert sein können, wie mathematische Theorien, genügt mir hier eine „vereinfachte“ formale Sprache, die nur „Objekte“ und „Prädikate“ von Objekten formalisiert.

In der *klassischen*, auf die Mathematik konzentrierten Prädikatenlogik formalisiert man dagegen statt „Prädikaten“ *Relationen* auf Objektmengen und zusätzlich noch *Funktionen* von Objekten, deren Werte wieder Objekte sind, sowie meist noch die spezielle *Identitätsrelation* „=“ zwischen (Termen von) Objekten, und eventuell auch noch so genannte *Konstanten*: Das sind ausgezeichnete Objekte, wie etwa das neutrale Element $\mathbf{e}_G$ einer Gruppenstruktur ***G*** oder die Null $\mathbf{0}_K$ und die Eins $\mathbf{1}_K$ einer Körperstruktur ***K***. Das ist eine minimale Anforderung an die klassische Prädikatenlogik, die für viele (aber nicht alle!) Aussagen in der Mathematik genügt.

Der Grund, warum wir für eine mehrwertige Prädikatenlogik allgemeiner „Prädikatsymbole“ statt speziell Relationssymbole nehmen, ist folgender: Eine n-stellige Relation R wird in der extensionalen Deutung aufgefasst als Teilmenge $\mathbf{R} \subseteq M^n$ des n-fachen kartesischen Produktes M^n einer Menge M von Objekten, und die Aussageform $R(x_1,..,x_n)$ wird interpretiert als „$(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}$“**.** Für ein n-Tupel $(x_1,...,x_n) \in M^n$ gibt es nur zwei Möglichkeiten bezüglich **R**: entweder $(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}$ oder $(x_1,...,x_n) \notin \mathbf{R}$**.** Bei irgendeiner Belegung β des Relationssymbols kann also $\beta R(x_1,...,x_n)$ nur ***zwei*** Werte annehmen, (die üblicherweise mit 0, 1 notiert werden). Mit der Einführung von Relationssymbolen satt allgemeinen „Prädikatsymbolen“ wäre also eine *mehr als 2-wertige* Prädikatenlogik gar nicht möglich – es sei denn, man definierte die Element-Menge-Relation „∈“ so, dass es auch mehr als zwei Möglichkeiten gibt. Dazu müsste man aber eine Mengenlehre der „unscharfen Mengen“ einführen (wie etwa in der *Fuzzy-Set-Theorie*) – und dieser Aufwand erscheint mir hier unnötig, da „unscharfe“ Relationen **R** dann doch wieder wie allgemeine Prädikate zu handhaben wären.[26]

Wir betrachten hier nur eine Prädikatenlogik **„erster Stufe“**, d.h. eine solche, die nur Prädikate von *Objekten*, nicht aber Prädikate von *Prädikaten* formalisiert. Auch die klassische Prädikatenlogik ist meist die von „erster Stufe“, d.h. in ihr werden nur Relationen zwischen *Objekten*, nicht aber Relationen zwischen *Relationen* formalisiert.

Was die Definitionsschritte im Syntax- und im Semantik-Schema betrifft, so kann man sich weitgehend an den Definitionen der **klassischen Logik** orientieren, wobei man nur „Relationen“ durch „Prädikate“ zu ersetzen und „Funktionen“ und damit „Terme“ wegzulassen hat.

---

[26] Mit der „unscharfen“ Mengenlehre beschäftigt sich *Gottwald* ausführlich in [Go.1989, S298ff]

Als Vorlage zur Übertragung von Definitionen aus der klassischen in eine mehrwertige Prädikatenlogik nehmen wir die Bücher [Kr/Kü.2006, Kap.4, S.59ff] und [Zi.2010, S.8ff], die eine Einführung in die *klassische* Prädikatenlogik 1. Stufe geben. Wir benutzen jedoch eine etwas einfachere, Klammern sparende Schreibweise wie sie z.B. in [Eb/Fl/Th.2007] verwendet wird.

Hier ***nicht*** als Vorlage nehmen wir [Go.1989] (*Gottwald*: „Mehrwertige Logik") aus mehreren Gründen:
(a) In [Go.1989] wird das Prinzip der rekursiven Definition m.E. *zu undeutlich* präsentiert:
(b) In [Go.1989] werden gewisse „Konstanten" sowohl für „bestimmte Objekte" als auch für „bestimmte Quasiwahrheitswerte" schon in die formale Sprache mit hineingenommen, was bei *Gottwald* (ähnlich wie bereits in der mehrwertigen Aussagenlogik) den Unterschied zwischen formaler Sprache („Syntax-Schema") und „Deutung" („Semantik-Schema") verwischt.
(c) Schließlich bleibt *Gottwald* ziemlich allgemein, was die möglichen Quantoren betrifft. Er erwähnt merkwürdigerweise nicht, dass man den Partikulator ∃x: und den Generalisator ∀x: in der mehrwertigen Prädikatenlogik streng analog zur klassischen Logik definieren kann.

Es kommen – wie in der klassischen Logik – auch die Quantoren ∃x: und ∀x: vor.
Nur bei den Quantoren **Vx:** und **Λx:,** die in der klassischen Logik nicht vorkommen, (bzw. dort mit ∃x: und ∀x: identifiziert sind) ergibt sich etwas Neues (was bei *Gottwald* gar nicht herausgehoben wird).

3.1 Syntax-Schema

(3.1.1) DEF. Alphabet Z: Das Alphabet der hier zu definierenden formalen Sprache besteht aus folgenden Zeichensorten:

2) Einer endlichen oder höchstens abzählbaren Menge **Oz** von sog. **Objektzeichen**[27] (auch „Variablen" genannt[28]) und als x, y, ..., x_1, x_2 etc. notiert.
3) Einer endlichen oder höchstens abzählbaren Menge **Pz** von sog. **Prädikatzeichen,** notiert als p, q, ..., p_1, p_2,..., wobei jedem dieser Zeichen p∈**Pz** eine „**Stelligkeit**" n(p) zugeordnet ist, das ist eine natürliche Zahl, die angibt, wie viele Objektzeichen man hinter das Zeichen p anfügen darf. Wir wollen bei Bedarf für gewisse Prädikatzeichen p auch die Stelligkeit n(p)=0 zulassen, d.h. an einem 0-stelligen p soll kein Objektzeichen angefügt werden.
4) Zwei endlichen (kleinen) Mengen **J1** von 1-stelligen und **J2** von 2-stelligen **Junktorzeichen**. Hierbei sind, wie im Alphabet der Aussagenlogik, die Zeichen eines 1-stelligen Junktors ¬ aus **J1** und der 2-stelligen Junktoren ∨, ∧ aus **J2** schon genannt, wenn auch die Mengen **J1, J2** noch weitere Junktorzeichen enthalten dürfen.
5) Einer endlichen (kleinen) Menge **Qu = {∃, ∀, V, Λ, ..}** von sog. **Quantorzeichen**; das sind von den 1-stelligen Junktoren zu *unterscheidende* Vorschaltzeichen, deren Funktionsweise in einer Deutung in etwa z.B. an das Summenzeichen Σ bei der Summation von Zahlengrößen oder an das Vereinigungszeichen U bei Vereinigung von Mengen erinnern soll. In der 2-wertigen Prädikatenlogik sind nur die Quantorzeichen
   ∃ („es gibt ...") und ∀ („für alle ...")
   gebräuchlich (manchmal in anderer Schreibweise). Diese Quantorzeichen werden auch in einer mehrwertigen Prädikatenlogik gebraucht; daneben benutzen wir auch noch die Quantorzeichen
   V („Supremum von ...") und Λ („Infimum von ..."),
   deren Bedeutung erst in speziellen Semantiken zum Tragen kommt. In der 2-wertigen Prädikatenlogik wird, wie wir aus den Deutungen sehen werden, V bzw. Λ als Synonym für ∃ bzw. ∀ benutzt. Die Punkte in der Mengenangabe von **Qu** sollen darauf hindeuten, dass bei Bedarf auch noch andere Quantorzeichen zulässig sein mögen.

---

[27] Man beachte, dass nur *eine* Menge (Sorte) von Objektzeichen eingeführt wird.

[28] Wir bleiben bei der Bezeichnung „Objektzeichen" für die Elemente der Menge **Oz** und benutzen hier meist nicht die Bezeichnung „Variable", weil wir uns dieses Wort für metasprachliche Definitionen aufheben wollen.

6) Schließlich: aus der Menge { (,), **:** } von Trennzeichen, wobei die Klammern so wie in der Sprache der Aussagenlogik benutzt werden, und der Doppelpunkt „:" zur Abgrenzung eines Quantors gegenüber dem nachfolgenden Zeichen benutzt wird; der Doppelpunkt ist eigentlich nicht notwendig, wir fügen ihn der besseren Lesbarkeit halber zum Alphabet hinzu.
7) Alle aufgezählten Zeichenmengen seien paarweise zueinander fremd. Das Alphabet ist die Menge **Z = Oz∪Pz∪J1∪J2∪Qu∪{ (,), : }.**

Das Alphabet enthält Prädikatzeichen an Stelle von „Relationszeichen". Das ist, wie schon gesagt, wesentlich, wenn man statt nur 2-wertige auch mehrwertige Logiken definieren will. Es enthält keine „Funktionszeichen", die man in einer Deutung für Funktionen von Objekten, die wieder Objekte ergeben, benutzen würde. Damit fällt hier auch die Definition von sog. „Termen" weg. Es enthält auch keine sog. „Konstantenzeichen", die man in einer Deutung für ausgezeichnete Objekte oder Prädikate benutzen würde, und auch kein Identitätszeichen, das man zur Identität zwischen Termen benutzen würde**.**

Aus einem n-stelligen Prädikatzeichen p und einer Reihe von n Objektzeichen x_1, x_2..., x_n bildet man den String $px_1x_2...x_n$. Solche Strings übernehmen in der prädikatenlogischen Sprache die Rolle der EA-Zeichen („Atome") der aussagenlogischen Sprache. Aus solchen Strings bildet man mit den Junktoren und Klammern, sowie mit den Quantoren weitere Strings, die wir abkürzend als Großbuchstaben A,...,F, G notieren.

(3.1.2) DEF.pl.Sprache: Wir definieren nun rekursiv die prädikatenlogische Sprache, also die Menge **P** der so genannten „**prädikatenlogischen Aussagesymbole":**

(0) Für alle n∈**N**: Ist p∈**Pz** ein n-stelliges Prädikatzeichen, und sind $x_1,...,x_n$ ∈**Oz** n Objektzeichen so heiße der String $px_1...x_n$ (der Länge n+1) ein **elementares Prädikatsymbol**, kurz: „**EP-Symbol**". Die Menge aller EP-Symbole bezeichnen wir mit **Ep**. Man kann **Ep** als Vereinigung $U_{n\in\mathbf{N}}$ (**Pz**(n)×**Oz**^{n}) darstellen, wenn **Pz**(n) die (eventuell leere) Menge der n-stelligen Prädikatzeichen bedeutet, und $Pz(k)\times Oz^k := \varnothing$ gesetzt wird im Falle $Pz(k)=\varnothing$.
Damit definieren wir nun die Sprache **P** aller **prädikatenlogischen Aussagesymbole,** kurz **„P-Symbole"** (manchmal auch einfach „Ausdrücke") genannt**,** rekursiv so:

(1) Alle EP-Symbole sind P-Symbole.

(2) Ist F ein P-Symbol und ν∈**J1** ein 1-stelliger Junktor, so ist auch νF ein P-Symbol. Insbesondere ist dann auch ¬F ein P-Symbol.

(3) Sind F, G P-Symbole und φ∈**J2** ein 2-stelliger Junktor, so ist auch (F φ G) ein P-Symbol. Insbesondere sind dann auch (F∨G) und (F∧G) P-Symbole.

(4) Ist Q∈**Qu** ein Quantorzeichen, x∈**Oz** ein Objektzeichen, so heiße Qx: ein **Quantor.** Ist F ein P-Symbol, so ist auch Qx:F ein P-Symbol. Insbesondere sind dann auch ∃x: , ∀x: , ⋁x: , ⋀x: Quantoren und ∃x:F , ∀x:F , ⋁x:F , ⋀x:F sind P-Symbole.

Die formale Sprache **P** wird also mit Hilfe der EP-Symbole, der Junktoren und der Quantoren „erzeugt", wir schreiben dafür auch
P=[Ep, J1, J2, Qu] oder **P = [Oz, Pz, J1, J2, Qu]**.

P bildet einen für unsere Zwecke hinreichenden Zeichen- und Symbolvorrat. Man beweist – ähnlich wie in Satz (2.2.1): Die Menge **P** ist **abzählbar**.

Klammern: Zur Bildung der EP-Symbole aus Prädikatzeichen und Objektzeichen brauchen wir keine Klammern. Auch zur Kombination von 1-stelligen Junktoren bzw.

Quantoren mit P-Symbolen sind Klammern nicht nötig. Nur zur Kombination von 2-stelligen Junktoren mit P-Symbolen sind Klammern erforderlich, weil wir die Infix-Schreibweise „FφG“ an Stelle der Präfixschreibweise „φFG“ benutzen. (Die Wichtigkeit dieser Klammern hatten wir bereits in der Aussagenlogik angemerkt.)

Anmerkung: Durch Zulassung der **Stelligkeit 0 für Prädikatzeichen** ist die in Kap.2.1.2 definierte Sprache der mehrwertigen Aussagenlogik in der Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe enthalten, d.h.: Wir können ein 0-stelliges Prädikatsymbol auffassen als ein **EA-Zeichen**.

Anmerkung-2: Die Objektzeichen von **Oz** (ebenso die Prädikatzeichen von **Pz** und die Junktoren- bzw. Quantorenzeichen von **J1∪J2** bzw. von **Qu**) sollen paarweise unterscheidbar sein. In Definitionen – wie z.B. in (3.1.4) , (3.2.4), siehe unten – benutzen wir die Ausdrucksweisen **„x=y“** bzw. **„x≠y“**, wobei x, y Objektzeichen sein sollen, d.h. wir führen damit eigentlich die 2-stellige „=“ Relation auf **Oz** ein. Es fragt sich, ob dazu nicht in der Menge der Prädikatzeichen ein besonderes 2-stelliges Prädikatzeichen als eine **Konstante** – nennen wir sie mal „g“ – eingeführt werden sollte.
Wir verzichten darauf mit folgender Begründung: Das „=“ (also eine 2-stellige Äquivalenzrelation auf einer Menge M mit der besonderen Eigenschaft, dass alle ihre Äquivalenzklassen 1-elementige Teilmengen von M sind), zählen wir zur beschreibenden **Metasprache** – genau so wie die Mengen-Element-Notationen „x∈**Oz**“ oder „p∈**Pz**“ oder „φ∈**J2**“ „Q∈**Qu**“ oder die Notation „β°: **Oz** →**Uni**“ für eine „Elementarbelegung“ (siehe unten, (3.2.3)) u.v.a.m. **metasprachliche** Ausdrücke sind, die selbst **nicht** Symbole der zu definierenden formalen Sprache **P** unserer Prädikatenlogik sein sollen. In einer bestimmten „Deutung“ (vgl. (3.2.7)) können wir natürlich ein bestimmtes Prädikatzeichen, sagen wir g, für das in **Prä** eventuell gebrauchte Prädikat der Identitätsrelation „=“ reservieren.

Wir **vermeiden** es, die Zeichen ¬, ∨, ∧, ⇒, ∃, ∀ auch in der Metasprache bzw. der 2-wertigen Metalogik zu benutzen, sondern sie sollen nur in der Objektsprache **P** bzw. der Objektlogik verwendet werden.

3.1.1 Freie und gebundene Objektzeichen

Da im P-Symbol Qx:F der Quantor auf ein Objektzeichen x∈**Oz** Bezug nimmt, sollte x auch im P-Symbol F vorkommen, braucht es aber nicht nach der obigen Definition (4). Die Beziehung zwischen dem x in Qx: und dem eventuell in F vorkommenden x muss definiert werden.

(3.1.3) DEF. frei/gebunden:

(a) Ist G ein P-Symbol und enthält G das Objektzeichen x aber keinen Quantor Qx: (rechts von x), so heiße x **frei** in G.

(b) Kommt x in F frei vor, so heiße x im Ausdruck Qx:F durch Qx: **gebunden**.

(c) Sind in einem Ausdruck F alle in F vorkommenden Objektzeichen gebunden, so heißt F ein **geschlossenes** P-Symbol (oder auch ein „*formaler Satz*“).

Diese Definition schließt folgende Fälle offenbar nicht aus:

(i) Beispiel: (pxy ∧ Qx:qxy), (p,q∈**Pz**, zweistellig). Im ersten Glied kommt x **frei** vor, im zweiten **gebunden**; (wogegen y frei ist im ganzen Ausdruck).

(ii) Beispiel: Qx:(py ∧ Q’x:qxy) (p,q∈**Pz**, p 1-stellig, q 2-stellig). Im zweiten Glied wird x durch den Quantor Q’x: gebunden. Was soll die „nochmalige“ Bindung von x durch Qx: ?

(iii) Beispiel: Qx:pz (p∈**Pz**, 1-stellig). x kommt im EP-Symbol pz gar nicht vor. Was soll dann der Quantor Qx: vor pz ?

(iv) Beispiel: Qx:r, wobei r ein 0-stelliges Prädikatzeichen sei. Was soll dann der Quantor Qx: vor r ?

Die folgende rekursive Definition sagt genauer, was es heißt, dass x frei in einem P-Symbol vorkomme:

(3.1.4) DEF.frei: Sei x ein Objektzeichen, x∈**Oz**:

(1) „x frei in $px_1x_2...x_n$“ :gdw. x ist identisch mit wenigstens einem der x_i (wobei p∈**Pz**, n-stellig)

(2) „x frei in νF“ :gdw. x frei in F (wobei ν∈**J1**)

(3) „x frei in (FφG)“ :gdw. x frei in F oder x frei in G (wobei φ∈**J2**)

(4) „x frei in Qy:F“ :gdw. x≠y und x frei in F (wobei Q∈**Qz**)

(5) Trifft keine der Definitionen (1)-(4) für x in einem Ausdruck zu, so heißt x in diesem Ausdruck **gebunden**.

Nach dem rekursiven Aufbau der P-Symbole in **DEF.pl.Sprache** ist damit die Redewendung „x frei in F“ für alle P-Symbole F∈**P** definiert.

Die vier oben erwähnten Fälle (i) - (iv) sind also erlaubt. Sie klären sich erst auf bei der „Deutung“ von P-Symbolen.

3.2 Semantik-Schema

Um aus der formalen Sprache **P = [Oz, Pz, J1, J2, Qu]** eine wertebasierte „Prädikatenlogik“ zu machen, braucht man ein Schema, aus dem hervorgeht, welche **Anwendungsgebiete** auf Ausschnitte der Sprache **P** „passen“; und man braucht – wie in der mehrwertigen Aussagenlogik – einen **Bewertungsbereich B**. Wir wollen uns wieder stets auf einen **endlichen** Bewertungsbereich beschränken. In der klassischen Aussagenlogik ist {0, 1} der Bewertungsbereich. In der unserer mehrwertigen Prädikatenlogik beschränken wir uns – wie in unserer Aussagenlogik – auf die algebraische Struktur **(B, ≤, V1, V2)** eines **endlichen Verbandes von mehr als 2 Elementen,** wobei dessen 2-stellige Hauptverknüpfungen + , • aus **V2** wieder durch
. a+b:= sup{a,b}, a•b:= inf{a,b} für alle a,b∈**B**
definiert sind, aber die Mengen **V1, V2** noch weitere, mit + und • verträgliche oder aus ihnen abgeleitete Basisverknüpfungen enthalten dürfen. Da **B** ein *endlicher* Verband sein soll, existieren auch für beliebige Teilmengen X⊆**B** die Elemente
supX ∈ **B** und infX ∈ **B,** insbesondere ist
sup**B** = inf∅ = **1** und inf**B** = sup∅ = **0,**
wobei **1** das „größte“, **0** das „kleinste“ Element von **B** ist.
Die Begründung dafür übernehmen wir aus Kap.2.5.

(3.2.1) DEF.Anwendungssystem: Ein Anwendungssystem ist ein Tripel **(Uni, B, Prä)**, wobei **Uni** eine endliche Menge von „**Objekten**“ – der sog. „**Objektbereich**“ oder ein sog. „Universum“ – , **B** ein (wie oben beschriebener) endlicher **Bewertungsbereich**, mit einer o.a. **Verbandsstruktur (B, ≤, V1, V2)** ist**. Prä** ist eine endliche Menge von „**Prädikatenformen**“ (oder einfach „**Prädikate**“). Jede Prädikatenform α∈**Prä** hat eine gewisse „**Stelligkeit**“ n=n(α) (n∈**N**) und ist eine Abbildung[29]

---

[29] Man beachte, dass der Objektbereich **Uni** zunächst in DEF.(3.2.1) ***nicht*** in mehrere „Sorten“ von Objekten aufgeteilt ist. Entsprechend soll der *Definitionsbereich* einer n-stelligen Prädikatenform α∈**Prä** zunächst immer *ganz* **Uni**^{n} sein und nicht nur eine Teilmenge D_α⊆**Uni**^{n}. Dies bedeutet zwar eine Vereinfachung im Semantik-Schema, es wird aber erkauft mit einer Einschränkung bei den Anwendungsmöglichkeiten einer solchen Prädikatenlogik. Ausgeglichen wird diese Einschränkung aber wieder dadurch, dass man für eine Anwendung meist nur eine kleinere *Teilmenge* M={F, G, ...}

α: **Uni**^{n} $\rightarrow$**B**

der n-Tupel $(a_1,..a_n)\in$**Uni**^{n} in den Bewertungsbereich **B**. (Bild$\alpha\subseteq$**B**).

(3.2.2) DEF.Anwendung: Sei M:={F, G,...} eine endliche Menge von P-Symbolen (M$\subseteq$**P**), Pz(M) sei die Menge der darin vorkommenden Prädikatzeichen, **(Uni, B, Prä)** sei ein dazu „passendes" Anwendungssystem. Dann heißt das Paar **(π,γ)** eine „**Anwendung**" von M im Anwendungssystem **(Uni, B, Prä)**, wenn

π:Pz(M)$\rightarrow$**Prä**

eine Abbildung ist, die jedem Prädikatzeichen p$\in$Pz(M) eine Prädikatenform πp$\in$**Prä** gleicher Stelligkeit zuordnet, und

γ: **J1$\cup$J2** $\rightarrow$ **V1$\cup$V2**

die (schon aus der Aussagenlogik bekannte) *bijektive* **Junktorenabbildung** ist, die jedem $\nu\in$**J1** eine Verknüpfung $\gamma\nu\in$**V1** und jedem $\varphi\in$**J2** eine Verknüpfung $\gamma\varphi\in$**V2** zuordnet.

(3.2.3) DEF.Elementarbelegung: Ist Oz(M) die Menge der in M vorkommenden Objektzeichen, so heißt irgendeine Abbildung

$\beta°$:Oz(M) $\rightarrow$**Uni**

eine „zu M passende **Elementarbelegung**".

Beachte, dass hier in der Prädikatenlogik „Elementarbelegung" nicht – wie in der Aussagenlogik – eine Abbildung von Elementaraussagen, sondern eine von ***Objektzeichen*** ist.

Um den Belegungsvorgang bei Auftreten von Quantoren einfach und übersichtlich formulieren zu können, führen wir zu einer Elementarbelegung $\beta°$für x,y,z,... $\in$**Oz** und u,v,...$\in$**Uni** noch Belegungen $\beta°_{u/x}$ bzw. $\beta°_{u/x\ v/y}$ etc... folgendermaßen ein:

(3.2.4) DEF.Elementarbelegung mit Ausnahme:

(i)	$\beta°_{u/x}(y)$	:= $\beta°(y)$	im Fall $y\neq x$	
		:= **u**	im Fall y=x	und nennen

$\beta°_{u/x}$ die **„Elementarbelegung $\beta°$ mit Ausnahme u $\in$Uni".** Entsprechend

(ii)	$\beta°_{u/x\ v/y}(z)$	:= $\beta°(z)$	im Fall $z\neq x$ und $z\neq y$	
		:= **u**	im Fall z=x	
		:= **v**	im Fall z=y	und nennen

$\beta°_{u/x\ v/y}$ die **„Elementarbelegung $\beta°$ mit Ausnahmen u, v $\in$Uni".**
Usw. ..., entsprechend für mehr als zwei Ausnahmen.

Klar, dass dann speziell $\beta°_{u/x}(x)$ = u und $\beta°_{u/x\ v/y}(x)$= u ist für alle x$\in$Oz(M), d.h. diese Operatoren hängen gar nicht von $\beta°$ab. Aus einer Elementarbelegung $\beta°$wird – ähnlich wie in der Aussagenlogik – eine „Belegung" β: M $\rightarrow$**B** ***rekursiv*** abgeleitet.
(Die Liste der nun folgenden Definitionen ist – aus Gründen der Verständlichkeit – länger als notwendig)

(3.2.5) DEF.Belegung: Sei F irgendein P-Symbol der Menge M (wie oben), γ die Junktorenabbildung und $\beta°$: Oz(M)$\rightarrow$**Uni** eine Elementarbelegung. Wir geben die rekursive Definition der aus $\beta°$abgeleiteten Belegung β: M$\rightarrow$**B:**

---

von P-Symbolen, und nicht den gesamten Vorrat aller P-Symbole der formalen Sprache **P** untersucht: Man beschränkt sich dann – wie in DEF.(3.2.2) dargelegt – auf die Teilmengen Oz(M), Pz(M) von Objektzeichen und Prädikatzeichen, die in den P-Symbolen von M vorkommen. Somit wird auch das betrachtete „Anwendungssystem" **(Uni, B, Prä)** i. allg. nur ein geeigneter ***Ausschnitt*** aus einem umfassenderen „*Anwendungskontext*" sein.

(1) Ist $F\in M$ das EP-Symbol $px_1...x_n$ mit n-stelligem Prädikatzeichen $p\in Pz(M)$ und den Objektzeichen $x_1,..., x_n \in Oz(M)$, so sei

(i) $\beta(px_1...x_n) := (\pi p)(\beta°(x_1),..., \beta°(x_n))$,

Diese Ausdrücke repräsentieren also gewisse Werte aus **B**.

und die „**Belegung β mit Ausnahme u∈Uni**" wird definiert durch

(ii) $\beta_{u/x}(px_1...x_n) := (\pi p)(\beta°_{u/x}(x_1),..., \beta°_{u/x}(x_n))$;

Beispiel: Seien x,y,z∈**Oz** verschiedene Objektzeichen, p∈**Pz** ein 3-stelliges Prädikatzeichen und u∈**Uni**. Dann ist $\beta_{u/x}(pyxz) = (\pi p)(\beta°(y), u, \beta°(z))$.

Entsprechend definiert man die „**Belegung mit Ausnahme u,v∈Uni**" etc...**:**

(iii) $\beta_{u/x\ v/y}(px_1...x_n) := (\pi p)(\beta°_{u/x\ v/y}(x_1),..., \beta°_{u/x\ v/y}(x_n))$

– usw. ... für mehr als 2 Ausnahmen.

Beispiel: Seien x, y, z∈**Oz** verschiedene Objektzeichen, p∈**Pz** ein 3-stelliges Prädikatzeichen und u, v∈**Uni** verschiedene Objekte. Dann ist $\beta_{u/x\ v/y}(pxyz) = (\pi p)(u, v, \beta°(z))$.

(2) Ist $F\in M$ ein P-Symbol der Form νG mit $G\in P$, $\nu\in$ **J1** und ist u∈**Uni**, so sei

. $\beta(\nu G) := \gamma\nu\beta(G)$ und $\beta_{u/x}(\nu G) := \gamma\nu\ \beta_{u/x}(G)$; insbesondere ist dann $\beta(\neg G) := (\beta(G))^*$ und $\beta_{u/x}(\neg G) := (\beta_{u/x}(G))^*$; entsprechend für mehrere Ausnahmen

(3) Ist $F\in M$ ein P-Symbol der Form $(G\varphi H)$ mit $G,H\in P$, $\varphi\in$ **J2** und ist u∈**Uni**, so sei

$\beta(G\ \varphi\ H) := \beta(G)\ \gamma\varphi\ \beta(H)$ und $\beta_{u/x}(G\ \varphi\ H) := \beta_{u/x}(G)\ \gamma\varphi\ \beta_{u/x}(H)$; insbesondere ist dann $\beta(G\vee H) := \beta(G)+\beta(H)$, $\beta_{u/x}(G\vee H) := \beta_{u/x}(G)+\beta_{u/x}(H)$, sowie $\beta(G\wedge H) := \beta(G)\bullet\beta(H)$, $\beta_{u/x}(G\wedge H) := \beta_{u/x}(G)\bullet\beta_{u/x}(H)$; entsprechend für mehrere Ausnahmen.

(4) Ist $F\in M$ von der Form $\exists x{:}px_1...x_n$, so sei

$\beta(\exists x{:}px_1...x_n) := (\pi p)(\beta°_{u/x}(x_1),..,\beta°_{u/x}(x_n))$ für wenigstens ein u∈**Uni**.

Beispiel: Seien x,y,z∈**Oz** verschiedene Objektzeichen, p∈**Pz** ein 3-stelliges Prädikatzeichen Dann **gibt es ein u∈Uni**, so dass $\beta(\exists x{:}pxyz) = \beta_{u/x}(pxyz) = (\pi p)(u, \beta°(y), \beta°(z))$

(5) Ist $F\in M$ von der Form $\exists x{:}G$, so sei

$\beta(\exists x{:}G) := \beta_{u/x}(G)$ für wenigstens ein u∈**Uni**.

(6) Ist $F\in M$ von der Form $\forall x{:}px_1...x_n$, so sei

$\beta(\forall x{:}px_1...x_n) := (\pi p)(\beta°_{u/x}(x_1),...,\beta°_{u/x}(x_n))$ für *alle* u∈**Uni**.

Beispiel: Seien x,y,z∈**Oz** verschiedene Objektzeichen, p∈**Pz** ein 3-stelliges Prädikatzeichen. Dann ist **für alle u∈Uni:** $\beta(\forall x{:}pxyz) = \beta_{u/x}(pxyz) = (\pi p)(u, \beta°(y), \beta°(z))$

(7) Ist $F\in M$ von der Form $\forall x{:}G$, so sei

$\beta(\forall x{:}G) := \beta_{u/x}(G)$ für *alle* u∈**Uni.**

(8) Ist $F\in M$ von der Form $\bigvee x{:}px_1...x_n$, so sei

$\beta(\bigvee x{:}px_1...x_n) := \sup\{(\pi p)(\beta°_{u/x}(x_1),..., \beta°_{u/x}(x_n)) \mid u\in \mathbf{Uni}\}$.

Beispiel: Seien x,y∈**Oz** verschiedene Objektzeichen, p∈**Pz** ein 2-stelliges Prädikatzeichen. Dann ist $\beta(\bigvee x{:}pxy) = \sup\{\pi p(u, \beta°(y)) \mid u \in \mathbf{Uni}\}$

(9) Ist $F\in M$ von der Form $\bigvee x{:}G$, so sei

$\beta(\bigvee x{:}G) := \sup\{\beta_{u/x}(G) \mid u\in \mathbf{Uni}\}$.

(10) Ist $F\in M$ von der Form $\bigwedge x{:}px_1...x_n$, so sei

$\beta(\bigwedge x{:}px_1...x_n) := \inf\{(\pi p)(\beta°_{u/x}(x_1),..., \beta°_{u/x}(x_n)) \mid u\in \mathbf{Uni}\}$

Beispiel: Seien x,y∈**Oz** verschiedene Objektzeichen, p∈**Pz** ein 2-stelliges Prädikatzeichen. Dann ist $\beta(\bigwedge x{:}pxy) = \inf\{\pi p(u, \beta°(y)) \mid u \in \mathbf{Uni}\}$

(11) Ist $F\in M$ von der Form $\bigwedge x{:}G$, so sei

$\beta(\bigwedge x{:}G) := \inf\{\beta_{u/x}(G) \mid u\in \mathbf{Uni}\}$

Beachte bei Belegungen: Während in der Aussagenlogik sowohl die Elementarbelegungen β°als auch die abgeleiteten Belegungen β in den Bewertungsbereich **B** gingen, geht in unserer Prädikatenlogik jede Elementarbelegung β°in den *Objektbereich* **Uni**, wogegen die abgeleitete Belegung β in den *Bewertungsbereich* **B** geht.

Anmerkung zu sup und inf: sup... bzw. inf... in (8) bis (11) ist die in 2.4.1 / (5) und (6) definierte Supremum- bzw. Infimumbildung im endlichen **Verband B**. Wir schreiben dafür immer „sup“ bzw. „inf“, wogegen wir mit V bzw. Λ stets Quantorzeichen der Menge **Qu** der formalen Sprache **P** meinen.

Anmerkung zur Doppelverwendung von Quantoren mit demselben Objektzeichen x: Beispiel sei F:= ∀x:Vx:pxy und seien x,y *verschiedene* Objektzeichen. Ist β°irgendeine Elementarbelegung mit β°(y) ∈ **Uni,** so ist nach (7): β(F) = w :gdw. $\beta_{u/x}$(Vx:pxy) =w gilt für alle u∈ **Uni.** Andererseits ist nach (8): β(Vx:pxy) = sub{(πp)(v,β°(y)) | v ∈ **Uni**}, also w=$\beta_{u/x}$(Vx:pxy)= sub{(πp)(v,$\beta°_{u/x}$(y)) | v∈ **Uni**}. Da aber nach Voraussetzung x≠y ist, ist $\beta°_{u/x}$(y)=β°(y). Also β(F)= sub{(πp)(v,β°(y)) | v ∈ **Uni**}=w, d.h. ∀x:Vx:pxy = sub{(πp)(v,β°(y)) | v ∈ **Uni**} = w. Der linke äußere Quantor ∀x: in F ist schlicht **wirkungslos:**

β(∀x:Vx:pxy) = β(Vx:pxy).

Daraus ergibt sich verallgemeinert der

(3.2.6) Satz: Sind Q, Q'∈ **Qu** Quantorzeichen, und ist F∈ **P** ein prädikatenlogisches Aussagesymbol, so gilt

(i) β(Q'x:Qx:F) = β(Qx:F) für jede Belegung β.

Ähnlich zeigt man: Kommt das Objektzeichen x im Ausdruck F nicht oder nicht frei vor, so gilt

(ii) β(Qx:F)=β(F) für jede Belegung β.

Insbesondere: Ist G∈ **P** ein **geschlossenes** P-Symbol, so gilt

(iii) β(Qx:G)=β(G) für jede Belegung β.

(3.2.7) DEF.Deutung: Das Tripel (π, γ, β) bestehend aus einer Anwendung (π, γ) und dazu einer Belegung β nennt man eine „**Deutung**“ der ausgewählten P-Symbole F, G, ... von M⊆**P.**

3.2.1 Die Quantoren ∃x:, ∀x:, Vx:, Λx:

Soviel ich gesehen habe, sind diese speziellen Quantoren ∃x:, ∀x:, Vx:, Λx: bei *Gottwald* in der Definition des Begriffs der Belegung [Go.1989, S. 189f] *gar nicht explizit diskutiert und unterschieden worden*. Er sagt nur, Λx: bzw. Vx: seien „naheliegende Verallgemeinerungen des Generalisators bzw. des Partikularisators der klassischen Prädikatenlogik“ [Go.1989, S. 188, (4.2.7), (4.2.8)]. Er erwähnt aber nicht, dass man daneben den Generalisator ∀x: und den Partikulator ∃x: in der mehrwertigen Prädikatenlogik *genauso wie in der klassischen Logik* definieren kann. Er bleibt ausschließlich im Abstrakten – vielleicht unter anderem deswegen, weil er sich für den Bewertungsbereich **B** nicht auf *endliche Verbände* festlegt, wie wir das hier in unserer Note machen.

3.2.1.1 Klassische Prädikatenlogik

In der *klassischen 2-wertigen* Logik – also für **B**={0,1} – werden nur die beiden Quantoren ∃x: und ∀x: verwendet. Die Quantorenzeichen V und Λ dienen dort oft als Synonyme für ∃ und ∀ und haben keine eigenständige Bedeutung. Das kommt einfach daher, dass nur zwei Werte 0, 1 für Bewertungen zur Verfügung stehen: Wir begründen das kurz anhand der Def.(3.2.5) (4),(6),(8),(10) am Beispiel eines **1-stelligen** Prädikatzeichens p∈ **Pz**:

(i.1) β(∃x:px)=1 heißt: Es gibt ein u∈ Uni, das die Eigenschaft πp hat, d.h. πp(u)=1, und das ist gleich sup{πp(ξ)|ξ∈ Uni}, da 1 der größte Wert in {0,1} ist; also β(∃x:px)= β(Vx:px)=1

(i.2) β(∃x:px)=0 heißt: 1=[β(∃x:px)]*=β(∀x:¬px),d.h. für alle u∈ Uni ist πp(u)≠1, also =0, πp ist konstant, also 0=inf{πp(ξ)| ξ∈ Uni}=sup{πp(ξ)| ξ∈ Uni}.

In allen Fällen (i) (es gibt nur zwei!) trifft also zu: **β(∃x:px)=β(Vx:px).**

(ii.1) β(∀x:px)=1 heißt: alle u∈ Uni haben die Eigenschaft πp, d.h. πp(u)=1. d.h. πp ist konstant, also 1=sup{πp(ξ)| ξ∈ Uni}=inf{πp(ξ)| ξ∈ Uni}.

(ii.2) $\beta(\forall x{:}px)=0$ heißt: $1=[\beta(\forall x{:}px)]^*=\beta(\exists x{:}\neg px)$, d.h. es gibt ein $u\in \mathrm{Uni}$ mit $\pi p(u)\neq 1$, also $=0$ und das ist $=\inf\{\pi p(\xi)\mid \xi\in \mathrm{Uni}\}$.
In allen Fällen (ii) (es gibt nur zwei!) trifft also zu: **$\beta(\forall x{:}px)=\beta(\bigwedge x{:}px)$.**

Man kann also in der klassischen Logik stets $\bigvee x$:... durch $\exists x$:... und $\bigwedge x$:... durch $\forall x$:... ersetzen. Die Quantorenzeichen $\bigvee$ und $\bigwedge$ sind unnötig.

3.2.1.2 Mehrwertige Prädikatenlogik

In einer mehr als 2-wertigen Logik ist das anders:

- (i) Sei **B** zunächst ein ***linearer*** (endlicher) Bewertungsverband. In (4) und (5) der DEF.(3.2.5)(4) wird mit $\beta(\exists x{:}px)=w_1$ die Existenz (wenigstens) eines **Objektes** $u_1\in$ **Uni** definiert, mit dem der Wert $w_1\in$ **B** angenommen wird. In (8) dagegen wird mit $\beta(\bigvee x{:}px)$ ein **Wert** $w_2\in$ **B** als Supremum der Menge Bild$\pi p \subseteq$ **B** definiert. Da **B** als linear vorausgesetzt ist, gilt in der Anwendung supBild$\pi p\in$ Bildπp und infBild$\pi p\in$ Bildπp. Ein $u_2\in$ **Uni** mit dem dieser Wert angenommen wird, existiert zwar im Definitionsbereich von πp; *es muss aber nicht gleich u_1 sein*, denn nicht einmal w_1 und w_2 müssen gleich sein.
(ii) Sei nun **B** ein ***nichtlinearer*** (endlicher) Bewertungsverband. In diesem Falle existiert zwar w_1:=supBildπp und w_2:=infBildπp ebenfalls in **B**; ein u mit $\pi p(u) = w_1$ oder $\pi p(u)=w_2$ **muss aber gar nicht existierendem**, denn für einen nichtlinearen (endlichen) Verband gehört supM bzw. infM nicht immer zur Menge $M\subseteq$**B**. $\beta(\exists x{:}px)$ und $\beta(\bigvee x{:}px)$ können also was völlig verschiedenes bedeuten.
- In der DEF.(3.2.5)(6) wird mit $\beta(\forall x{:}px)$ ein Wert $w_1\in$ **B** für *alle* **Objekte** $u\in$ **Uni** definiert. In (10) dagegen wird mit $\beta(\bigwedge x{:}px)$ ein **Wert** $w_2\in$ **B** als Infimum der Menge Bild$\pi p \subseteq$ **B** definiert; das Infimum existiert in **B** und wird auch mit einem $u_2\in$ **Uni** angenommen ($\pi p(u_2)$=infBildπp), sofern **B** ***linear*** ist. Ist aber **B** ***nichtlinear,*** so muss das i.allg. ***gar nicht der Fall sein: Der Wert w_2 muss gar nicht im Bildbereich von πp liegen,*** denn für einen nichtlinearen Verband und beliebige Menge $M\subset$**B** muss, wie gesagt, infM bzw. supM nicht M liegen. $\beta(\forall x{:}px)$ und $\beta(\bigwedge x{:}px)$) können also was völlig verschiedenes bedeuten.

Die Quantoren $\bigvee x$: und $\exists x$: bzw. $\bigwedge x$: und $\forall x$ unterscheiden sich in einer Logik mit einem aus mehr als 2 Werten bestehenden Bewertungsverband wesentlich.

3.2.2 Weitere Quantoren?

In DEF.(3.2.5) wurde eine Belegung nur für Ausdrücke mit Quantoren $\exists x$:, $\forall x$:, $\bigvee x$:, $\bigwedge x$: definiert. Es ist klar, dass $\bigvee x{:}px$ der wiederholten Anwendung des „oder"-Junktors $\vee$ nachgebildet ist, z.B. wie im Ausdruck $A := (((px_1\vee px_2)\vee px_3)\vee px_4)$; ebenso ist $\bigwedge x{:}px$ der wiederholten Anwendung des „und"-Junktors $\wedge$ nachgebildet, z.B. wie in $A' := (((px_1\vee px_2)\vee px_3)\vee px_4)$ ($p\in$ **Pz**, $x_i\in$ **Oz**). Wegen der Kommutativität und Assoziativität der Verknüpfungen +, • bekommt man bei Änderung der Gliedreihenfolge und Änderung der Klammerung in A bzw. A' stets nur zu A bzw. A' *äquivalente* Ausdrücke. Das macht die Handhabung der Quantoren $\bigvee x$:, $\bigwedge x$: einfach.
Entsprechend könnte man zu jedem Junktor $\varphi\in$ **J2** je einen Quantor $Q_\varphi x$: ***assoziieren***, indem man ihn der wiederholten Anwendung von φ gemäß dem Beispiel $(((px_1\ \varphi\ px_2)\ \varphi\ px_3)\ \varphi\ px_4)$ nachbildet. Zum Beispiel sei der Quantor „►x:" zum Junktor $\Rightarrow$ assoziiert und gemäß dem Beispiel $(((px_1\Rightarrow px_2) \Rightarrow px_3) \Rightarrow px_4)$ nachgebildet. Wählt man zum Beispiel $\neg$ so dass $\gamma\neg$ = * eine Involution auf **B** ist und **B** damit zu einem komplementären Verband wird, so kann man z.B. $\Rightarrow$ über $\gamma\Rightarrow$ = $\rightarrow$ wieder durch $x\rightarrow y{:}=x^*+y$ definieren. Der zu $\Rightarrow$ assoziierte Quantor „►x:" würde dann durch die Äquivalenz

$$[\blacktriangleright x{:}A] \Rightarrow B :\cong [\bigwedge x{:}A] \Rightarrow B \qquad \text{definiert, also auf } \bigwedge x\text{: zurückgeführt.}$$

Ähnlich könnte man einen weiteren Quantor „►$_{\#}$ x:“ definieren durch

[►$_{\#}$ x:A] ⇒B :≅ [∀x:A] ⇒B und ihn damit auf ∀x: zurückführen.

Die Definition weiterer Quantoren haben wir in DEF.(3.2.4) unterlassen aus folgenden Gründen:

1. In der *klassischen 2-wertigen Logik* liegt die Bedeutung aller Junktoren aus **J1∪J2** fest, da der Bewertungsverband ({0,1},≤ *; +, •) festliegt. Es gibt dort nur *eine* Verneinung ¬, also **J1**={¬}, und γ¬ = * ist die Involution auf {0, 1}, ∨∈**J2** ist ein Basisjunktor mit γ∨ = +. Es gibt auf {0, 1} insgesamt nur 16 2-stellige Abbildungen {0, 1}x{0, 1} → {0, 1}, davon zwei „triviale“: t_0(x,y)=0, t_1(x,y)=1 für alle x,y∈{0, 1}; vgl. z.B. [FLM1.1966, S. 198]. *Alle* 2-stelligen Verknüpfungen auf {0, 1} können aus der Verknüpfungsbasis *, + abgeleitet werden. Das nennt man „*funktionale Vollständigkeit*“ der Basis *, + von {0,1} (bzw. der Basis ¬, ∨ von **(P,{0,1},γ)**). Die Junktoren ∧ und ⇒ sind in der *klassischen Logik* über die Verknüpfungen γ∧ = • , γ⇒ durch x•y := (x*+y*)*, x→y:=x*+y definierbar. Es ist daher eigentlich nur *ein* Quantor erforderlich, nämlich der zu ∨ assoziierte Quantor ∃x:. Der zu ∧ assoziierte Quantor ∀x: und ein zu ⇒ assoziierter Quantor ►x: sind eigentlich überflüssig.
2. In der *mehrwertigen Logik* mit |**B**|>2 werden die Probleme jedoch „sprunghaft“ komplizierter: Wir haben uns zwar auf einen *endlichen Verband* als Bewertungsbereich **B** mit den 2-stelligen Haupt-Verknüpfungen γ∨ = +, γ∧ = • für „oder“, „und“ festgelegt (und damit schon ein paar mehrwertige Logiken – etwa von *Łukasiewicz, Post, Belnap* angegebene Beispiele – ausgeschlossen), aber die möglichen 1-stelligen ν∈**J1** und alle anderen möglichen 2-stelligen Junktoren φ∈**J2** sind damit noch ***nicht*** festgelegt. Schon für |**B**|=3 gibt es insgesamt **3^3=27** 1-stellige Abbildungen **B**→**B**, aber bereits **3^9=19.683** 2-stellige Abbildungen **BxB→B** ! Und die sind *nicht alle* durch +, • und einen ausgewählten Verneinungsoperator * definierbar. Davon sind für eine „sinnvolle“ Logik wohl auch nicht alle „relevant“.
3. Die Frage ist: welche sind „relevant“, und was ist dabei eine „sinnvolle“ Logik? Was „relevant“ sei, können die Mathematiker leicht definieren: Es soll eine *minimale Verknüpfungsbasis* von 1- und 2-stelligen Verknüpfungen sein, aus denen alle anderen n-stelligen Verknüpfungen (n=1, 2, 3, ...) in ***endlich*** vielen Kompositionsschritten ableitbar sind; das nennt man wieder „*funktionale Vollständigkeit*“ der Verknüpfungsbasis (vgl. die Def. für „*funktionalne Vollständigkeit*“ im Glossar). Für eine solche Verknüpfungsbasis gibt es aber bei |**B**|>2 nicht nur ein paar wenige (wie in der 2-wertigen Logik), sondern viele Möglichkeiten![30]
4. Was aber dabei eine „sinnvolle Basis“ für eine „sinnvolle“ mehrwertige Logik sei, das kann man in einem formalen Semantik-Schema für die mehrwertige Logik eben ***nicht*** allgemein definieren! Um die „Sinnhaftigkeit“ einer mehrwertigen Logik einzusehen, braucht man mindestens ein einschlägiges **Anwendungssystem** und darin einige **Modelle** für ein paar (nicht zu große) Teilmengen von prädikatenlogischen Aussagesymbolen – und davon gibt’s (verglichen mit der Vielzahl *mathematischer* Anwendungssysteme und Modelle für die 2-wertige Logik) relativ wenige für mehrwertige Logiken. Man muss die Anwendungssysteme und Modelle besonders ***außerhalb*** oder am Rande der Mathematik suchen!

Da nur ∨ und ∧ festgelegt sind durch die Entscheidung, dass der Bewertungsbereich ein **Verband** sein soll, haben wir in der DEF.(3.2.5) nur die Quantoren ∃x:, ∀x:, Vx:, Λx: berücksichtigt.

3.2.3 Übertragung weiterer Begriffe aus der 2-wertigen Prädikatenlogik &&&

&&& analog Kap.2.4

[30] Es gilt sogar der Satz [Go.1989, S.76]: Ist **(P,B,γ)** eine mehrwertige Aussagenlogik mit |**B**| >2 und erfüllen die Junktoren von **J1∪J2** alle die *Normalbedingungen* (2.4.7), so ist die Junktorenmenge **J1∪J2** *funktional unvollständig*. D.h. aus den Junktoren von **J1∪J2** lassen sich **nicht** alle endlich-stelligen Junktoren ableiten. Und das wiederum heißt: Es gibt beliebig viele mehrwertige Logiken, welche die klassische 2-wertige Logik ***nicht*** einschließen.

3.2.4 Beispiele &&&

&&&

➔ weiter in Teil 4