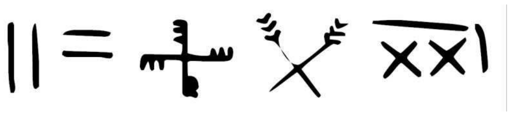
Dr. Christoph Lübbert
Viktoriastr. 36, 64293 Darmstadt
Tel.: 06151-422298
Em: clind04@yahoo.de
In: www.cl-diesunddas.de

Mehrwertige Logiken

(Das Zeichen &&& weist auf Überarbeitungsbedürftigkeit hin)



Inhalt

1 Einleitung

1.1 Zusammenfassung

„Logik“ wird hier nicht als „Metamathematik“ verstanden, so wie sie in vielen Büchern zur Einführung in die Logik präsentiert wird, (vgl. etwa [Eb/Fl/Th.2007], [Zi.2010]; oder auch [Fi/Vo.2003]), sondern als ein Sondergebiet der angewandten Mathematik & Informatik, das zu dem Versuch da ist, außermathematische Theorien zu formalisieren / zu „modellieren“[1].

Zunächst trenne ich die Begriffe zur formalen „**Sprache“ P** einer Logik streng von Begriffen ihres „**Bewertungsbereichs**“ **B**. Der Bewertungsbereich ist nichts anderes als eine geeignete *endliche* (kleine) **algebraische Struktur**. In diesem Sinne besteht der Bewertungsbereich der *klassischen* Logik aus nur zwei Werten, die als „0“, „1“ oder „wahr“, „falsch“ gelesen werden, und hat eine sehr einfache mathematische Struktur: die des **Booleschen 2-er-Verbandes**. Echt mehrwertige Logiken haben mehr als 2 Werte in ihrem Bewertungsbereich, und seine Grundstruktur ist fast immer ebenfalls die eines Verbandes (mit Zusatzverknüpfungen).

Anhand von Standardwerken, etwa [Kr/Kü.2006], [Eb/Fl/Th. 2007], [Zi.2010], zur klassischen 2-wertigen Aussagen- und Prädikatenlogik (1.Stufe) suche ich, welche Begriffe und Methoden, auf eine mehrwertige Logik übertragen werden können, welche nicht. Dabei lasse ich mich teilweise anregen von dem Werk [Go.1989] von *Siegfried Gottwald* über mehrwertige Logik, dem ich aber nicht folge. Meine strenge Trennung von formaler Sprache und Bewertungsbereich vereinfacht m.E. die Darstellung gegenüber der von *Gottwald*. Besonders aber leitet mich die **Halbordnungs**- und **Verbands**-Idee für den Bewertungsbereich, die ich mit einem natürlichen Sprachempfinden verbinde, das noch ganz unabhängig ist von einer möglichen „Bewertung“ mit „wahr“ oder „falsch“ oder einem anderen „logischen Wert“. Gottwald betrachtet in seinen Beispielen nur *lineare* Bewertungsskalen und fast nur mathematische Themen. Ich gebe aber auch außermathematische Anwendungsbeispiele für Logiken mit nichtlinearen Bewertungsbereichen. Damit gehe ich m.E. ein bisschen über Gott-

---

[1] Mit „Modellierung“ eines außermathematischen und vor-mathematisch formulierten Sachverhalts meine ich die Erstellung eines mathematisch-logischen Systems, welches es gestattet, den außermathematischen Sachverhalt `cum grano salis` zu beschreiben und **in wohldefinierter Weise zu testen**. Der Zweck einer mathematischen „Modellierung“ ist immer derselbe – egal ob es sich bei dem Anwendungsgebiet um ein naturwissenschaftliches, technisches, betriebswirtschaftliches, sozialwissenschaftliches, medizinisches, psychologisches oder philosophisches Thema handelt:
– Entweder stellt sich heraus, dass die mathematische Modellierung Defizite aufweist; dann kann sie (aufgrund der vorausgegangenen Formalisierungsarbeit) **in wohldefinierter Weise** angepasst werden.
– Oder durch die Formalisierung (math. Modellierung) werden Unstimmigkeiten in der Formulierung oder Auffassung des Anwendungsgebietes entdeckt. Dann können die Unstimmigkeiten (dank der Formalisierung) **in wohldefinierter Weise** eventuell bereinigt werden.

In der modernen (2-wertigen) Logik wird der Begriff „Modell“ gerade umgekehrt benutz: Zu einer gegebenen (2-wertigen) Logik L heißt eine Menge M von Sätzen eines Anwendungsgebietes ein „Modell“, wenn es wenigstens eine Belegung β: M $\rightarrow$L gibt, bei der alle Sätze von M „wahr“ werden.

walds Ideen hinaus, schränke aber zugleich die Struktur des Bewertungsbereichs etwas durch die Halbordnungs- und Verbands-Idee ein (– die Einschränkung ist m.E. unwesentlich gering für außermathematische Anwendungen). Hierbei hat mich das Werk [Ga/Wi. 1996] von *B. Ganter* und *R. Wille* über „Formale Begriffsanalyse" sehr angeregt. Gegen Ende dieser Note vergleiche ich das Konzept der *wertebasierten Logiken* mit dem einer sog. *dialogischen Logik*.

Im Glossar werden die meisten in dieser Note benutzten Begriffe noch einmal zusammengefasst und erläutert.

1.2 Vorbemerkung zur Motivation

Anlässlich eines Seminars über die metasprachlichen Grundlagen zur Anwendbarkeit von „*mehrwertiger Logik*" und „*dialogischer Logik*" in der Informatik, das von ***Rudolf Wille*** im Fachbereicht Mathematik der TU Darmstadt im Herbst 2009 veranstaltet wurde, ergab sich ein mehrmonatiger, kritischer Dialog um diese Fragen mit meinem Freund und Emeritus, ***Peter Zahn*** (ehem. Logiker und Mathematiker an der TU Darmstadt). Aus der Erkenntnis, dass es da offensichtlich zwei **völlig verschiedene Ansätze** gibt für das, was angewandte Logik sein soll, nämlich

- einerseits mit einem *wertebasierten Logik-Konzept*,
- andererseits mit dem Konzept der sogenannten *dialogischen Logik*

entstand schließlich diese für meine Bedürfnisse klärende Note.

Als Mathematiker habe ich die übliche 2-wertige „wahr/falsch"-Logik eher intuitiv benutzt als ein Werkzeug, um mathematische Aussagen zu beweisen (bzw. zu widerlegen), oder so lange nach den in der Mathematik anerkannten Regeln umzuformen, bis ein Beweis auf der Hand lag.

Klar, dass die Umgangssprache Äußerungen gestattet, für die eine „wahr"/ „falsch" – Bewertung einfach *unsinnig* sind. Das sind zum Beispiel *Fragen*, *Wünsche*, *Befehle*, *Ausrufe der Erstaunens* oder der *Befindlichkeit*, Äußerungen des *Glaubens* u.a.m. (Ein beliebter Scherz, den ich mir manchmal erlaube, ist, auf die Frage von jemand, wie viel Uhr es sei, mit „richtig" zu antworten.)

Es geht vielmehr hier um solche Äußerungen einer menschlichen Sprache, denen man überhaupt eine „Bewertung" wie „wahr" / „falsch" oder „vielleicht" / „möglich" / „machbar" / „unbestimmt" / „entscheidbar" / „nicht entscheidbar" usw... zuordnen möchte. Solche Äußerungen könnte man als „***Behauptungen***" bezeichnen. Ging es nun darum, die in der Mathematik übliche umgangssprachlich gehandhabte „Logik" auf Gebiete *am Rande oder außerhalb der Mathematik* anzuwenden, so erschien mir die Beschränkung auf eine 2-Wertigkeit unpassend, zum Beispiel in folgenden drei Fällen:

(a) Geht es darum, dass ein gewisser Sachverhalt **b** unter bestimmten Umständen nicht zutrifft, so ist „nicht-**b**" oft keine befriedigende „Alternative"; ja, man zweifelt ob „nicht-**b**" überhaupt als „Sachverhalt" zählen dürfe. Die Doppelte Verneinung „nicht nicht-**b**" gar als mit dem Sachverhalt **b** gleichwertig zu setzen (wie das ja in der klassischen mathematischen Logik üblich ist), entspricht sogar selten dem natürlichen Sprachgebrauch. Im Spanischen ist z.B. die Redewendung „*no tengo ni idea*" („ich habe nicht keine Ahnung") selbstverständlich eine stark betonte *Verneinung*. Im Deutschen ist

(i) „*es ist nicht unüblich <das-und-das zu tun>*"

keinesfalls gleichwertig mit

(ii) „*es ist üblich <das-und-das zu tun>*“,
sondern (i) ist so zu sagen eine „abgeschwächte“ Zustimmung für (ii).

(b) Bei Behauptungen, für die es (in der vorliegenden Situation) unmöglich schien, zu testen, ob sie zuträfen oder nicht, hatte ich das Bedürfnis, einen dritten Wert zuzuordnen, der *gerade darauf hinweist*, *dass* die Behauptung (zur Zeit) weder bewiesen noch widerlegt werden könne: dass sie also – zur Zeit oder vielleicht sogar grundsätzlich – weder als „wahr“ noch als „falsch“ bewertet werden könne; oder gar: dass eine eindeutige Beurteilung der Behauptung mit „wahr“ bzw. mit „falsch“ nicht nur nicht möglich ist, sondern sogar als unsinnig empfunden werden muss.
Dass für mache Kategorien von Behauptungen die sognannten „*Modallogiken*“ ein geeignetes Lösungskonzept darstellen, ist klar. Ich komme am Ende der Note eventuell auf die „*Temporallogik*“ als einer speziellen Modallogik zurück. Ich will mich aber hier mehr auf die Frage der „*Bewertbarkeit*“ konzentrieren.

(c) In der Datenverarbeitung, bei der aus einem Satz D von Daten durch ein geeignetes Programm ***p*** neue Daten E zu erzeugen sind, zum Beispiel

$D(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \;:\Rightarrow_{\boldsymbol{p}}\; E(e_1, e_2, e_3)$,

kommt es immer wieder vor, dass ein gewisses Datum d in D fehlt, oder aus einer Bitfolge besteht, die vom Programm ***p*** nicht „interpretiert“ werden kann. Zu Anfang der Datenverarbeitung war es üblich, das Programm ***p*** dann einfach abbrechen zu lassen und kein Ergebnis E anzugeben – im besten Fall statt E das Bewertungsergebnis „*false*“ oder „*syntax error*“. Das war sehr unbefriedigend, denn bei einer solchen Meldung, war nicht klar, ob ***p*** „falsch“ programmiert war, oder ob nur der spezielle Datensatz D inkonsistent oder unvollständig war.
Später wurden die Programme ***p*** „intelligenter“: Wenn ein d in D von ***p*** nicht interpretierbar war, gab das Programm ihm einen „*Default*-Wert“ π, gab eine Warnung bezüglich d aus und war so angelegt, dass es auch mit π (statt d) weiterrechnen konnte. Das Ergebnis E wurde ausgegeben, es wurden aber alle Teilergebnisse e_k, zu deren Berechnung d erforderlich gewesen wäre, in der Ausgabe markiert und mit einem entsprechenden Kommentar versehen. Das so berechnete Ergebnis E war nicht einfach „falsch“, sondern konnte in vielen Fällen trotzdem weiterverwendet werden. In der Regel verfügte das Programm nicht nur über *einen Default*-Wert π, sondern über einen ganzen Satz von *Default*-Werten $\pi_1, \pi_2, \ldots$.
In eine „Logik“ übersetzt, heißt das, dass auch in der Datenverarbeitung das Bedürfnis besteht, die „primitive“ logische 2er-Bewertung „wahr / falsch“ oder „erfolgreich / nicht erfolgreich“ oder „zulässig / unzulässig“ oder „1 / 0“ usw... intelligenter zu machen durch Einführung weiterer logischer Werte.

1.2.1 Mein zugrundeliegendes Sprachverständnis

Wenn ich neue Äußerungen höre oder selbst formuliere, muss ich, bevor ich sie mit „wahr“ oder „falsch“ oder mit irgend einem anderen „logischen Wert“ beurteilen könnte, die Äußerungen „***verstehen***“; das heißt für mich: sie in einen (mehr oder weniger genau greifbaren) „**Kontext**“ einordnen („klassifizieren“), sie unter sich bzw. mit schon akzeptierten / geläufigen Äußerungen „**vergleichen**“. Dabei stelle ich z.B. fest, dass eine Äußerung A eine andere Äußerung B inhaltlich „**umfasst**“ (verallgemeinert) bzw. B die Äußerung A inhaltlich „**einschränkt**“. Oder ich stelle fest, dass sowohl A die Äußerung B, als auch B die Äußerung A umfasst, dann kann ich beide

Äußerungen A, B als „**gleichwertig**" / „äquivalent" auffassen. Oder ich stelle z.B. fest, dass die Äußerungen A, B irgendwie inhaltlich „**unvergleichbar**" erscheinen, d.h., dass weder A das B umfasst noch B das A; und auch: dass weder A das B einschränkt noch B das A. Hierbei werden insbesondere die Verbindungswörtchen „**und**", sowie „**oder**" oft im folgenden Sinne benutzt:

„**oder**" hat als Verbindungswörtchen zwischen Äußerungen A, B die Funktion, dass die zusammengesetzte Äußerung „A **oder** B" die Äußerung A umfasst (verallgemeinert); genau so umfasst „A **oder** B" die Äußerung B.

„**und**" hat als Verbindungswörtchen zwischen Äußerungen A, B die Funktion, dass die zusammengesetzte Äußerung „A **und** B" die Äußerung A einschränkt; genau so schränkt „A **und** B" die Äußerung B ein.

Schreiben wir einmal kürzer:

$A \leq_K B$ für die Feststellung, dass in einem gewissen Kontext K die Äußerung A die Äußerung B **einschränke**, bzw. dass B die Äußerung A **umfasse** (verallgemeinere);

$A \cong_K B$ für die Feststellung, dass sowohl $A \leq_K B$ als auch $B \leq_K A$ der Fall sei; d.h. dass die Äußerungen A, B im Kontext K **gleichwertig** seien,

so können wir für beliebige Äußerungen A, B im Rahmen des Kontextes K feststellen:

„A **und** B" $\leq_K$ A $\leq_K$ „A **oder** B",   „A **und** B" $\leq_K$ B $\leq_K$ „A **oder** B",
auch dann, wenn A, B untereinander unvergleichbar sind.

Sind aber A, B vergleichbar, so bedeutet

$A \leq_K B$ dasselbe wie „A **und** B" $\cong_K$ A und dasselbe wie B $\cong_K$ „A **oder** B".

Schließlich fasst jeder eine zusammengesetzte Äußerung der Form „A **oder** A" bzw. „A **und** A" als redundant auf und interpretiert sie selbstverständlich als die einfachere Äußerung „A", denn man geht davon aus, dass jede Äußerung „zu sich selbst gleichwertig" sei.

Beispiel: Betrachten wir mal die Äußerungen

A := „*mein Automobil wird morgen grün lackiert*"
B := „*mein Automobil wird morgen lackiert*"
C := „*ich werde eine Tasse Tee trinken*".

Der „Kontext" K sei zum Beispiel einer, welcher die Schilderung meiner (derzeitigen) persönlichen Verhältnisse und Tätigkeiten zum Inhalt hat.

A, B sind offensichtlich vergleichbar: Die Äußerung, dass mein Automobil morgen lackiert werde, ist umfassender (allgemeiner) als die, dass mein Automobil morgen grün lackiert werde; also kann ich feststellen:

$A \leq_K B$, und damit auch „A **und** B" $\cong_K$ A , B $\cong_K$ „A **oder** B".

C hat offenbar nichts mit A, B zu tun. C erscheint also mit A und auch mit B unvergleichbar. Trotzdem mag es in einem gewissen Zusammenhang (einem „Subkontext" von K) einen Sinn haben, wenn ich A mit C durch „**und**" bzw. „**oder**" verbinde. Dann kann ich feststellen:

„A **und** C" $\leq_K$ A $\leq_K$ „A **oder** C",   „A **und** C" $\leq_K$ C $\leq_K$ „A **oder** C".

„A **und** C" ist z.B. eine Abkürzung für: „*während mein Auto morgen grün lackiert wird, werde ich eine Tasse Tee trinken*". „A **oder** C" ist etwa ein Auszug aus der (den Subkontext herstellenden) Äußerung: „*Morgen [sehe ich zu, wie] mein Auto grün lackiert wird,* ***oder*** *ich [gehe ins nahegelegene Restaurant und] trinke eine Tasse Tee*".

Schließlich würde jeder, der mich sagen hört: „*Morgen wird mein Auto lackiert* ***und*** *morgen wird mein Auto lackiert*", fragen: „Warum sagst du das zwei mal?"

All das ist noch **völlig unabhängig von einer „Beurteilung" der Äußerungen A, B, C**: Bei den oben beschriebenen Einordnungsvorgängen kommt es zunächst gar nicht darauf an, ob und in welchem Sinne die Äußerungen A, B, C „zuträfen" oder nicht (oder, wie man auch sagt, „wahr" oder „falsch" seien). Es geht erst mal lediglich um eine gewisse **Klassifizierung** zum Verständnis der Äußerungen.

Mathematiker oder Informatiker sind natürlich mit so einem sehr intuitiven Sprachverständnis nicht zufrieden. Sie wollen ein mathematisch oder auch programmtechnisch zuverlässiges **Schema** haben, das weitgehend unabhängig ist von einem (eventuell nicht genau umrissenen) inhaltlichen „Kontext" – derart jedoch, dass möglichst viele kontextabhängige Sachverhalte oder auch anwendungsbezogene Theorien auf das Schema „passen". So einen „passenden" Sachverhalt nennen sie dann ein „**Modell**" zum Schema.

1.2.2 Logik fällt nicht vom Himmel

Die Definition einer „Logik" kann nicht vom Himmel fallen. Wir brauchen dazu bereits einen (mathematischen oder – schwieriger! – einen außermathematischen) **Kontext**. Der Kontext dient auch dazu, die definierte Logik zu „deuten" und zu „testen", d.h. in ihm „**Modelle**" zu finden, auf welche die definierte Logik anwendbar ist. Jedenfalls ist zum Aufbau einer formalen Sprache und ihrer „Logik" eine sie beschreibende „**Metasprache**" und „**Metalogik**" erforderlich.

Als **Metasprache** benutzt man**:** Eine „mathematisierte Umgangssprache", eine Umgangssprache also, welche um die in der Mathematik gebräuchlichen Begriffe, Bezeichnungen und Sprechweisen angereichert ist, zum Beispiel um: *natürliche Zahl*en 1, 2, 3, ..., *Mengen*, *Abbildungen (Funktionen)*, *Relationen, insbes.: Halbordnung und Äquivalenz.* Kurz: die Begriffe *mathematischer Strukturen*.
Als **Metalogik** benutzt man**:** Die in der Mathematik gebräuchliche 2-wertige Logik.

Was mit den Mitteln dieser Metasprache definiert werden soll, nennt man auch eine „**Objektsprache**" bzw. eine „**Objektlogik**". Die formale Sprache **P**, die weiter unten definiert wird, ist in diesem Sinne eine Objektsprache; die danach definierte Logik **(P, B, γ)** ist eine Objektlogik.

Dass man in der Metasprache die 2-wertige Metalogik benutzt, mit deren Hilfe man nun andere Logiken – darunter wiederum eine 2-wert-Logik! – formal „definiert", mag nur demjenigen wie ein Trick von *Münchhausen* erscheinen[2], der die ***Sprachschichtungen*** nicht beachtet[3]. Allerdings ist die Unterscheidung von Objektsprache und der darüber liegenden Metasprache ohne Zuhilfenahme mathematischer Formalisierungen und Bezeichnungen (manchmal einfach – aber etwas unbedacht – als „Abkürzungen" gedeutet) nicht leicht – und sie ist in dem Maße sogar „künstlich" als

---

[2] Münchhausen zieht sich an seinen Haaren selbst aus einem Sumpf.

[3] Auf die Wichtigkeit der Unterscheidung von *Sprachschichtungen* hat besonders der polnische Mathematiker *Alfred Tarski* (1901-1983) hingewiesen. Beachtet man sie nicht, so entstehen „Paradoxien", „Antinomien" oder sog. „Zirkelschlüsse" oder sog. „unendliche Regresse".

die zu konstruierende Objektsprache „künstlich“ ist. Aber auch bei einer „natürlichen“ Objektsprache, deren Inhalt auf die *außersprachlichen* Phänomene unserer menschlichen Welt verweisen soll, hat die Trennung von Objekt- und Metasprache ihre Tücken – besonders dann, wenn die Objektsprache nicht nur von „äußeren materiellen Gegenständen“ (was das auch immer sei!), sondern von sogenannten „innermenschlich-psychischen“ oder gar von sogenannten „idealen Gegenständen“ (was das auch immer sei!) handelt.

Um die benutzte *Metasprache und Metalogik* selbst zu begründen, müsste man noch einmal „eine Stufe höher“ gehen und bräuchte dazu eine „Meta-Meta-Sprache“ und eine „Meta-Meta-Logik“. Müsste man die Stufungen *beliebig so „nach oben“ weiterführen?* – In künstlichen formalen Sprachen der Informatik (etwa XML) meint man mit 3 bis 4 Stufen auszukommen. Das kommt einfach daher, dass man als Objektsprache S1 nur ein wohlbegrenztes kleines Teilgebiet der natürlichen Sprache *formalisiert*. Die Regeln, nach denen das zu erfolgen hat, bilden die Metasprache S2 (ob ein Programm, das S1 kodiert, diese Regeln auch einhält, prüft ein „Compiler“). Diese wiederum muss selbst gewissen wohldefinierten Regeln folgen, die man in einer Meta-Metasprache S3 festlegt (ob der Metateil des Programms, welcher S2 kodiert, diese Regeln auch einhält, prüft ein „Compiler-Compiler“). (Der Entwurf für den Bau des „Compiler-Compilers“ würde dann eine Meta-Meta-Metasprache S4 erfordern.)
Auch in der Mathematik beschäftigt sich der Hauptteil der klassischen Logik mit der Präzisierung der Metasprache, mit welcher eine mathematische Objektsprache und Logik **(P, {0,1}, γ)** definiert worden ist.
Ob man aber eine *natürliche* Sprache als *ganze* mit einer ***endlichen*** Stufung erfassen kann, ist eine offene Streitfrage. [4] Das Bedürfnis nach *Sprachstufungen* entsteht jedenfalls erst, wenn man anfängt ein gewisses Wissensgebiet zu *formalisieren*. Ein solcher Formalisierungsversuch liegt auch in der vorliegenden Note vor.

➔ weiter in Teil 2

[4] Dass es bei den Sprachstufen für eine ***natürliche*** Sprache eine oberste Stufe gäbe, mit der man alle niedreren Stufen begründen könne, ist ein Gaube mancher Philosophen, den ich nicht teile. Auf so einer Ansicht beruhen zum Beispiel viele sogenannten (philosophischen, älteren) „**Ontologien**“. Das kommt einfach daher, dass man in einer Umgangssprache Unterscheidungen zwischen „Objektsprache“ und (sie beschreibenden) „Metasprache“ gar nicht ausmachen kann, weil schon die natürliche Objektsprache selbst „alles“ beschreibt, was für Menschen, die sie sprechen von Bedeutung ist. Andere Philosophen haben insofern recht, als sie behaupten, in ihrem Sprachgebrauch gäbe es keine „Meta-Ontologie“. Damit wollen sie nur zum Ausdruck geben, dass eine Unterscheidung zwischen „Objektsprache“ und der sie beschreibenden „Metasprache“ gar nicht den Bedeutungsgehalt wiedergibt, den sie meinen.