Dr. Christoph Lübbert
Viktoriastr. 36, 64293 Darmstadt
Tel.: 06151-422298
Em: christoph.luebbert@t-online.de
In: www.cl-diesunddas.de

Ontologiedefinition auf Basis von FBA

Version: V3.13, 13.10.2012

Abstract

This note is my reaction to the exhausting discussions in 2010-2012 within the "Ontology Workshop" of the Hochschule Darmstadt / Germany*. A widespread agreement on a **simple** – but far-reaching – **mathematical base structure** for a so-called "Ontology" which is necessary to develop programming methods that are more appropriate to the purpose than the conventional methods such as OOP, UML, ERM, RDS etc., seems to be unknown to the "ontology engineering" people in Informatics. My response is to offer with this note a simple mathematical base structure for the definition of "not too general" ontologies on the basis of* "**Formal Concept Analysis**" (FCA*). FCA already exists for more than two decades and was mainly developed at the Technical University of* Darmstadt *by* **B. Ganter** *and* **R. Wille***. FCA seems to be practically unknown to most of the informatics people who deal with ontology definitions and their realisations. The main difference between my attempt and that of conventional ontology definitions is that I do not start with "concepts" but with a set* $\boldsymbol{REL_0}$ *of binary, so-called "practically relevant relations" on an open set of so-called "instances".* REL_0 *determines the whole ontology. Hence, "concepts", "taxonomy", "attributes" become derived ontology components where "attributes" are handled in the same way as "concepts". With the FCA attempt, all components that are relevant in conventional ontology definitions, can be reconstructed, but become "processable units" in the program-technical sense that they are not only "described" in form of* `strings` *but are connected to each other in a mathematically defined way using so-called "Galois Connections" and "Complete Lattices". Moreover – an important aspect: When the FCA-based ontology needs to be extended (an inevitable "everyday" process during development, realisation & maintenance) the "deltas" of all ontology components can be simply identified. With conventional attempts however, most of the relevant components (such as "concepts", "taxonomy", "relations") remain in a "non-processable air" and their construction mostly depends on intuitive "ontological" ideas, oriented towards antique and medieval philosophy; and the important issue of a clear, flexible, and simple extensibility guideline is not mathematically defined.*

Inhalt

1 Vorbemerkung und Zielsetzung....4

2 Vorspann....5

2.1 Philosophisch-informatischer Vorspann 5
2.1.1 „Substanzdenken“....6
2.1.2 Begriffe entstehen durch das In-Beziehung-Setzen 7
2.1.3 Anmerkung zu „Symmetrie / Unsymmetrie“....8

2.2 Mathematischer Vorspann 8
2.2.1 Anmerkung zu „Menge“, „Potenzmenge“ und „Paarmenge“....9
2.2.2 Mathematischer Sprachgebrauch für Relationen auf Mengen 10
2.2.3 Halbordnungen....10
2.2.4 Vollständige Verbände....12
2.2.5 Formale Begriffsanalyse (FBA)....13
2.2.5.1 f-Kontext....13
2.2.5.2 f-Begriff und f-Begriffsverband 14
2.2.5.3 Weitere Verbände zu einem f-Kontext (G, M, r)....20
2.2.5.4 Die Hauptarbeit bei der Anwendung des Konzepts „f-Kontext“ 24
2.2.5.5 Anmerkung zu einer etwas „aufgeweichteren“ Begriffsdefinition....26

3 Eine O-Definition auf FBA-Basis....27

3.1 Die Hauptkomponenten der O-Definition....27

3.2 Details zur O-Definition auf FBA-Basis....29
3.2.1 Die IN-Relationenmenge REL und ihre Halbordnung....29
3.2.1.1 Die natürliche Halbordnung auf der IN-Relationenmenge REL 29
3.2.1.2 Eine Vereinbarung über die Kontexte 30
3.2.1.3 Ein Beispiel für REL_0 und REL....31
3.2.2 Die F-Begriffsmenge F(REL) der Ontologie und ihre Halbordnung....33
3.2.3 Der F-Compound-Kontext der Ontologie 37
3.2.4 „Begriffsstufen“ für F-Begriffe....40
3.2.4.1 Alternativen zum F-Compound-Kontext....42
3.2.4.2 Zusammenfassung....43

3.3 Die IN-Begriffsmenge der Ontologie und ihre Halbordnung....43
3.3.1 IN-Begriff....43
3.3.2 Die Umfangs- und Inhaltsmenge der IN-Begriffsmenge C(REL)....44
3.3.3 Die Halbordnung („Taxonomie“) auf der IN-Begriffsmenge....46
3.3.4 Die Menge der C-Relationen und ihre Halbordnung....47
3.3.5 Der C-Compound-Kontext der Ontologie....48
3.3.6 „Begriffsstufen“ von IN-Begriffen....52
3.3.6.1 Alternativen zum C-Compound-Kontext....53
3.3.6.2 Zusammenfassung....55
3.3.7 Zur Erweiterbarkeit einer Ontologie auf FBA-Basis 56
3.3.8 Anmerkung zur sogenannten „Instanziierung“....58
3.3.9 Anmerkung zu „mehrwertigen“ Kontexten 58
3.3.10 Ein Bezug zur „Vererbung“ in der objektorientierten Programmierung 59

3.4 Die Userschnittstelle der Ontologie 59
3.4.1 Die Userschnittstelle für die Begriffsnamen....60
3.4.2 Die „pädagogische Aufgabe“ des O-Systems an den Userschnittstellen....61

4 Zurückführung der O-Definitionen in [2] und [12] auf FBA 61

4.1 Zurückführung der O-Definition in [2] auf FBA....62
4.1.1 Das Zitat aus [2]....62
4.1.2 Zusammenfassendes vorab....62

4.1.3 Zur Menge $A_{[2]}$ der sog. „Axiome“ 62
4.1.4 Zu $L_{[2]}$, $LC_{[2]}$ und $LR_{[2]}$, sowie $F_{[2]}$ und $G_{[2]}$ 63
4.1.5 Zu $C_{[2]}$ 63
4.1.6 Zu $R_{[2]}$ 64
4.1.7 Zur „Taxonomie“ $H_{[2]}$ 64

4.2 Zurückführung der O-Definitionen in [12] auf FBA 65
4.2.1 Die Zitate aus [12] 65
4.2.2 Zusammenfassendes vorab 65
4.2.3 Zum Zitat-1 66
4.2.4 Zum Zitat-2 67

4.3 Vergleichstabelle [2] / [12] / FBA 69

5 Schlussbemerkung 70

6 Literatur 72

7 Versionskontrolle 74

1 Vorbemerkung und Zielsetzung

Es gibt seit Jahren viele verbale Definitionen von dem, was eine „Ontologie“ in der Informatik sein könnte. – Das gehört zum üblichen Einigungsprozess für die Etablierung einer neuen Teildisziplin in der IT. – Aber ein einfaches und einwandfreies mathematisches Konzept, das ja die *formale Basis zur Implementierung* einer Ontologie sein müsste, habe ich bislang nicht gefunden.

Seit Anfang 2011 bin ich beim „Ontologie-Arbeitskreis“ der Hochschule Darmstadt („h_da“) und habe dort auch bei der Abfassung des gemeinsamen Artikels [4] *„Was ist eigentlich Ontologie“* mitgemacht. Dabei sind mir zwei „mathematisch aussehende“ Ontologie-Definitionen in den folgenden Arbeiten aufgefallen:

[2] ***G.Pickert*** – „Einführung in Ontologien“, Humbold-Universität Berlin, Feb. 2011 und

[12] ***Maedche/Zacharias*** – „Clustering Ontology-based Metadata in the Semantic Web“. Universität Karlsruhe, Research Group WIM, 2002/2003.

Ich habe sie in ein paar tastend vorbereitenden Noten ([5], [10], [11], [15], Dez.2011-Jan.2012) untersucht und war damit *nicht recht zufrieden*, denn die vorgefundenen Arbeiten enthielten aus meiner Sicht (mathematisch gesehen) einige Ungereimtheiten und Unsymmetrien:

In [2] und [12] fehlt mir eine einfache mathematische Grundlage – insbesondere ein Grundkonzept dafür, was ein „Begriff“ sein soll. Der Terminus „Begriff“ muss einerseits *formalisiert* werden, damit er eine ***prozessierbare*** Ontologie-Komponente wird, andererseits sollte er sich nicht auf den aus der **OOP** (Objektorientierte Programmierung) kommenden technischen Terminus „Klasse“ reduzieren!

Daher möchte ich hier eine mathematische Ontologie-Definition auf Basis der **Formalen Begriffsanalyse** [1] (**FBA – *Ganter / Wille***, 1996) vorstellen.

Ziel ist es zunächst, mit meiner Definition möglichst wenig abzuweichen von der ***Intention***, die in den O-Definitionen von [2] *(G. Pickert)* und [12] *(Maedche / Zacharias)* steckt. Die Intention ist folgende:

Für ein bereits etabliertes (objektiviertes) **Wissensgebiet** will eine (informatische) „**Ontologie**“ ein System von vereinheitlichten **Begriffen** und Unterbegriffen aufbauen und diese mit gewissen (binären) **Relationen** verknüpfen. Informatiker nennen das ein „**Ontologie-Schema**“.

Die sogenannte „**Instanziierung**“, soll dann das O-Schema „füllen“, indem „Begriffe“ durch „Einzeldinge“ ersetzt werden.

So soll, *computer-realisiert*, konkrete – und etwas intelligentere Wissensvermittlung als nur „Google“ – über das Wissensgebiet ermöglicht werden und zwar

- sowohl an der Schnittstelle „Computer – Computer“
- als auch an der Schnittstelle „Mensch – Computer“.

[die „Schnittstelle“ Mensch – Mensch erwähne ich nicht; dazu bedarf es m.E. keiner „Ontologie“!]

Andererseits eröffnet das **FBA-Konzept** aber – ausgehend von der einfachen (und auch philosophisch vernünftigen) Definition von dem, was ein **„formaler Begriff“** sei – eine

Vielfalt von Möglichkeiten, die in den mir bekannten O-Definitionen nicht zu finden sind.

In dieser Note werde ich jedenfalls aufzeigen [Kap.4], *dass die O-Definitionen aus [2] und [12]* ***voll auf die hier vorzustellende, FBA-basierte O-Definition zurückgeführt werden können, wobei „Unsymmetrien" beseitigt werden.***

Eine Zukunftsvision wäre dann, ganz neu übereinzukommen, was – mathematisch gesehen – eine einfache Basisdefinition für eine *„nicht zu allgemeine* ***Ontologie****"* sein müsste, die dann – ebenfalls mit FBA-Hilfsmitteln – in wohldefinierter Weise nach anwendungsbezogenen Kriterien verfeinert werden könnte. Dabei wird sich vermutlich auch herausstellen, dass die zur Realisierung einer „Ontologie" bisher verwendeten Entwurfskonzepte und vorhandenen Programmiersprachen unzureichend sind und überarbeitet werden müssen. Die vorliegende Note ist ein Vorschlag für eine mathematische Basisdefinition.

Auch die hier vorgelegte Note ist zunächst eine noch sehr „mathematische" Herangehensweise. Sie geht weder besonders auf die praktischen Überlegungen in [2] noch auf das spezielle Anliegen in [12] (*„Clustering ..."* – Definition von Ähnlichkeitsmaßen für Begriffe u.ä. – siehe aber Fußnote [24]) ein.

Ich bin aber der Überzeugung, dass ein Ontologie-Konzept eine einwandfreie und möglichst ***einfache mathematische Basisdefinition*** im Hintergrund haben muss.

Erst wenn dieser Hintergrund etabliert und akzeptiert ist, hat man eine Grundlage, den ***„Kampf mit der Umgangssprache"*** aufzunehmen und bei der Realisierung einer Ontologie von der mathematischen Definition aus praktischen Gründen ggf. *abzuweichen*.

Das aber ist dann in wohldefinierter Weise möglich; und wenn es zu Sprachschwierigkeiten kommt, kann man stets testen, was modifiziert werden muss:
– die mathematische Verfeinerung der Basisdefinition
oder
– die praxisbedingten Abweichungen.

Auch in dieser Note mache ich einige Anmerkungen, welche an die Philosophen in unserem Ontologie-Arbeitskreis / TUD + h_da (Darmstadt) gerichtet sind (meist im „Kleingedruckten"). Auch wenn ihnen mathematische Formeln zuwider sind, hoffe ich, dass sie aus den textlichen Anmerkungen meine Position gegenüber der „philosophischen (westlichen) Ontologie" herauslesen können.

2 Vorspann

2.1 Philosophisch-informatischer Vorspann

Die Standardisierung von dem, was eine (informatische) „Ontologie" heißen soll, wird *dieselben evolutionären Schritte* durchlaufen müssen, wie sie der „Stoff" durchlaufen hat und weiterhin durchläuft, den eine Ontologie zwecks Begriffsvereinheitlichung, Wiederverwendung und Weiterentwicklung eines „**objektivierten**" (d.h. nicht nur von ein paar Einzelmenschen, sondern von einer ganzen Gesellschaft oder Kultur akzeptierten) **Wissensgebietes** bereitstellen will. Das ist – nach derzeitigem Stand – erst einmal nur mit geeigneten **Sprachmitteln** zu schaffen (die natürlich bei fortschreitender Entwicklung auch durch Hilfsmittel aus anderen, etwa audio-visuellen, Medien unterstützt werden können). Dabei sehe ich folgende Phasen:

(a) *Ausgangspunkt* ist dabei eine *natürliche Sprache*.

(b) *Präzisierung* für ein bestimmtes objektiviertes Wissensgebiet erfolgt durch *Fachsprachen*.

(c) *Automatisierung* der Archivierung, des Ausbaus, der Weiterverarbeitung, der Verbreitung und der Bereitstellung erfolgt schließlich mit Hilfe von „*Kunstsprachen*“ der IT und den damit zu erstellenden Systemen. Mit dem Schritt (c) beschäftigt sich das sogenannte *ontology engineering.* Mit der Standardisierung im *ontology engineering* ist man noch ziemlich am Anfang, auch wenn technische Einzelmethoden, wie z.B. die OOP (*Objektorientierte Programmierung)* und die UML (*Unified Modeling Language*) schon seit über 20 Jahren etabliert sind.

(d) Schließlich muss bei der Weiterverbreitung und Wiederverwendung eines Wissensgebietes stets wieder Bezug zur *natürlichen Sprache* bzw. zu der *Fachsprache* des Wissensgebietes genommen werden. Fehlt dieser Bezug – ich nenne ihn die „***Userschnittstelle***“ –, so wird das erstellte Ontologie-System ***erstarren und aussterben***, so „intelligent“ es auch gewesen sein mag.

Bemerkenswerterweise meinen einige an „Ontologie“ interessierte Informatiker, sie könnten, was gewisse Grundkonzepte anbelangt, Anleihen bei den Philosophen machen, weil die ein Teilgebiet der Metaphysik haben, das sich seit ca. 330 Jahren ebenfalls mit dem Namen „Ontologie“ [„die Lehre vom Sein“ – griech.: „το ον“] schmückt.

Solche Anleihen sind in der Tat zu spüren. *Aber es sind meist Anleihen aus einer Zeit, die* ***<u>vor</u>*** *den großen Paradigmenwechseln des 20.Jh. liegt*, in welche die Informatik und die IT hineingeboren wurden.

2.1.1 „Substanzdenken“

Alle klassischen (philosophischen) Ontologen des Westens – egal ob „realistisch“ oder „idealistisch“ orientiert – waren beherrscht von einer Grundhaltung, die man „***Substanzdenken***“ nennen könnte: D.i. die Suche nach *„Bleibendem / Beharrendem / für sich selbst Stehendem / von anderem Unabhängigem“* hinter den Erscheinungen*.*

Das „Substanzdenken“ verführte dazu, in Subjekt und Prädikat sprachlicher Sätze in erster Linie auf die ***Substantiva***, erst in zweiter Linie auf die *Adjektiva* und nur nebenbei auf die verbindenden ***Verben*** zu schauen. Es bildete sich sogar eine *„Sprachontologisierung“* heraus, bei der man so gut wie alle Sprachelemente **„*versubstantivierte*“**.

(„gut“→ „die Güte“, „rot“→ „die Röte“, „schnell“→ „die Schnelligkeit“; „was“→ „die Washeit“; „ist enthalten“→ „das Enthaltensein“; „zwei“ → „die Zweiheit“ -- und schließlich: „ist“→ „das Sein“ / „Seiendes“.)

Das führte dazu, „die Welt“ wie eine Ansammlung von „Backsteinen“ aufzufassen.

Völlig aus den Augen verlor man dabei die Funktion der **Verben**, als diejenigen Sprachelemente, die noch am besten auf eine **Beziehung** / einen **Zusammenhang** hindeuten.
Statt dessen beschränkte man sich auf das Hilfsverb „ist“ („sein“), versubstantivierte auch dieses und meinte im sog. „**Sein**“ den Inbegriff von „Substanz“ gefunden zu haben. Dass das Hilfsverb „ist“ im üblichen Sprachgebrauch neben anderen Funktionen (und im Gegensatz zu den meisten anderen Verben) als ein Ersatz für eine selbst noch ziemlich *unspezifische* ***Beziehung*** zwischen dem sog. „Subjekt“ und dem sog. „Prädikat“ benutzt wird, nahm der klassische philosophische Ontologe nur „nebenbei“ wahr.

Vom uralten „Substanzdenken“ sind auch alle mir bekannten Ontologie-Definitionen der *Informatiker* beeinflusst: Im Vordergrund stehen „***Substanzen***“, die man in der Sprache der Informatiker als „**Instanzen**“ bezeichnet, sie als „Dinge“ / „Entitäten“ /

„Individuen“ – allgemein: „Seiendes“ – interpretiert und in der Abstraktion als die sogenannten „**Begriffe**“ in den Vordergrund der Untersuchung stellt. Natürlich hat man erkannt, dass mit „Begriffen“ *allein* kein vernünftiger Ausschnitt menschlicher Realität erfassbar sei, sondern dass man sie „verknüpfen“ müsse. Aber das Verknüpfen stand – und da kommt das alte „*Substanzdenken*“ wieder hervor – nicht im Vordergrund, sondern wurde nur als eine Art Hilfsmittel hinzugezogen und selbst weniger als „die Realität beschreibend“ aufgefasst, als es angeblich „Begriffe“ tun. Zusätzlich hat der mittelalterliche Universalienstreit in später Nachwirkung dazu beigetragen, dass man sich bei „Begriffen“ vorrangig Zusammenfassungen von „materiellen Dingen“ vorstellte, und sie abhob von deren „Attributen“ bzw. von dem, was man mit den „Dingen“ anstellen kann (letzteres formalisierte man in der OOP schließlich in den sogenannten „Methoden“); und beides [Attribute und Methoden] ***hängte man*** *unglücklicherweise* ***den „Dingen“ an.***[1]

Daraus entstanden schließlich Ende der 1970-er Jahre die Konzepte und ersten Programmiersprachen „objektorientierter Programmierung“ (**OOP**) – *ein spätes Kind der archaischen Mutter namens „**Substanzdenken**“*.

In der **OOP** geht man von einer Hierarchie von „Objektklassen“ aus und hängt an jede Klasse ein paar „Attribute“ und „Methoden“, die nach unten „vererbt“ werden können. Je weiter nach unten man in der Hierarchie geht, desto mehr „Attribute“ und „Methoden“ werden einer Klasse (zusätzlich zu den von oben „vererbten“) angehängt.

2.1.2 Begriffe entstehen durch das In-Beziehung-Setzen

„Dinge“ charakterisiert man (der Mensch) durch sog. „Eigenschaften“; dual dazu charakterisiert man „Eigenschaften“ durch gewisse „Dinge“, denen man sie zuordnet. – Könnte man eine beliebige Menge von „Dingen“ (oder auch von „Eigenschaften“) benennen und von dieser Namensmenge sagen, sie bilde einen „Begriff“? – ***Das kann nicht gemeint sein.*** „Dinge“ und „Eigenschaften“ werden vielmehr „zusammen“ erlebt, aber nicht etwa, weil angeblich Dinge Eigenschaften „besitzen“, sondern weil sie ***beide*** vom menschlichen Bewusstsein als gewisse Empfindungs- oder Denkeinhei-

---

[1] „*Unglücklich*“ nenne ich den Vorgang, dass man menschliche Perzeption „den Dingen anhing“, deshalb, weil man zugleich das „Dinge“-Konzept als etwas vom menschlichen Bewusstsein Unabhängiges ansah. Damit entstand das Dilemma, dass etwas Bewusstseins**un**abhängiges bewusstseins**ab**hängige Eigenschaften „haben“ sollte – **ein Widerspruch in sich**. – ***Er löst sich sofort auf, wenn man das ganze „Ding-/ Eigenschaft“-Konzept selbst als menschliches Bewusstseinskonstrukt auffasst.*** Das aber wurde durch das traditionelle Substanzdenken lange verhindert. Man kam statt dessen auf den „faulen Kompromiss“, Dingen „wesentliche“ und „unwesentliche“ Eigenschaften zuzuordnen: Die „wesentlichen“ sollten angeblich von den *Dingen* „gehabt“ sein, die „unwesentlichen“ sollten ihnen kultur- und situationsbedingt und zeitlich wechselnd „hinzuempfunden“ / „hinzugedacht“ sein. Damit zementierte man den o.a. Widerspruch in sich. Selbst noch der große Phänomenologe *Edmund Husserl* hat sich mit diesem Dilemma herumgeschlagen und hat seine zweifelhafte „*Wesensschau* “ damit entwickelt, anstatt sich – wie ebenfalls aus einigen seiner Schriften herauszulesen ist – klipp und klar dafür zu entscheiden, dass ***das ganze „Ding- / Eigenschaft“-Konzept selbst ausschließlich ein sprachbedingtes menschliches Konstrukt ist, mit dem (westliche) Menschen halt nun mal „die Welt“ wahrnehmen:*** Es ist nun mal eine Eigenart des (westlichen) Menschen, seine Umwelt in Form von „Dingen und Eigenschaften“ zu erleben und entsprechend mit ihr umzugehen. Sein Schüler *Roman Ingarden* hat diese *Husserl*-sche Entwicklung zwar kritisiert, ist aber dabei in eine andere Richtung geraten: *Ingarden* ist mit seiner Kritik, die völlig vom archaischen westlichen *Substanzdenken* beherrscht war, ins Mittelalter und gar in die westliche Antike zurückgefallen (ohne übrigens im Mindesten eine Ahnung davon gehabt zu haben über menschliche Perzeption in anderen Kulturen!), und hat offenbar die fruchtbaren Ansätze seines Lehrers *Husserl* nicht verstanden / nicht akzeptiert. *Ingarden* hat in seiner Hauptschrift *„Der Streit um die Existenz der Welt“* [19] (das war eigentlich ein Streit mit *Husserl,* aber mit *Husserl*-scher Begrifflichkeit geführt) besonders den „faulen Kompromiss“ (s.o.) der Unterscheidung zwischen „wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften“ an seinen „Gegenständlichkeiten“ strapaziert aber nirgends in seinem 3-bändigen Werk verständlich gemacht hat, was er mit „wesentlich“ eigentlich meinte. Die großen Paradigmenwechsel des 20. Jh. sind spurlos an ihm vorbei gegangen – vgl. meine Abhandlungen [20], [21], [22].

ten kultur- und situationsbedingt *zusammen konstituiert* werden – so ist der (westliche) Mensch nun mal veranlagt.

Die jeweilige Situation – der ***KONTEXT***, wie ich es nennen möchte – erzeugt gewisse „Kriterien" / „Bedingungen", von denen sich eine Gesellschaft (oft vorbewusst oder indirekt) leiten lässt, und durch welche man „Dinge" mit „Eigenschaften" zusammenbringt. *Erst mit diesem Prozess des „Zusammenbringens" wird ein* ***„Begriff"*** *gebildet – nicht nur einer, sondern meist mehrere zugleich.*

Philosophische Ontologen haben – behindert durch das „Substanzdenken" – erst relativ ***spät*** (ca. Ende des 19. Jh.) einen Terminus für diesen Prozess des „Zusammenbringens" erfunden: Sie haben das einen „**Sachverhalt"** (engl.: *state of affairs*, vgl.[26]) genannt.

Ein „Begriff" ist *für sich genommen* sinnlos, wenn man den ***KONTEXT*** und die Art des ***Zusammenbringens*** von „Dingen" und „Eigenschaften" nicht damit verbinden will. Daher lautet meine Position:

„ERST die Zusammenhänge und Kontexte, DANN die Begriffe – und nicht umgekehrt".

Die Mathematiker haben nun ein dafür recht nützliches, weil einfaches, Strukturierungsinstrument in ihrer Sprache, mit der sie solches „Zusammenbringen" ***formalisieren*** können: Das sind die sog. binären „**Relationen**" (Mengen von ***Paaren***). Unser mathematisches Konzept geht davon aus, dass man zwar von einer „offenen" Grundmenge „**IN**" ausgeht, die man, wenn man will, als „Instanzen(namen)", also ontologisch gesprochen als Namen für „Substanzen", deuten kann. Die Variablen von **IN** würden aber nutzlos und völlig in der Luft hängen bleiben, wenn man nicht zugleich von einer Menge „$\mathbf{REL_0}$" von **Relationen** ausgeht, die sie verbinden. Daraus erst entwickeln wir, was für uns „Begriffe" sein sollen. Und damit, so bin ich überzeugt, formalisieren wir ein Wissensgebiet und damit einen Ausschnitt unserer „Wirklichkeit" (--- kommt von „wirken" und nicht von „sein"! ---) in menschlichen Kontexten viel realistischer, als wenn wir von „Begriffen" ausgehen würden.

2.1.3 Anmerkung zu „Symmetrie / Unsymmetrie"

Bei der Analyse informatischer O-Definitionen habe ich zuweilen gewisse „Unsymmetrien" kritisiert. Freunde aus der Informatik entgegneten mir, das beruhe ja wohl nur auf gewissen „ästhetischen" Vorstellungen, die vielleicht in der reinen Mathematik angebracht seien, aber in der Informatik weniger eine Rolle spielten, weil eine „Ontologie" für die praktische Anwendung und nicht für ein schönes mathematisches Modell zu entwickeln sei.

Mit „reiner Ästhetik" hat meine Kritik nichts zu tun (Symmetrie/Unsymmetrie spielt da natürlich auch eine Rolle), sondern mit der Überzeugung, dass Unsymmetrien, die man in einer Struktur entdeckt, sehr oft auf Schwierigkeiten hindeuten können, die sich erst später, in einer Anwendung / Realisierung bemerkbar machen. (Das ist jedenfalls die 20-jährige Erfahrung eines Mathematikers bei seinem Einsatz in einem profitorientierten Software-Haus.)

Berühmtes Beispiel: *Albert Einstein* hat bei der Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie und besonders des partiellen, nichtlinearen Differentialgleichungssystems der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht nur auf physikalische Fakten geachtet, sondern hat sich ganz wesentlich von *Symmetriebetrachtungen* leiten lassen, die aus den damals bekannten Fakten der Physik nicht ohne weiteres ersichtlich waren. Resultat: Seine hochsymmetrische Theorie, die zu ihrer Entstehungszeit vielen Physikern als total abwegig erschien, hat sich bei der Untersuchung des Makrokosmos bis heute bewährt.

2.2 Mathematischer Vorspann

Anmerkung: Dieses Kap. ist eher an Informatiker gerichtet, die mit dem Sprachgebrauch der Mathematiker nicht voll vertraut sind. Mathematiker, denen dieser Vorspann zu langweilig ist, mögen gleich in Kap.3 weiterlesen.

Meine O-Definition benutzt die mathematischen Grundkonzepte „**Menge**", sowie „**Element**" einer Menge und „**Teilmenge**" einer Menge, „**Potenzmenge**", „**Paarmenge**" und „**Abbil-**

dung“ einer Menge in eine andere. Alle anderen Konzepte sind daraus abgeleitet. Zwei wichtige abgeleitete Strukturen sind die sog. „**Halbordnung**“ und der sog. „**vollständige Verband**“; letzterer ist eine Halbordnung (V, ≤), bei der zu jeder Teilmenge T⊆V das „*Supremum*“ (kleinste obere Schranke) und das „*Infimum*“ (größte untere Schranke) stets ein Element in V ist.

Hinweis: Alle hier betrachteten **Mengen** werden als ***endlich*** vorausgesetzt
(denn in der Praxis spielen „unendliche“ Mengen keine Rolle, sondern höchstens „potenziell unendliche“ Mengen; d.s. endliche Mengen, die bei Bedarf um neue Elemente erweitert werden können, wobei aber der ***Name*** der Menge beibehalten wird. Ich nenne solche Mengen auch „offen“)**.**

2.2.1 Anmerkung zu „Menge“, „Potenzmenge“ und „Paarmenge“

Die meisten „philosophischen Probleme“ *sind gar keine*, sondern sie sind *Sprachprobleme* und kommen daher, dass man sich *„unangemessen ausdrückt“* und dabei „*Default*-Annahmen“ aus dem Auge verliert.

Zuerst wollen wir auf eine triviale mathematische Regel hinweisen, die beim „naiven“ Umgang mit Mengen – und besonders in der FBA (der Formalen Begriffsanalyse) – grundlegend ist, auf deren Einhaltung aber, wie ich festgestellt habe, in manchen „mathematisch aussehenden“ Veröffentlichungen der Informatiker (z.B. in [2], [29]) nicht immer streng geachtet wird:

Die Elementbeziehung „∈“ ist stets wohl zu unterscheiden von der Teilmengenbeziehung „⊆“.

Ist M eine endliche Menge {a, b, c,...}, so schreibt man für die Aussage, dass a Element von M sei: „a∈M“, und für die Aussage, dass T:= {a,c} eine Teilmenge von M sei: „T⊆M“. Die „*Potenzmenge*“ von M ist die Menge aller Teilmengen von M; wir bezeichnen sie mit „Pot(M)“. Informatiker bezeichnen sie manchmal mit „2^M “, weil sie $2^{|M|}$ Elemente hat, wobei |M| die Anzahl der Elemente von M ist. Ist T eine Teilmenge von M, so gilt also
T⊆M, aber T∈Pot(M).
Neben „∈“ und „⊆“ ist die Mengenproduktbildung „×“ ein weiteres wichtiges Notationselement in der Mathematik: Sind G, M Mengen, so heißt G×M := {(x,y)| x∈G, y∈M} die daraus gebildete „Paarmenge“ (oder das kartesische Produkt), wobei G×M von M×G zu unterscheiden ist. Ein *Paar* (x,y) darf man nie mit der *Menge* {x,y} verwechseln, denn (x,y) ist was anderes als (y,x), aber {x,y} ist dasselbe wie {y,x}. Bei Mengen G, M ist ferner G×M von (G,M) zu unterscheiden: G×M ist eine *Paarmenge*, (G,M) aber ist ein *Mengenpaar*. Auch die Verwechslung von „Paarmenge“ und „Mengenpaar“ ist mir bei Veröffentlichungen von Informatikern manchmal aufgefallen (z.B. in [12]).
Bei *Mengenpaaren* / *Paarmengen* muss man etwas aufpassen: Wenn X⊆G, Y⊆M, dann ist X×Y⊆G×M bzw. X×Y∈Pot(G×M) aber (X,Y)∈Pot(G)×Pot(M).

Verbindet man mit abstrakten „Objekten“ a, b, c, ... schon eine gewisse intuitive ***Vorstellung*** („Dinge“ oder auch „Merkmale“ einer gewissen Kategorie), so führt es zu *Durcheinander*, ohne Kommentar Mengen daraus zu bilden, die als Elemente *sowohl* die a, b, c,... *als auch* Teilmengen, etwa {a}, {a,c}, enthalten. Das hat weniger mit der mathematischen Element- / Mengennotation zu tun als vielmehr mit den sehr diversen ***Vorstellungen,*** welche beim Gebrauch der Worte ***„Teil“ / „Ganzes“*** in der Umgangssprache ausgedrückt werden.
Philosophische Ontologen sind sich dieses Durcheinanders beim Umgang mit ihren „Backsteinen“ („Dinge“, „Eigenschaften“, „Kategorien“, ...), von denen sie meinten, sie „machten die Welt aus“, erst ziemlich spät bewusst geworden. Daraus ist Anfang-Mitte des 20. Jh. ein Zweig der Ontologie entstanden, den man „**Mereologie**“ („Teil-Ganzes-Beziehungen“, von griech.: μερος = „Teil“) nennt. *Edmund Husserl* hat sich in [18] – seinen „*Logischen Untersuchungen 2*“, 1901 – ausführlich damit beschäftigt, bevor noch das Wort „Mereologie“ richtig in Mode kam. Das Thema selbst ist allerdings schon viel älter und hatte früher nur keinen eigenen Namen. Einen Überblick über „**Mereologie**“ gibt [25], Anmerkungen dazu findet man auch in [29]. [2]

---

[2] „**Mereologie**“ ist für mein Empfinden eine ***ziemlich unnötige und nachhinkende Parallelentwicklung*** für das, was Mathematiker in der Mengenlehre (Mengen / Potenzmengen / Mengenprodukte), sowie der Theorie der Halbordnungen, der Verbände (und schließlich auch der Topologie) im Verlauf der ersten beiden Drittel des 20.Jhs. ***längst geklärt haben.*** „Mereologie“ ist der Versuch, den „*Kampf mit der Umgangssprache*“ mit „naiven“ (d.h. der Umgangssprache selbst entnommenen) Mitteln aufnehmen zu wollen. Aber davon ist in den Einführungen in die Mereologie nur unzureichend die Rede: sie sind zu „ontologisch“ und mit altertümlichen Denkweisen überfrachtet. Man macht z.B. *keinen hinreichend befriedigenden Unterschied zwischen Sprach-Struktur und Sprach-Deutung*. Außerdem werden in völlig unwissenschaftlicher Weise die unterschiedlichsten mereologischen „Axiome“ A „*kontrovers“* diskutiert, ohne dass man „Struktur“ und „Deutung“ trennt und – schlimmer noch – ohne dass man klärt, dass die „Kontroverse“ – etwa ***B*** gegen ***C*** – nur deshalb auftaucht, weil A zwar sowohl von ***B*** als auch von ***C*** akzeptiert wird, aber hinter den Vorstellungen von ***B*** bzw. von ***C*** *unterschiedliche Strukturen* stecken, und deshalb auch zu unterschiedlichen Deutungen führen. (Meist handelt es sich bei solchen „Kontroversen“ zwischen ***B*** und ***C*** schlicht um die Betrachtung unterschiedlicher Halbordnungen (M,≤), (M’,≤’), wobei die Kontrahenten vergessen

2.2.2 Mathematischer Sprachgebrauch für Relationen auf Mengen

„`Darmstadt` *ist eine Großstadt von* `Hessen`“ ist eine Aussage der Form **r**(x,y), die `Darmstadt` in Beziehung zu `Hessen` setzt. Der Sprachteil, der das tut, ist

r := „...*ist eine Großstadt von*...“.

Mit dem Sprachteil **r** kann man noch andere Städte a mit anderen Ländern b in Beziehung setzen und prüfen, ob die Aussage **r**(a,b) := „a *ist eine Großstadt von* b“ stimmt oder nicht. Der Sprachteil **r** heißt für Mathematiker aber erst dann eine „**binäre Relation**“ („2-stellige Relation“), wenn vereinbart ist, aus welcher **„Gegenstandsmenge“ G** die Städte x (wie z.B. `Darmstadt`) und aus welcher **„Merkmalsmenge“ M** die Länder y (wie z.B. `Hessen`) genommen werden sollen. Die *Aussageform* **r**(x,y) – man schreibt dafür auch „x**r**y“ – kann man dann als die Abbildung

r: $G \times M \rightarrow$ {true, false}

auffassen. Das ist die ***intensionale*** Auffassung von dem, was eine binäre Relation genannt wird.

Nimmt man andererseits die Menge aller Paare $(x,y) \in G \times M$, für welche **r**(x,y)= true ist, so wird in der Mathematik meist auch diese *Paarmenge* mit ***demselben*** Buchstaben (Namen) **r** bezeichnet: **r** ist dann eine gewisse Teilmenge von G×M: $\mathbf{r} \subseteq G \times M$. Das ist die ***extensionale*** Auffassung von dem, was eine binäre Relation genannt wird. Der Bezug zwischen intensionaler und extensionaler Auffassung wird durch die logische Äquivalenz $\mathbf{r}(x,y) \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbf{r}$ hergestellt.

Binäre Relationen definieren wir (extensional) daher so: Seien G, M endliche (nichtleere) Mengen. Jede Teilmenge $\mathbf{r \subseteq G \times M}$ wird eine **2-stellige** (oder „binäre“) **Relation auf dem Paar (G,M)** genannt. Ist G=M und $\mathbf{r} \subseteq G \times G$, so heißt **r** eine **2-stellige Relation auf G**. [3]

Entsprechend heißt eine Teilmenge t der Grundmenge G×M×N eine 3-stellige Relation auf dem Mengentripel (G, M, N), und wir verwenden *denselben* Buchstaben (Namen) „t“ auch für die 3-stellige Aussageform „***t***(x,y,z)“. Der Bezug zwischen intensionaler und extensionaler Auffassung wird durch die logische Äquivalenz ***t***(x,y,z) ⇔ (x,y,z)∈**t** hergestellt, wobei für die Variablen gilt: $x \in G$, $y \in M$, $z \in N$. Entsprechendes für n-stellige Relationen.

2.2.3 Halbordnungen

Im folgenden spielt ein besonderer Typ 2-stelliger Relationen eine Rolle, die man als „Halbordnungen“ (auch „partielle Ordnungen“) bezeichnet. Wie schon der Name andeutet, dienen Halbordnungen dazu, besonders *nicht-lineare* komplexe Strukturen zu „ordnen“ / „überschichtlich“ zu machen, um in ihnen z.B. systematisch „suchen“ zu können.

---

zu prüfen, in welchem Kontext diese beiden Halbordnungen überhaupt über einen Ordnungsmorphismus in Zusammenhang gebracht werden können.) – Wird zum Beispiel eine gewisse logische Form für eine Halbordnungseigenschaft diskutiert, so fragt man in der Mereologie, *„ob [diese Form] existiert“.* Eine solche Frage ist ***völlg unsinnig***, wenn man dabei den ***Deutungs-Kontext*** in keiner Weise klarstellt. Solche „Schnitzer“ durchziehen die gesamte „Mereologie“ und machen sie damit zu einem mittelalterlich orientierten, „ontologischen“ Spekulationsgebiet statt zu einer wissenschaftlichen Disziplien.

[3] Wann ein 2-stelliges „r“ extensional als *Paar-Teilmenge* von G×M, wann intensional als *Aussageform,* also als *Abbildung* r: $G \times M \rightarrow$ {true, false} aufzufassen ist, geht meist aus dem Kontext hervor und führt in der Mathematik i.allg. nicht zu Missverständnissen. In diesem Sinne ist die „naive“ Mengenschreibweise zu verstehen, die „r“ als die Menge „{(x,y)∈G×M | x***r***y}“ definiert: Das erstere „r“ ist halt die extensionale Auffassung des letzteren, intensional aufgefassten „***r***“. Die bekannten Paradoxien, die sich aus dieser „naiven“ Schreibweise ergeben können, treten in der Mathematik **nicht** auf, wenn man die spezielle relationale Form „$z \in z$“ und deren Verneinung „$z \notin z$“ als ***unzulässig*** zur Bildung von Mengen oder Aussageformen ausschließt.

Def.1: Eine „**Halbordnung**" auf einer (endlichen, nicht-leeren) Menge M ist eine meist mit „$\leq$" bezeichnete 2-stellige Relation auf M mit den Eigenschaften

(i)	**Reflexivität**:	$x \leq x$	für alle $x \in M$
(ii)	**Antisymmetrie**:	aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x=y$	für alle $x,y \in M$
(iii)	**Transitivität**:	aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$	für alle $x,y,z \in M$[4]

Wie in der „extensionalen" Auffassung üblich, bezeichnet man die durch $\{(x,y) \in M \times M | x \leq y\}$ definierte Teilmenge von $M \times M$ ebenfalls als „Halbordnung". Dass M durch „$\leq$" halbgeordnet ist, drückt man durch die Angabe des Paares $(M, \leq)$ aus. Auch das Paar $(M,\leq)$ nennt man eine „Halbordnung". Dieser unterschiedliche Gebrauch des Terminus „Halbordnung" entspricht dem diversen (intensionalen bzw. extensionalen) Gebrauch des Wortes „Relation" und führt nicht zu Missverständnissen, solange man nur die o.a. mathematischen Bezeichnungen „$\leq$", „$\{(x,y) \in M \times M \mid x \leq y\}$", „$(M, \leq)$" oder konsequente Substitutionen davon verwendet.[5]

Standardbeispiel: Die Potenzmenge Pot(S) zu irgendeiner Menge S ist durch die Mengeninklusion „$\subseteq$" halbgeordnet: (Pot(S), $\subseteq$) ist eine Halbordnung – übrigens mit besonders vielen Eigenschaften, die noch zusätzlich zu den Grundeigenschaften (i), (ii), (iii) hinzukommen: (Pot(S), $\subseteq$) ist ein *Boole*-Verband – zum allgemeineren Terminus „*Verband*": siehe Kap.2.2.4.

Die eben definierte Halbordnung „$\leq$" nennt man auch *nicht-strikt*, weil sie reflexiv und antisymmetrisch ist. Dazu gehört stets die „**strikte Halbordnung <",** definiert durch

(iv) $x<y :\Leftrightarrow (x \leq y$ und $x \neq y)$. Umgekehrt gilt dann stets: $x \leq y \Leftrightarrow (x<y$ oder $x=y)$.

Zu „$x \leq y$" sagt man auch „x ist kleiner-gleich y"; zu „$x<y$": „x ist *echt* kleiner als y".[6] Eine *strikte* Halbordnung ist *irrreflexiv* (für alle x gilt: $\neg(x<x)$), *antizyklisch* (aus $x<y$ folgt stets: $x \neq y$ und $\neg(y<x)$) und *transitiv* (aus $x<y$ und $y<z$ folgt stets $x<z$). Die Transitivität ist die wichtigste Eigenschaft von $\leq$ und $<$.

Informatiker verwenden statt „strikte Halbordnung" den Terminus „***Taxonomie***", wenn es sich um die Ordnung eines „Begriffssystems" handelt, wobei historisch gesehen eine „Taxonomie" früher nur eine recht spezielle, nämlich eine *hierarchische* Halbordnung bedeutete (z.B. in der Systematik der Biologen). Wir arbeiten aber hauptsächlich mit dem Terminus der *nicht-strikten* Halbordnung „$\leq$". Der Grund ist: Mit „$\leq$" lassen sich Ordnungsaussagen mathematisch einfacher und kürzer ausdrücken als mit „<".

In einer Halbordnung $(M,\leq)$ kann es „*$\leq$-unvergleichbare*" Elemente $x,y \in M$ geben; das sind solche, für die weder $x \leq y$ noch $y \leq x$ gilt. Es kann mehrere „*maximale*" oder mehrere „*minimale*" Elemente geben. Ein Element $x \in M$ heißt „maximal" (bzw. „minimal"), wenn es kein y mit $x<y$ (bzw. kein z mit $z<x$) in M gibt.

Gilt $x \leq y$ für gewisse $x.y \in M$, so heißt x eine „*untere Schranke*" von y, und y eine „*obere Schranke*" von x. Die *Menge aller unteren Schranken* des Elements $x \in M$ bezeichnen wir mit US(x), die *aller oberen Schranken* mit OS(x)[7]. Für eine beliebige Teilmen-

---

[4] Kommen noch weitere Eigenschaften hinzu, die den 3 obigen nicht widersprechen, so erhält man speziellere 2-stellige Relationen auf M, die natürlich ebenfalls als Halbordnung zu bezeichnen sind – eben „speziellere Halbordnungen".

[5] Wichtig bei dieser Definition ist nur, dass man nie von einer „Halbordnung $\leq$" sprechen sollte, ohne die Menge **M** zu erwähnen, auf der sie definiert ist.

[6] Analog zur Schreib- und Sprechweise bei Mengen: „$X \subseteq Y$" $\Leftrightarrow$ „X ist Teilmenge von Y" bzw. „$X \subset Y$" $\Leftrightarrow$ „$X \subseteq Y$ und $X \neq Y$" $\Leftrightarrow$ „X ist *echte* Teilmenge von Y".

[7] In [1]/S.3 wird US(x) mit (x] notiert und ein „Hauptideal" genannt. OS(x) wird mit [x) notiert und ein „Hauptfilter" genannt.

ge $X \subseteq M$ setzen wir

(v) US(X) := {$y \in M$ | $y \leq x$ für alle $x \in X$}, *Menge der unteren Schranken aller Elemente von X*; und

OS(X) := {$y \in M$ | $x \leq y$ für alle $x \in X$}, *Menge der oberen Schranken aller Elemente von X*.

Man beachte, dass in einer allgemeinen Halbordnung sowohl US(X) als auch OS(X) **leer** sein können für gewisse Teilmengen $X \subseteq M$. Z.B. ist US(X)=∅, wenn in X ein minimales Element x und ein damit unvergleichbares y vorkommt. Sind sie es nicht, so ergeben sich für $x \in M$ zwei nützliche Formeln, die wir noch brauchen werden:

(vi) OS(US(x)) = OS(x), US(OS(x)) = US(x).

„Die oberen Schranken der Unteren Schranken eines Elements $x \in M$ sind seine oberen Schranken"; entprechend dual: „Die unteren Schranken der oberen Schranken eines Elements x sind seine unteren Schranken".

Bei einer Halbordnung (M,≤) gibt es in einer Teilmenge $X \subseteq M$, wenn überhaupt, nur höchstens **ein** *kleinstes* Element, d.h. die Menge MinOS(X) := {$mi \in OS(X) | \forall x \in OS(X): mi \leq x$} $\subseteq$ OS(X) ist entweder leer oder 1-elementig. Ist sie 1-elementig, also MinOS(X)={mi}, so bezeichnet man das Element $mi \in OS(X)$ mit „supX";

(vi) **supX** = **Supremum** der Menge X = *kleinste obere* Schranke von X
= das *eine* Element mi von MinOS(X) (falls existent).

Dual dazu ist die Menge MaxUS(X) := {$ma \in US(X) | \forall x \in US(X): x \leq ma$} $\subseteq$ US(X) entweder leer oder 1-elementig. Ist sie 1-elementig, also MaxUS(X)={ma}, so bezeichnet man das Element $ma \in US(X)$ mit „infX";

(vii) **infX** = **Infimum** der Menge X = *größte untere* Schranke von X
= das *eine* Element ma von MaxUS(X) (falls existent).[8]

Schließlich wollen wir noch sagen, was eine „Teil-Halbordnung" sein soll.

Def.1.1.Teil-Halbordnung: Seien (M,≤), (M',≤') zwei Halbordnungen. (M,≤) heißt eine „**Teil-Halbordnung**" von (M',≤'), wenn gilt: $M \subseteq M'$ und: aus x≤y folgt x≤'y für alle $x,y \in M$.

2.2.4 Vollständige Verbände

Def.2: Als **„vollständigen Verband"** bezeichnen wir hier eine spezielle Halbordnung (V, ≤) mit ***endlicher*** *nicht-leerer* Menge V, wo ***jede*** Teilmenge $X \subseteq V$ *ein Supremum* **supX** *und ein Infimum* **infX** *in V hat*. Die leere Menge ∅ ist nach mathematischer Vereinbarung Teilmenge *jeder* beliebigen Menge, also auch $\emptyset \subseteq V$. Aus Kap.2.2.3/(vi) folgt: **sup∅ = infV** und **inf∅ = supV**

[8] Der Gebrauch der Worte *„existent" / „existieren" / „Existenz"* ist in der Mathematik (im Gegensatz zum Gebrauch bei Philosophen) **völlig unverfänglich**. Er bezieht sich stets auf eine gewisse vorab eingeführte **Objekmenge M** und ein bestimmtes n-stelliges Prädikat P, das auf der genannten Menge M definiert ist als Abbildung P: $M^n \rightarrow$ {true, false}. Zum Beispiel sei P 1-stellig und N_P:={$x \in M$| P(x)=true}. N_P ist dann eine gewisse Teilmenge von M. Ist nun $N_P=\emptyset$, so sagt man auch, „in M *existiert* kein Element, das die Eigenschaft P hat". Umgangssprachlich sagt man dazu laxer, aber eventuell missverständlich: „in M existiert kein P". Denselben logischen Sachverhalt hätte man auch mit Hilfe von Quantoren ausdrücken können durch „$\neg\exists x \in M$:P(x)" oder, äquivalent dazu, durch „$\forall x \in M$: $\neg$P(x)". Eine philosophische Frage der Form „existiert P?" oder – entsprechend – eine Annahme der Form „P existiert" ist dagegen **völlig unsinnig**, wenn im Kontext nicht auf eine vorher erläuterte **Objektmenge M** Bezug genommen wird. Die philosophische „Ontologie" oder „Metaphysik" besteht bis heute hauptsächlich aus solchen ***unsinnigen*** Fragen bzw. Annahmen, und sollte daher den Informatikern bei der Definition was eine „Ontologie" sei, ***möglichst nicht*** als Anregung dienen!

SupV ist das *größte* bzw. infV das *kleinste* Verbandselement. Man nennt sie auch die EINS bzw. die NULL des Verbandes V: $\mathbf{1_V}$:= supV=inf∅ bzw. $\mathbf{0_V}$:= infV=sup∅.

Anmerkung-1: So, wie supX und infX definiert sind, gilt zwar stets supX∈OS(X), infX∈US(X); jedoch: supX, bzw. infX k*önnen*, *müssen aber nicht* zu X gehören*!* Wenn z.B. X={a, b}⊆V mit ≤-unvergleichbaren a, b ist, so ist subX∉X, infX∉X.

Anmerkung-2: Wenn V nur aus *einem* Element besteht, heißt V der ***triviale*** Verband; in ihm ist $1_V=0_V$. Die leere Menge ist ***kein*** vollständiger Verband!

(xiii) Verbandsrechenregeln: Aus dieser Definition ergeben sich, wenn man für je zwei beliebige Elemente x,y∈V die Verknüpfungen **x∨y := sup{x,y}, x∧y := inf{x,y}** definiert, die bekannten Verbandsrechenregeln

(K)	Kommutativität:	$x\vee y = y\vee x$,	$x\wedge y = y\wedge x$
(As)	Assoziativität:	$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$,	$x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$
(Ap)	Absorption:	$x\vee(x\wedge y) = x\wedge(x\vee y) = x$	
(Id)	Idempotenz:	$x\vee x = x\wedge x = x$	
(Vt)	≤ -Verträglichkeit:	$x\wedge y \le x \le x\vee y$,	$x\wedge y \le y \le x\vee y$.

Distributivität in ∨ und ∧ gilt i.allg. *nicht*, sondern nur bei speziellen Verbänden, z.B. bei Boole-Verbänden.

Def.3.Teilverband / Inf-Halbverband:

(a) Sei (V,≤) ein (endlicher) vollständiger Verband. Eine (nicht-leere) Teilmenge T⊆V die gegen Supremum- und Infimum-Bildung abgeschlossen ist, d.h. U⊆T ⇒ supU, infU∈T, heißt ein **vollständiger Teilverband** von V. (Die leere Teilmenge ∅⊂V ist *kein* Teilverband!)
(b) Eine Halbordnung (H,≤), in der zu jeder *nicht-leeren(!)* Teilmenge U⊆H das Infimum existiert, nennen wir **Inf-Halbverband.** Das Supremum supU muss in H nicht existieren. Ist z.B. V ein vollständiger Verband, und 1_V seine EINS, so ist H := V-{1_V} ein Inf-Halbverband. „Vollständigkeit" in dem Sinne, dass auch inf∅ zu H gehört, setzen wir für einen Inf-Halbverband (H, ≤) ***nicht*** voraus.

Vollständige Verbände spielen eine Hauptrolle in der **Formalen Begriffsanalyse**.

2.2.5 Formale Begriffsanalyse (FBA)

Im folgenden fassen wir kurz zusammen, was wir aus dem Standardwerk [1] (Formale Begriffsanalyse – **FBA**) für das Weitere brauchen, aber wir wählen einige Bezeichnungen nicht wie in [1], sondern so, wie wir sie auch später hier benötigen.

Anmerkung: Wir benötigen aus dem FBA-Standardwerk [1] de `facto` nur knapp ***die ersten 30*** der insgesamt über 270 ***Seiten***. Weiteren Überlegungen in [1] können/wollen wir derzeit ***nicht*** alle verwenden, weil mehrere formale Kontexte in [1] oft nur unter gewissen mathematischen Restriktionen zusammengesetzt werden, die wir nicht brauchen können (vgl. z.B. die sog. „direkte Summe" von Kontexten, [1]/S.184ff, oder auch die „Verklebung" von Kontexten, [1]/S.196ff). Denn beim Aufbau einer „**Ontologie**" sind die *„praktisch relevanten"* Relationen ***ganz unabhängig*** von mathematischen Zusatzrestriktionen auszuwählen, denn sie sind dazu da, ein (meist außermathematisches) „***Wissensgebiet***" zu strukturieren, das jederzeit ***erweiterbar*** sein muss durch Hinzunahme weiterer praktisch relevanter Relationen, ohne dass die ***Grundstruktur*** der schon etablierten Ontologie allzu sehr revidiert werden muss. [Zur Erweiterbarkeit einer Ontologie auf FBA-Basis siehe Kap.3.3.7.]

2.2.5.1 f-Kontext

Seien G, M zwei (nicht-leere) **endliche** Mengen und **r⊆G×M** eine 2-stellige Relation. Das Tripel **(G, M, r)** heißt der „**formale Kontext**" (kurz: „**f-Kontext**") zur Relation r. Die x∈G heißen „**Gegenstände**", die y∈M heißen „**Merkmale**".

Anmerkung-1: Die Bezeichnung „Gegenstand" für x∈G bzw. „Merkmal" für y∈M soll nur bedeuten, dass in der Aussage „x**r**y" das x an der ***ersten***, das y an der ***zweiten*** Stelle steht. Hätten wir statt einem r⊆G×M dessen inverse Relation r^{-1}⊆M×G im Kontext (M, G, r^{-1}) genommen, so würden eben die y∈M „Gegenstände" und die x∈G „Merkmale" zur Relation r^{-1} heißen.

(i) dom(r) := {x∈G |∃y∈M: xry} ⊆ G heißt „**Gegenstandsbereich**" von r,
range(r) := {y∈M |∃x∈G: xry} ⊆ M heißt „**Merkmalsbereich**" von r.

Anmerkung-2: dom(r) wird auch die „Domäne“ (*domain*) oder der „Vorbereich“ bzw. range(r) wird auch der „Wertebereich“ (*range*) oder der „Nachbereich“ der Relation r genannt. Wir bleiben aber in der FBA bei den Bezeichnungen „Gegenstandsbereich“ bzw. „Merkmalbereich“.

Folgende beiden durch r induzierten Abbildungen spielen eine **grundlegende Rolle**:

(ii) $\uparrow r$: Pot(G)→Pot(M), definiert durch $X^{\uparrow r} := \{y \in M \mid \forall x \in X: x\mathbf{r}y\}$ für alle $X \subseteq G$,
$\downarrow r$: Pot(M)→Pot(G), definiert durch $Y^{\downarrow r} := \{x \in G \mid \forall y \in Y: x\mathbf{r}y\}$ für alle $Y \subseteq M$.

Anmerkung-3: Mathematiker nennen das Abbildungspaar Paar ($\uparrow r, \downarrow r$) die durch r gegebene „**Galoisverbindung zwischen G und M**“. Wir benutzen hier – wie in [1] – die „exponentielle“ Abbildungsschreibweise, z.B. „$X^{\uparrow r}$“ an Stelle von „$\uparrow r(X)$“. Der Ausdruck „$X^{\uparrow r \downarrow r}$“ zum Beispiel bedeutet also, dass auf X ***zuerst*** die Abbildung $\uparrow r$ und ***dann*** auf $X^{\uparrow r}$ die Abbildung $\downarrow r$ angewendet wird. Außerdem impliziert die Schreibweise „$X^{\uparrow r}$“, dass $X \subseteq G$ und $X^{\uparrow r} \subseteq M$ ist, wogegen die Schreibweise „$X^{\downarrow r}$“ impliziert, dass $X \subseteq M$ und $X^{\downarrow r} \subseteq G$ ist.

Die Hilfssätze [1]/10 & 11,S.19-20 halten ein paar elementare aber ***fundamentale*** Formeln für die Galoisverbindung bereit, die immer wieder gebraucht werden:

(iii) Für ***beliebige*** Teilmengen $A_1, A_2, A \subseteq G$ bzw. $B_1, B_2, B \subseteq M$ gilt:
$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2^{\uparrow r} \subseteq A_1^{\uparrow r}$, sowie $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2^{\downarrow r} \subseteq B_1^{\downarrow r}$
$A \subseteq A^{\uparrow r \downarrow r}$ ($A^{\uparrow r \downarrow r}$ ist die „*Hülle*“ von A), sowie $B \subseteq B^{\downarrow r \uparrow r}$ ($B^{\downarrow r \uparrow r}$ ist die „*Hülle*“ von B)
$A^{\uparrow r \downarrow r \uparrow r} = A^{\uparrow r}$, sowie $B^{\downarrow r \uparrow r \downarrow r} = B^{\downarrow r}$
$(A_1 \cup A_2)^{\uparrow r} = A_1^{\uparrow r} \cap A_2^{\uparrow r}$, sowie $(B_1 \cup B_2)^{\downarrow r} = B_1^{\downarrow r} \cap B_2^{\downarrow r}$
$A \times B \subseteq r \Leftrightarrow A \subseteq B^{\downarrow r} \Leftrightarrow B \subseteq A^{\uparrow r}$.

2.2.5.2 f-Begriff und f-Begriffsverband

Nach der Idee, dass ein „Begriff“ sich auf eine Menge von „Gegenständen“ (**„Begriffs-Umfang“**) bezieht, die „unter den Begriff fallen“, und dass er andererseits durch gewisse „Merkmale“ (**„Begriffs-Inhalt“**) gekennzeichnet ist, die allen Gegenständen des Umfangs zugeschrieben werden, ergibt sich in der FBA auf natürliche Weise eine einfache Definition dafür, was ein *„formaler Begriff“* zur Relation r – kurz genannt: **„f-Begriff zu r“** – sein soll.

Anmerkung-1: Dieser Gebrauch des Terminus „Begriff“ hatte unter anderem seinen Niederschlag in den Normen DIN2330 und DIN2331 der 1980-er Jahre gefunden [vgl. [1]/Vorwort]. Leider ist – nach Auskunft eines Kollegen – die Definition in neueren Versionen, z.B. DIN2342/1 (1993), angeblich so geändert worden, dass nur noch „Umfänge“ und keine „Inhalte“ mehr (bzw. nur noch „Inhalte“ und keine Umfänge mehr) in die Definition des Terminus „Begriff“ eingehen. Das ist vermutlich durch das OOP- oder UML-Konzept beeinflusst worden und führt zu Schwierigkeiten beim Aufbau des Begriffssystems einer Ontologie, die sich die Verantwortlichen selbst eingebrockt haben. – Zur Problematik der DIN-Definition vgl. etwa *W.G. Stock* [30].

Def.4.f-Begriff / f-Kontext: Seien $A \subseteq G$, $B \subseteq M$. Das Paar (A,B) heißt ein „**f-Begriff**“ zum **f-Kontext (G, M, r)**, genau dann wenn gilt: $\mathbf{A^{\uparrow r} = B}$ und $\mathbf{B^{\downarrow r} = A}$. A heißt der „**Umfang**“, B der „**Inhalt**“ des f-Begriffs (A,B).

Anmerkung-2: Wichtig bei dieser Definition ist, dass ein ***f-Begriff*** sich stets auf einen gegebenen ***f-Kontext*** (G, M, r) und die zugehörige ***Relation*** $r \subseteq G \times M$ bezieht. Das wird besonders relevant, wenn wir es später mit ***mehreren*** Relationen r, s, t,... auf ein und derselben Grundmenge zu tun haben! „Ontologisch“ entspricht dem die Einstellung, dass die Definition von „Begriffen“ ***unsinnig*** wird, wenn man dabei den „***Kontext***“ und die damit gemeinte „Beziehungsart“ nicht klar herausstellt: ***ERST der Kontext, DANN die Begriffe – NICHT umgekehrt!***

(iv) Auf der f-Begriffsmenge $\mathbf{\underline{B}(r) := \{(A,B) \in PotG \times PotM \mid (A,B)}$ **ein f-Begriff zu r}** wird eine **Halbordnung** $\leq_r$ eingeführt durch $\mathbf{(A_1,B_1) \leq_r (A_2,B_2) :\Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2}$. Man sieht mit (iii) sofort, dass damit auch gilt: $(A_1,B_1) \leq_r (A_2,B_2) \Leftrightarrow \mathbf{B_2 \subseteq B_1}$. Trifft

$(A_1,B_1) <_r (A_2,B_2)$ zu, so sagt man: „(A_1,B_1) ist ein **f-Unterbegriff** von (A_2,B_2)“ oder auch „(A_2,B_2) ist ein **f-Oberbegriff** von (A_1,B_1)“ im Sinne der Relation r. [9]

Anmerkung-3: Diese Definition trifft ziemlich gut die intuitive Vorstellung von „Unterbegriff“ / „Oberbegriff“: Der Unterbegriff ist „spezieller“ und hat daher weniger „Gegenstände“ in seinem Umfang und mehr „Merkmale“ in seinem Inhalt; der Oberbegriff ist „allgemeiner“ und hat daher mehr „Gegenstände“ in seinem Umfang und weniger „Merkmale“ in seinem Inhalt. Der „kleinste“ („speziellste“) Begriff hat alle (betrachteten[!]) Merkmale zum Inhalt aber möglicherweise keine oder nur wenige Gegenstände in seinem Umfang. Der „größte“ („allgemeinste“) Begriff umfasst „alle“ (betrachteten[!]) Gegenstände im Umfang, aber möglicherweise keine oder nur wenige Merkmale in seinem Inhalt.

$\leq_r$ ist eine **Halbordnung** auf $\underline{B}(r)$, weil $\subseteq$ eine Halbordnung auf PotG (bzw. auf PotM) ist. Der **Hauptsatz** der FBA, [1]/Satz3,S.20, besagt nun:

(v) **($\underline{B}$(r), $\leq_r$) ist ein vollständiger Verband** und heißt der „**f-Begriffsverband**“ zum f-Kontext (G, M, r). Infimum und Supremum einer f-Begriffsmenge $X:=\{(A_i,B_i)|\ i\in T\} \subseteq \underline{B}(r)$ ergeben sich zu

$$\inf X = \Big(\bigcap_{i\in T} A_i\,,\ \big(\bigcup_{i\in T} B_i\big)^{\downarrow r\uparrow r}\Big)\,; \qquad \sup X = \Big(\big(\bigcup_{i\in T} A_i\big)^{\uparrow r\downarrow r},\ \bigcap_{i\in T} B_i\Big)$$

$$ = \Big(\bigcap_{i\in T} A_i\,,\ \big(\bigcap_{i\in T} A_i\big)^{\uparrow r}\Big)\,; \qquad = \Big(\bigcap_{i\in T} B_i^{\downarrow r},\ \bigcap_{i\in T} B_i\Big)$$

Daraus folgt mit (iii),(iv) für *jede* Teilmenge $X\subseteq G$ bzw. $Y\subseteq M$:

(vi) $(X^{\uparrow r\downarrow r}, X^{\uparrow r})$ ist der (gemäß $\leq_r$) **kleinste f-Begriff, der X im Umfang enthält;**
$(Y^{\downarrow r}, Y^{\downarrow r\uparrow r})$ ist der (gemäß $\leq_r$) **größte f-Begriff, der Y im Inhalt enthält:**
$X\subseteq X^{\uparrow r\downarrow r}$, $Y\subseteq Y^{\downarrow r\uparrow r}$.

Abb.1 zeigt die Veranschaulichung eines f-Kontextes (G,M,**r**) und zweier f-Begriffe. Der eine ist aus einem Gegenstand $x\in G$, der andere aus einem Merkmal $y\in M$ erzeugt. Man beachte hierbei das intuitive sog. **„Drei-Ecken-Kriterium“**: Die Rechtecke $\{x\}^{\uparrow\downarrow}\times\{x\}^{\uparrow}$ und $\{y\}^{\downarrow}\times\{y\}^{\downarrow\uparrow}$ visualisieren dabei die **f-Begriffe** $(\{x\}^{\uparrow\downarrow}, \{x\}^{\uparrow})$ und $(\{y\}^{\downarrow}, \{y\}^{\downarrow\uparrow})$. Man sieht „geometrisch“**:** Diese Rechtecke liegen ganz in der Figur **r**, und je **drei ihrer Ecken liegen auf dem Rand von r.** Das ist zwar kein allgemeines Kriterium für „f-Begriff“ und kommt nur daher, weil hier die Relation **r** als eine *konvexe ebene* Fläche dargestellt ist, aber es **hilft sehr**, sich in etwa bildlich zu vorzustellen, was ein aus einem Gegenstand $x\in G$ bzw. aus einem Merkmal $y\in M$ erzeugter f-Begriff sei.

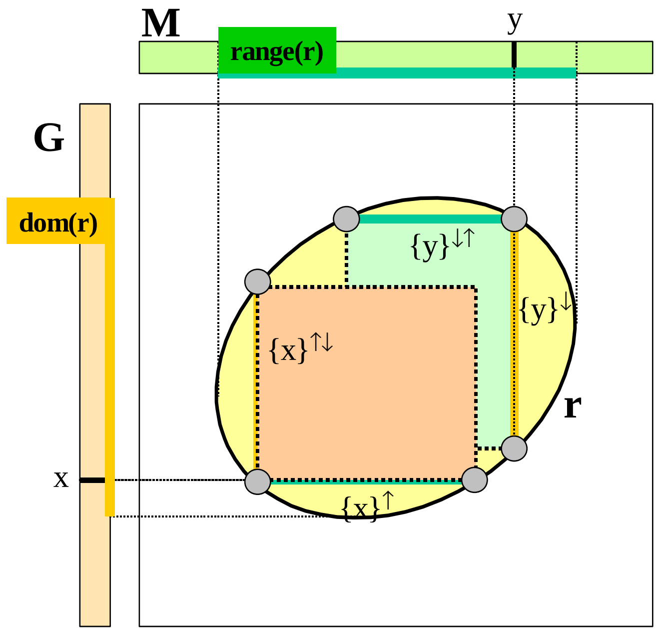
Abb.2 veranschaulicht noch einmal zwei f-Begriffe in dem Fall, dass der eine aus einer *mehrelementigen* Gegenstandsmenge A, der andere aus einer *mehrelementigen* Merkmalmenge B erzeugt ist. Man beachte hier das intuitive sog. **„Zwei-Ecken-Kriterium“:** Mindestens **zwei Diagonalecken des Rechtecks $A^{\uparrow\downarrow}\times A^{\uparrow}$** bzw. des Rechtecks **$B^{\downarrow}\times B^{\downarrow\uparrow}$** müssen auf dem Rand der konvexen Figur **r** liegen.

Beachte: Die hier verwendeten zeichnerischen Veranschaulichungen sind hilfreich; man kann sich aber täuschen, wenn man allein aus den Zeichnungen allgemeingültige FBA-Formeln ablesen will, besonders, wenn es um „*Hüllenbildung*“ geht: Hier ein ***Gegenbeispiel***: Aus der Veranschaulichung in **Abb.3** scheint sich für zwei beliebige f-Begriffe (A,B), (A’,B’) des Kontextes (G, M, r) folgender einfacher Sachverhalt zu ergeben:

> „Aus (A,B), (A’,B’)$\in\underline{B}$(r) folgt (A$\cap$A’, B$\cup$B’), (A$\cup$A’, B$\cap$B’)$\in\underline{B}$(r)“. Das würde heißen: „Sind (A,B) und (A’,B’) f-Begriffe zu r, so auch (A$\cap$A’, B$\cup$B’) und (A$\cup$A’, B$\cap$B’)“. Mit anderen Worten: Sind A, A’ *Umfänge*, so auch A$\cap$A’ und A$\cup$A’; sind B, B’ *Inhalte*, so auch B$\cap$B’ und B$\cup$B’ “.

---

[9] In der praktischen Informatik meint man mit „α ist Unterbegriff von β“ meist, dass α „*unmittelbarer*“ Unterbegriff von β ist, d.h. (bei gegebener strikter Halbordnung <): es gilt $\alpha<\beta$ **und** es gibt **kein** γ mit $\alpha<\gamma<\beta$. In der FBA sagt man dazu „α ist **unterer Nachbar** von β. – Entsprechendes bei der informatischen Interpretation für „β ist Oberbegriff von α“.



f-Kontext (G, M, **r**)
mit Inzidenzrelation **r**:
dom(**r**) $=\{x\in G \mid \exists y\in M: x\mathbf{r}y\}$
range(**r**)$=\{y\in M \mid \exists x\in G: x\mathbf{r}y\}$
$x\in G$; Ableitungen von x:
$\{x\}^{\uparrow} = \{m\in M \mid x\mathbf{r}m\} \subset M$
$\{x\}^{\uparrow\downarrow} = \{g\in G \mid \forall y\in x^{\uparrow}: g\mathbf{r}y\} \subset G$
$y\in M$; Ableitungen von y:
$\{y\}^{\downarrow} = \{x\in G \mid x\mathbf{r}y\} \subset G$
$\{y\}^{\downarrow\uparrow}=\{m\in M \mid \forall x\in y^{\downarrow} : x\mathbf{r}m\}\subset M$
($\{x\}^{\uparrow\downarrow}$, $\{x\}^{\uparrow}$) und **($\{y\}^{\downarrow}$, $\{y\}^{\downarrow\uparrow}$)** sind stets **f-Begriffe** des Kontextes (G,M,**r**).

Wenn die Relation **r** als konvexes Oval veranschaulicht wird, hilft das **„Drei-Ecken-Kriterium“**, für F-Begriffe, die aus *einem* Gegenstand x bzw. aus *einem* Merkmal y erzeugt sind.

A

Abb.1: Veranschaulichung zweier aus *einem* Gegenstand x bzw. *einem* Merkmal y erzeugten f-Begriffe im Kontext (G, M, **r**)

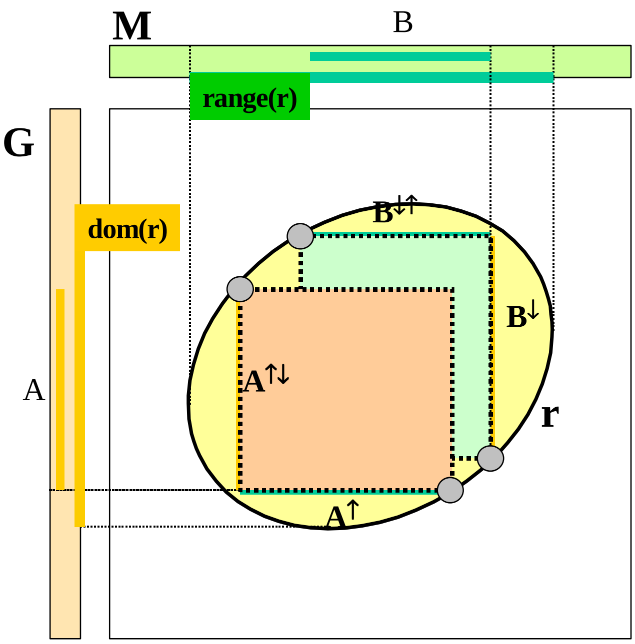
Davon ist aber i.allg. **nur die Hälfte richtig**. Es gilt allgemein nur:

$(A,B), (A',B') \in \underline{B}(r) \Rightarrow (A\cap A', (A\cap A')^{\uparrow r}), ((B\cap B')^{\downarrow r}, B\cap B') \in \underline{B}(r)$.

D.h.: Sind A, A' Umfänge, so auch $A\cap A'$; sind B, B' Inhalte, so auch $B\cap B'$.

Dagegen ist $A\cup A'$ i.allg. ***kein*** Umfang, $B\cup B'$ i.allg. ***kein*** Inhalt!

Der mathematische Grund geht aus der Infimum- und der Supremumbildung – Formeln (iii) bzw. (v) – hervor: $\inf\{(A,B), (A',B')\} = (A,B)\wedge(A',B') =(A\cap A', (A\cap A')^{\uparrow r})$, $\sup\{(A.B), (A',B')\} = (A,B)\vee(A',B') = ((B\cap B')^{\downarrow r}, B\cap B')$. Der Grund für die zeichnerische **Täuschung** ist einfach der, dass man die Mengen A, A', B, B' in der Zeichnung als „durchgehende Balken ohne Löcher“ darstellt. Das suggeriert z.B.: **„**$A\cup A' = (A\cup A')^{\uparrow r\downarrow r}$**“**. I.allg. ist aber nur $A\cup A' \subseteq (A\cup A')^{\uparrow r\downarrow r}$; d.h. $(A\cup A')^{\uparrow r\downarrow r}$ ist die „***Hülle***“ von $A\cup A'$. Mehr zur „Hüllenbildung“ im Kap. 2.2.5.3.



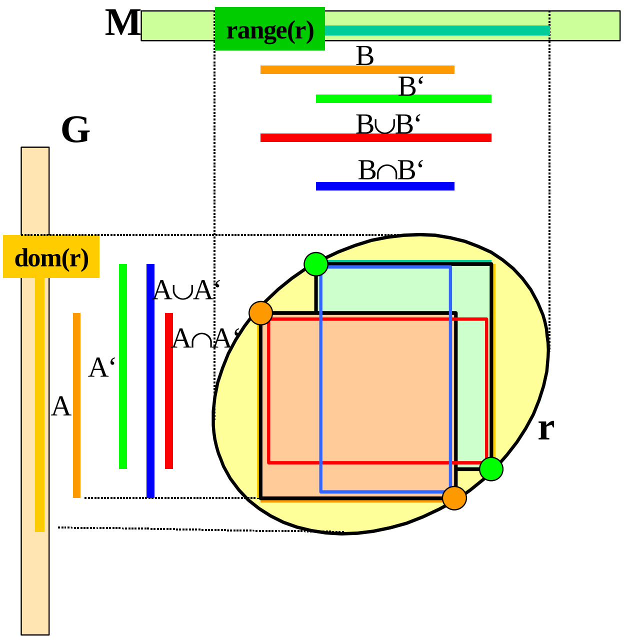
f-Kontext (G, M, **r**) mit Inzidenzrelation **r**,
dom(**r**) $=\{x\in G \mid \exists y\in M: x\mathbf{r}y\}$,
range(**r**)$=\{y\in M \mid \exists x\in G: x\mathbf{r}y\}$.
$A\subset G$; Ableitungen von A:
$A^{\uparrow} = \{m\in M \mid \forall x\in A: x\mathbf{r}m\} \subset M$
$A^{\uparrow\downarrow} = \{g\in G \mid \forall y\in A^{\uparrow}: g\mathbf{r}y\} \subset G$
$B\subset M$; Ableitungen von B:
$B^{\downarrow} = \{g\in G \mid \forall y\in B: g\mathbf{r}y\} \subset G$
$B^{\downarrow\uparrow}=\{m\in M \mid \forall x\in B^{\downarrow}: x\mathbf{r}m\} \subset M$
($A^{\uparrow\downarrow}$, $A^{\uparrow}$) und **($B^{\downarrow}$,$B^{\downarrow\uparrow}$)** sind stets **f-Begriffe** des Kontextes (G, M, **r**).
Wenn die Relation **r** als konvexes Oval veranschaulicht wird, hilft das **„Zwei-Ecken-Kriterium“**, für die Skizzierung von f-Begriffen, die aus einer Gegenstandsmenge A bzw. einer Merkmalmenge B erzeugt sind.

Abb.2: Veranschaulichung von f-Begriffen, die aus einer *mehrelementigen Menge* von Gegenständen bzw. Merkmalen erzeugt sind.

Abb.1 und 2 geben Anlass zu folgender geometrisch anschaulichen Sprechweise für f-Begriffe, die besonders dann nützlich wird, wenn wir es später mit mehreren Relationen r,s, ... auf derselben Grundmenge IN:=G=M zu tun haben:

Def.4.1: Sei (G,M,r) ein f-Kontext. Jedes kartesische Produkt $A\times B\subseteq G\times M$ bezeichnen wir als ein „***Rechteck***“ in der Kontexttabelle. Ein Rechteck $A\times B$ heiße „***extremal***“, wenn (A,B) ein f-Begriff des Kontextes ist. Das Rechteck $A\times B\subseteq r$ eines f-Begriffs ist in dem Sinne *extremal*, dass jedes „echt kleinere“ oder „echt größere“ Rechteck $X\times Y$ ($X\subset A$, $Y\subset B$ oder $A\subset X$, $B\subset Y$) ***keinen*** f-Begriff zu r mehr darstellt. **Abb.4** zeigt eine Veranschaulichung hierfür.

Abb.5 schließlich veranschaulicht im Kontext (G, M, r) die **Halbordnung** $\leq_r$ des f-Begriffsverbandes B(r) und damit das FBA-Konzept für „Unter-/Oberbegriff“.



Eine täuschende Veranschaulichung:

Sind (A,B), (A‘,B‘) f-Begriffe zu r, so scheint es, dass stets auch (A∪A‘, B∩B‘), (A∩A‘, B∪B‘) f-Begriffe zu r seien.

Die Täuschung kommt nur daher, dass die Mengen A, A‘, B, B‘ als „durchgehende Balken“ gezogen sind; somit erscheinen auch deren Vereinigungen und Durchschnitte als „durchgehende Balken“.

Abb.3: Eine täuschende Veranschaulichung!

Hier noch ein paar nützliche Bemerkungen für später; sei $X \subseteq G$, $Y \subseteq M$**:**

(vii) Ist $X \not\subseteq dom(r)$, so ist $X^{\uparrow r}=\varnothing$, $X^{\uparrow r\downarrow r}=\varnothing^{\downarrow r}=G$, und $(X^{\uparrow r\downarrow r}, X^{\uparrow r})=(G,\varnothing)=:\mathbf{1}_r$ ist der ***größte*** f-Begriff, also die EINS des f-Begriffsverbandes $\underline{B}(r)$.

Ist $Y \not\subseteq range(r)$, so ist $Y^{\downarrow r}=\varnothing$, $Y^{\downarrow r\uparrow r}=\varnothing^{\uparrow r}=M$, und $(Y^{\downarrow r}, Y^{\downarrow r\uparrow r})=(\varnothing,M) =: \mathbf{0}_r$ ist der ***kleinste*** f-Begriff, also die NULL des f-Begriffsverbandes $\underline{B}(r)$.

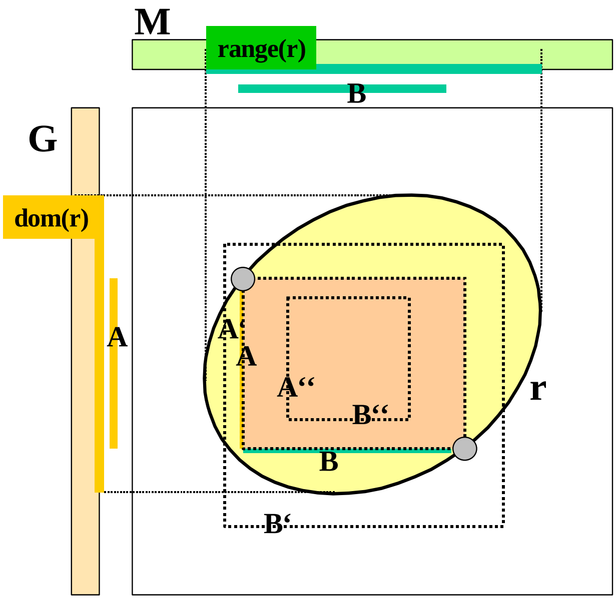
Ist speziell $X=Y=\varnothing$, so folgt: $(\varnothing^{\uparrow r\downarrow r},\varnothing^{\uparrow r})=(M^{\downarrow r},M) =\mathbf{0}_r$ und $(\varnothing^{\downarrow r},\varnothing^{\uparrow r\downarrow r})=(G,G^{\uparrow r}) =\mathbf{1}_r$

Man sieht aus (vii): Es hängt von dom(r) bzw. range(r) ab, wie das größte Element $\mathbf{1}_r$ bzw. das kleinste Element $\mathbf{0}_r$ von $\underline{B}(r)$ aussehen:

(viii) Ist dom(r)=G, so lautet das größte $\underline{B}(r)$-Element: $\mathbf{1}_r = (G,G^{\uparrow r})$, wobei $G^{\uparrow r}\neq\varnothing$ möglich ist für gewisses r; ist aber $dom(r)\subset G$, so lautet es stets: $\mathbf{1}_r = (G,\varnothing)$. Ist range(r)=M, so lautet das kleinste $\underline{B}(r)$-Element: $\mathbf{0}_r = (M^{\downarrow r},M)$, wobei $M^{\downarrow r}\neq\varnothing$ möglich ist für gewisses r; ist aber $range(r)\subset M$, so lautet es stets: $\mathbf{0}_r = (\varnothing,M)$.

Diese Feststellung wird uns später helfen, in einer Ontologie die „F-Begriffsverbände“ einheitlich darzustellen.

Das eben skizzierte „FBA-Konzept“ wenden wir später bei unserer „Ontologie-Definition“ auf verschiedenen Abstraktionsebenen immer wieder an.

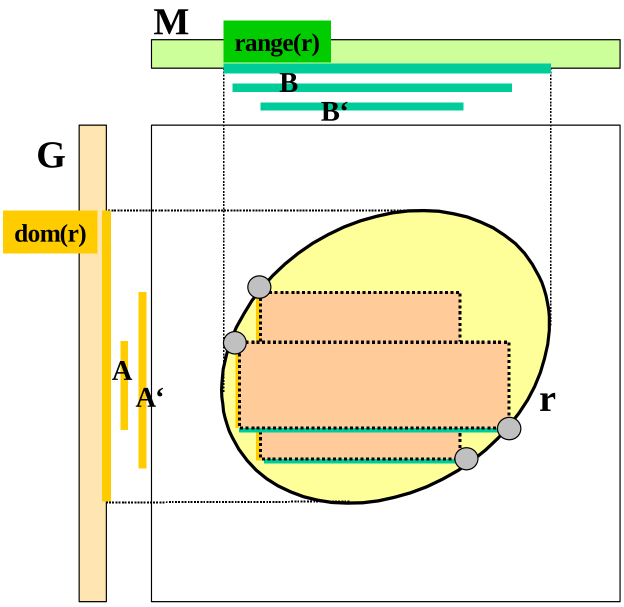


Veranschaulichung eines f-Begriffs zum f-Kontext (G, M, **r**) als **„extremales Rechteck“:**

AxB stellt einen F-Begriff zu r dar, weil $A^{\uparrow}$=B und $B^{\downarrow}$ =A.

Jedes größere Rechteck A‘xB‘,
A⊂A‘, B⊂B‘,
u. jedes kleinere Rechteck A“xB“,
A“⊂A, B“⊂B,
stellt ***keinen*** f-Begriff zu r mehr dar.

Abb.4: Veranschaulichung eines f-Begriffs als „extremales Rechteck“



Veranschaulichung für „Unter- / Oberbegriff“ im f-Kontext (G, M, **r**).

(A,B) $<_r$ (A‘,B‘),
weil
A ⊂ A‘ und B‘⊂ B

(A,B) ist Unterbegriff von (A‘,B‘)
im Kontext (G,M,r)

Abb.5: Veranschaulichung des „Unter-/Oberbegriff“-Konzepts

2.2.5.3 Weitere Verbände zu einem f-Kontext (G, M, r)

$\underline{B}$(r) ist der für die FBA wichtigste, aber nicht der einzige vollständige Verband, den man zu einem f-Kontext K_r = (G, M, r) assoziieren kann: Auch die nun folgenden weiteren Verbände werden für einige Details der Ontologie-Definition nützlich sein.

Sei $\boldsymbol{U}$(r) die Menge der **Umfänge**, $\boldsymbol{J}$(r) die Menge der **Inhalte** aller f-Begriffe von K_r:

$$\boldsymbol{U}(r) := \{A \subseteq G \mid \exists B \subseteq M: (A,B) \in \underline{B}(r)\} = \{X^{\uparrow r \downarrow r} \mid X \subseteq G\} \subseteq \mathrm{Pot}G$$
$$\boldsymbol{J}(r) := \{B \subseteq M \mid \exists A \subseteq G: (A,B) \in \underline{B}(r)\} = \{Y^{\downarrow r \uparrow r} \mid Y \subseteq M\} \subseteq \mathrm{Pot}M$$

$\boldsymbol{U}$(r) ist ein sog. „**Hüllensystem**“ auf G, denn es enthält G und mit A, A’ auch A∩A’. Ebenso ist $\boldsymbol{J}$(r) ein Hüllensystem auf M, denn es enthält M und mit B, B’ auch B∩B’.

Bew. für $\boldsymbol{U}$(r): G ist wegen Kap.2.2.5.2/(viii) ein Umfang, also G∈$\boldsymbol{U}$(r). Seien (A,B), (A’,B’) f-Begriffe aus $\underline{B}$(r), also A,A’∈$\boldsymbol{U}$(r). Dann ist mit Kap.2.2.5.2/(vi) $((B\cup B')^{\downarrow r}, (B\cup B')^{\downarrow r\uparrow r}) = (B^{\downarrow r}\cap B'^{\downarrow r}, (B\cup B')^{\downarrow r\uparrow r}) = (A\cap A', (A\cap A')^{\uparrow r}$ ein f-Begriff und damit A∩A’∈$\boldsymbol{U}$(r). Dual zeigt man, dass auch $\boldsymbol{J}$(r) ein Hüllensystem ist. Der zu $\boldsymbol{U}$(r) gehörige **Hüllenoperator** ist $\varphi := ...^{\uparrow r\downarrow r}: \mathrm{Pot}G \rightarrow \boldsymbol{U}(r)$; d.h. die Hülle zu einem A⊆G ist der Umfang $A^{\uparrow r\downarrow r} \in \boldsymbol{U}(r)$. Der zu $\boldsymbol{J}$(r) gehörige Hüllen-operator ist $\psi := ...^{\downarrow r\uparrow r}: \mathrm{Pot}M \rightarrow \boldsymbol{J}(r)$; d.h. die Hülle zu einem B⊆M ist der Inhalt $B^{\downarrow r\uparrow r} \in \boldsymbol{J}(r)$.

Nach [1]/Hilfssatz 3,S.9 ist **jedes Hüllensystem ein vollständiger Verband**. Also sind auch die Halbordnung ($\boldsymbol{U}$(r), ⊆) der f-Begriffsumfänge, sowie die Halbordnung ($\boldsymbol{J}$(r), ⊆) der f-Begriffsinhalte eines f-Kontextes K_r je ein **vollständiger Verband**. $\boldsymbol{U}$(r) heiße der **„Umfangsverband“**, $\boldsymbol{J}$(r) der **„Inhaltsverband“** des Kontextes K_r=(G, M, r). Infimum und Supremum sehen so aus:

Für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq \boldsymbol{U}(r)$ ist $\quad \inf X = \bigcap X$, $\quad \sup X = (\bigcup X)^{\uparrow r\downarrow r}$

Für eine beliebige Teilmenge $Y \subseteq \boldsymbol{J}(r)$ ist $\quad \inf Y = \bigcap Y$, $\quad \sup Y = (\bigcup Y)^{\downarrow r\uparrow r}$.

Die Struktur der Verbände $\boldsymbol{U}$(r), $\boldsymbol{J}$(r) ist „dieselbe“ wie die des f-Begriffsverbandes $\underline{B}$(r), nur dass eben Umfänge und Inhalte „getrennt“ sind. Aus $\boldsymbol{U}$(r) und $\boldsymbol{J}$(r) kann man wieder einen formalen Kontext $K_{\underline{r\bullet}}$:= ($\boldsymbol{U}$(r), $\boldsymbol{J}$(r), $\underline{\mathbf{r\bullet}}$), machen, wo $\boldsymbol{U}$(r) die Menge der neuen „Gegenstände“, $\boldsymbol{J}$(r) die Menge neuen „Merkmale“ ist, und die Inzidenzrelation $\underline{\mathbf{r\bullet}}$ definiert ist durch: $A \; \underline{\mathbf{r\bullet}} \; B \; :\Leftrightarrow (A,B) \in \underline{B}(r)$ für $A \in \boldsymbol{U}(r)$, $B \in \boldsymbol{J}(r)$.

Wir nennen $K_{\underline{r\bullet}}$ vorläufig den „**•-Kontext“** zum f-Begriffs-Kontext K_r=(G,M,r). Mengenmäßig ist die Inzidenzrelation $\underline{\mathbf{r\bullet}}$ nichts anderes als der f-Begiffsverband $\underline{B}$(r) zum Ausgangskontext K_r, also: $\underline{\mathbf{r\bullet}} = \underline{B}(r)$.

Die durch $\underline{\mathbf{r\bullet}}$ induzierte Galoisverbindung zwischen $\boldsymbol{U}$(r) und $\boldsymbol{J}$(r) ist das Abbildungs-paar $\uparrow\underline{\mathbf{r\bullet}}: \mathrm{Pot}\boldsymbol{U}(r) \rightarrow \mathrm{Pot}\boldsymbol{J}(r)$, def. als $X^{\uparrow \underline{\mathbf{r\bullet}}} := \{B \in \boldsymbol{J}(r) \mid \forall A \in X: (A,B) \in \underline{B}(r)\}$ für $X \subseteq \boldsymbol{U}(r)$,
$\downarrow\underline{\mathbf{r\bullet}}: \mathrm{Pot}\boldsymbol{J}(r) \rightarrow \mathrm{Pot}\boldsymbol{U}(r)$, def. als $Y^{\downarrow \underline{\mathbf{r\bullet}}} := \{A \in \boldsymbol{U}(r) \mid \forall B \in Y: (A,B) \in \underline{B}(r)\}$ für $Y \subseteq \boldsymbol{J}(r)$.

Da bei gegebener Relation r in einem f-Begriff (A,B)∈$\underline{B}$(r) der Umfang A den Inhalt B und ebenso der Inhalt B der Umfang A *eindeutig* bestimmt (denn $A \rightarrow A^{\uparrow r}$=B, $B \rightarrow B^{\downarrow r}$=A sind ja *Abbildungen*) ergibt sich für Umfangsmengen $X \subseteq \boldsymbol{U}(r)$, bzw. Inhaltsmengen $Y \subseteq \boldsymbol{J}(r)$:

$$\text{(i)} \qquad X^{\uparrow \underline{\mathbf{r\bullet}}} = \begin{cases} \{B\} & \text{wenn } X = \{A\} \text{ und } (A,B) \in \underline{B}(r) \text{ ein f-Begriff ist} \\ \varnothing & \text{wenn X mehr als einen f-Begriffsumfang enthält} \\ \boldsymbol{J}(r) & \text{wenn } X = \varnothing \end{cases}$$

(ii) $$Y^{\downarrow\underline{r\bullet}} = \begin{cases} \{A\} & \text{wenn } Y = \{B\} \text{ und } (A,B) \in \underline{B}(r) \text{ ein f-Begriff ist} \\ \emptyset & \text{wenn Y mehr als einen f-Begriffsinhalt enthält} \\ \mathcal{U}(r) & \text{wenn } Y = \emptyset \end{cases}$$

Ein **formaler Begriff** des •-Kontextes $K_{\underline{r\bullet}}$ ist ein Paar (X,Y) mit $X \subseteq \mathcal{U}(r), Y \subseteq \mathcal{J}(r)$ und
$X^{\uparrow\underline{r\bullet}} = Y$, $Y^{\downarrow\underline{r\bullet}} = X$.

Wir nennen (X,Y) einen „**•-Begriff** “. Die Menge all dieser **•-Begriffe** sei mit $\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ notiert. Mit Einführung der Halbordnung „$\leq_{\underline{r\bullet}}$“ durch $(X,Y) \leq_{\underline{r\bullet}} (X',Y') :\Leftrightarrow X \subseteq X' \Leftrightarrow Y' \subseteq Y$ wird $(\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}}), \leq_{\underline{r\bullet}})$ nach dem Hauptsatz der FBA zu einem **vollständigen Verband,** er sei der **„•-Begriffsverband**“ zum •-Kontext $K_{\underline{r\bullet}} := (\mathcal{U}(r), \mathcal{J}(r), \underline{\mathbf{r\bullet}})$ genannt.

Die Struktur des •-Begriffsverbands $\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ ist viel „***primitiver***“ als die des ursprünglichen f-Begriffsverbandes $\underline{B}(r)$ und ergibt sich aus (i), (ii). **Abb.6a** zeigt sie: Die Verbands-EINS ist $(\mathcal{U}(r),\emptyset)$, die Verbands-NULL ist $(\emptyset, \mathcal{J}(r))$; alle anderen •-Begriffe – wir nennen sie die „echten“ – sind untereinander **unvergleichbar** im Sinne der Halbordnung $\leq_{\underline{r\bullet}}$ und haben die Form ({A}, {B}) (mit $(A,B) \in \underline{B}(r)$). „Echte“ •-Begriffe ({A},{B}) sind also nichts anderes als „verpackte“ f-Begriffe (A,B).

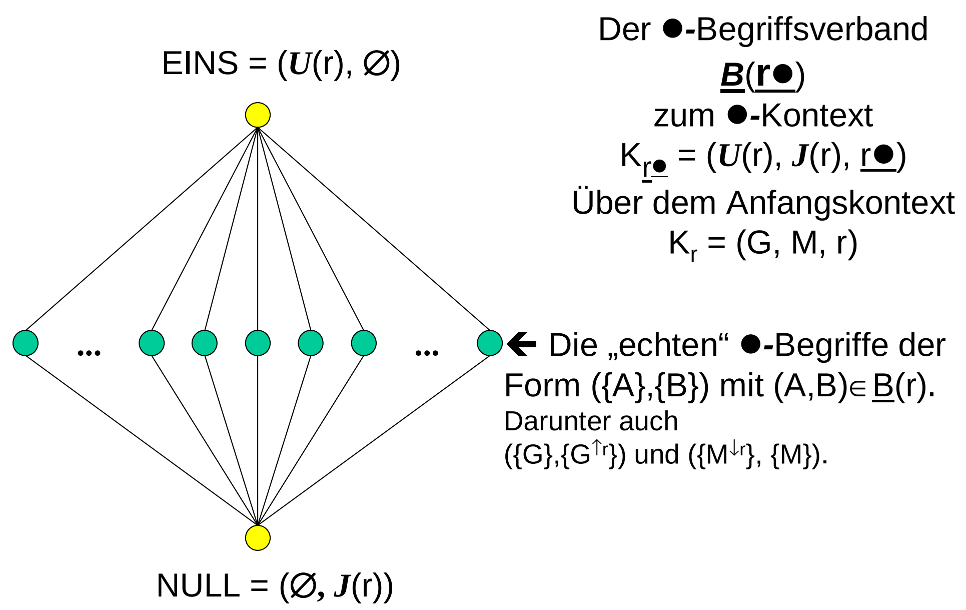
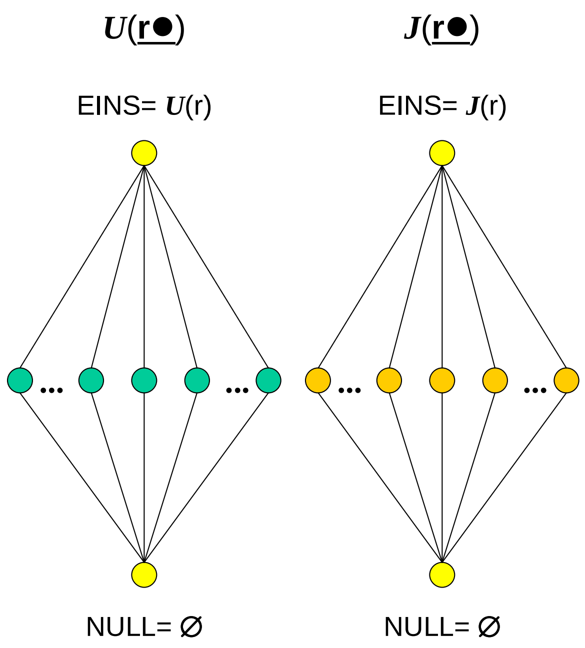


Abb.6a: Der **•-Begriffsverband** $\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ über den Anfangsverband $\underline{B}(r)$

Die Menge $\mathcal{U}(\underline{r\bullet})$ der Umfänge bzw. die Menge $\mathcal{J}(\underline{r\bullet})$ der Inhalte von •-Begriffen ist jeweils ein Hüllensystem mit Hüllenoperator $\ldots^{\uparrow r\bullet \downarrow r\bullet}$ bzw. $\ldots^{\downarrow r\bullet \uparrow r\bullet}$; daher sind $\mathcal{U}(\underline{r\bullet})$ und $\mathcal{J}(\underline{r\bullet})$ wieder **vollständige Verbände.** Ihre Struktur geht aus (i) bzw.(ii) hervor. Es ist dieselbe „*primitive*“ Struktur wie die des •-Begriffsverbandes $\mathcal{B}(\underline{r\bullet})$: Bei $\mathcal{U}(r\bullet)$ ist die EINS=$\mathcal{U}(r)$, die NULL=∅, die „echten“ Umfänge haben die Form {A}, wobei A der Umfang eines f-Begriffs ist. Bei $\mathcal{J}(r\bullet)$ ist die EINS=$\mathcal{J}(r)$, die NULL=∅, die „echten“ Inhalte haben die Form {B}, wobei B der Inhalt eines f-Begriffs ist. Wir nennen $\mathcal{U}(\underline{r\bullet})$

den **„•-Umfangsverband“**, $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$ den **„•-Inhaltsverband“**. Aus (i), (ii) ergibt sich:
$\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet}) = \{\boldsymbol{U}(r),\varnothing\} \cup \{\, \{A\} \mid A\in \boldsymbol{U}(r)\}$, $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet}) = \{\boldsymbol{J}(r),\varnothing\} \cup \{\, \{B\} \mid B\in \boldsymbol{J}(r)\}$, vgl. **Abb.6b**.



Der ●-Umfangsverband $\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet})$ und der ●-Inhalts-verband $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$ zum ●-Kontext $K_{\underline{r\bullet}} = (\boldsymbol{U}(r), \boldsymbol{J}(r), \underline{r\bullet})$ Über dem Anfangskontext $K_r = (G, M, r)$

← Die „echten“ ●-Umfänge $\{G\}, \{A\},.., \{M^{\downarrow r}\}$ von $\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet})$ bzw. ●-Inhalte $\{M\}, \{B\},.., \{G^{\uparrow r}\}$ von $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$, wobei $(G,G^{\uparrow r})$, (A,B), $(M^{\downarrow r},M) \in$ **$\underline{B}$(r)**.

Abb.6b: •-Umfangsverband $\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet})$ und •-Inhaltsverband $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$

Wir wiederholen das Spiel noch einmal, um deutlich zu machen, dass dabei nichts Neues mehr heraus kommt:

$\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet})$ als „Gegenstandsmenge“ und $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$ als „Merkmalmenge“ bilden den „••-Kontext“ $K_{r\bullet\bullet} :=$ $(\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet}), \boldsymbol{J}(\underline{r\bullet}), \underline{r\bullet\bullet})$, wobei die Inzidenzrelation $\underline{r\bullet\bullet}$ definiert ist durch $X\ \underline{r\bullet\bullet}\ Y$:⇔ $(X,Y)\in \mathcal{B}(\underline{r\bullet})$ für $X\in \boldsymbol{U}(\underline{r\bullet})$, $Y\in \boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$, also mengenmäßig: $\underline{r\bullet\bullet} = \mathcal{B}(\underline{r\bullet})$. Ist $(\uparrow\underline{r\bullet\bullet}, \downarrow\underline{r\bullet\bullet})$ die durch $\underline{r\bullet\bullet}$ gegebene Galoisverbindung zwischen $\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet})$ und $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$, so kann man **„••-Begriffe“** im Kontext $K_{r\bullet\bullet}$ definieren als Paare $(\underline{X}, \underline{Y})\in \mathrm{Pot}\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet})\times\mathrm{Pot}\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$, die der Bedingung $\underline{X}^{\uparrow r\bullet\bullet} = \underline{Y}$ und $\underline{Y}^{\downarrow r\bullet\bullet} = \underline{X}$ genügen. Die Menge $\mathcal{B}(r\bullet\bullet)$ all dieser „••-Begriffe“ wird mit der durch $(\underline{X},\underline{Y}) \le_{r\bullet\bullet} (\underline{X}',\underline{Y}')$:⇔ $\underline{X}\subseteq\underline{X}'$ ⇔ $\underline{Y}'\subseteq\underline{Y}$ definierten Halbordnung $\le_{r\bullet\bullet}$ zum **vollständigen „••-Begriffsverband“**. Die Menge $\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet\bullet})$ der *Umfänge* bzw. die der Inhalte, $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet\bullet})$, dieser ••-Begriffe sind beides wieder Hüllensysteme mit dem Hüllenoperator $...^{\uparrow r\bullet\bullet\downarrow r\bullet\bullet}$ bzw. $...^{\downarrow r\bullet\bullet\uparrow r\bullet\bullet}$ und bilden den (vollständigen) **„••-Umfangs-“-** bzw. **„••-Inhaltsverband“**. $\mathcal{B}(\underline{r\bullet\bullet})$, $\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet\bullet})$ und $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet\bullet})$. haben alle drei eine „dieselbe“ Struktur, die ähnlich „primitiv“ ist, wie schon die der Verbände $\mathcal{B}(\underline{r\bullet})$, $\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet})$ und $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet})$ – nur dass die Umfänge A, A', ... bzw. die Inhalte B, B',... zum Anfangskontext K_r noch einmal mehr {...}-geklammert sind: $\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet\bullet}) = \{\boldsymbol{U}(\underline{r\bullet}),\varnothing\}\cup\{\,\{\{A\}\}\mid A\in \boldsymbol{U}(r)\}$, $\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet\bullet}) = \{\boldsymbol{J}(\underline{r\bullet}),\varnothing\}\cup\{\,\{\{B\}\}\mid B\in \boldsymbol{J}(r)\}$

Die Strukturen, die mit der Reihe r, $\underline{r\bullet}$, $\underline{r\bullet\bullet}$ einhergehen, werden bei unserer Ontologiedefinition eine gewisse Rolle spielen, wenn es nicht nur um *eine* Anfangsrelation r geht, sondern um mehrere Relationen r, s,... .
Daraus entwickeln wir die sog. „F-Begriffe“ und danach die sog. „IN-Begriffe“. Die „IN-Begriffe“ entsprechen den „**Begriffen**“, welche die Informatiker bei einer konventionellen Ontologie meinen.

Das nachfolgende Merkdiagramm, Tab.1, fasst das bisher Gesagte zusammen.

Tab.1: Merkdiagramm für „Begriffsstufen“ zum formalen Kontext K_r

Stufe	Gegenstände / Umfänge	Inzidenzrelation / Begriffsverband	Merkmale / Inhalte	Kontext / Kommentar
Stufe 0	G Menge der „Gegenstände“ g von K_r	$\mathbf{r} \subseteq G \times M$. $g\ \mathbf{r}\ m \Leftrightarrow (g,m) \in \mathbf{r}$	M Menge der „Merkmale“ m von K_r	formaler **Kontext**: $K_r = (G,M,\mathbf{r})$
	PotG .	$\uparrow r$ $\downarrow r$	. PotM	$(\uparrow r, \downarrow r)$: Galoisverbindung zwischen G und M
	$\uparrow r \downarrow r$ Hüllenoperator auf PotG	$\underline{B}(r)$ $\subseteq$ PotG×PotM $(A,B) \in \underline{B}(r)$ $:\Leftrightarrow A^{\uparrow r}=B,\ B^{\downarrow r}=A$. $(A,B) \leq_r (A',B')$ $:\Leftrightarrow A \subseteq A',\ B' \subseteq B$	$\downarrow r \uparrow r$ Hüllenoperator auf PotM	$\underline{B}(r)$: Begriffsverband zu K_r. (A,B): ein f-Begriff von $\underline{B}(r)$ mit Umfang A und Inhalt B. $\leq_r$: Halbordnung auf $\underline{B}(r)$
Stufe 1	$\mathcal{U}(r)$. **Umfangsverband** = Menge d. „Gegenstände“ von $K_{\underline{r\bullet}}$ - d.s. die Umfänge A	$\underline{\mathbf{r\bullet}} \subseteq \mathcal{U}(r) \times \mathcal{J}(r)$. $A\ \underline{\mathbf{r\bullet}}\ B :\Leftrightarrow (A,B) \in \underline{B}(r)$, also $\underline{\mathbf{r\bullet}} = \underline{B}(r)$	$\mathcal{J}(r)$ **Inhaltsverband** = Mg. d. „Merkmale“ von $K_{\underline{r\bullet}}$ - d.s.die Inhalte B	„**•-Kontext**“ $K_{\underline{r\bullet}} = (\mathcal{U}(r), \mathcal{J}(r), \underline{r\bullet})$ (1. Stufe)
	Pot$\mathcal{U}$(r) .	$\uparrow \underline{\mathbf{r\bullet}}$ $\downarrow \underline{\mathbf{r\bullet}}$	. Pot$\mathcal{J}$(r)	$(\uparrow \underline{\mathbf{r\bullet}}, \downarrow \underline{\mathbf{r\bullet}})$: Galoisverbindung zwischen $\mathcal{U}(r)$ und $\mathcal{J}(r)$
	$\uparrow \underline{\mathbf{r\bullet}} \downarrow \underline{\mathbf{r\bullet}}$ Hüllenoperator auf Pot$\mathcal{U}$(r)	$\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ $\subseteq$ Pot$\mathcal{U}$(r)×Pot$\mathcal{J}$(r). $(X,Y) \in \mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ $:\Leftrightarrow X^{\uparrow \underline{r\bullet}}=Y,\ Y^{\downarrow \underline{r\bullet}}=X$. $(X,Y) \leq_{\underline{r\bullet}} (X',Y') :\Leftrightarrow$ $X \subseteq X',\ Y' \subseteq Y$	$\downarrow \underline{\mathbf{r\bullet}} \uparrow \underline{\mathbf{r\bullet}}$ Hüllenoperator auf Pot$\mathcal{J}$(r)	$\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$: Begriffsverband“ zu $\mathbf{K}_{\underline{r\bullet}}$. $\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ ist „primitiv“. (X,Y): ein $\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$-Begriff $\leq_{\underline{r\bullet}}$: Halbordnung auf $\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$.
Stufe 2	$\mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$. **•-Umfangsverband** = Menge d. „Gegenstände“ von $\mathbf{K}_{\underline{r\bullet\bullet}}$. Es ist $\mathcal{U}(\underline{r\bullet}) = \{\mathcal{U}(r), \varnothing\} \cup \{\{A\} \mid A \in \mathcal{U}(r)\}$	$\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}} \subseteq \mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet}}) \times \mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$. $X\ \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}\ Y$ $:\Leftrightarrow (X,Y) \in \mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$, also $\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}} = \mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$	. $\mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ **•-Inhaltsverband** = Menge d.„Merkmale“ von $\mathbf{K}_{\underline{r\bullet\bullet}}$. Es ist $\mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ = $\{\mathcal{J}(r), \varnothing\} \cup \{\{B\} \mid B \in \mathcal{J}(r)\}$	„**••-Kontext**“ $\mathbf{K}_{\underline{r\bullet\bullet}}$= $(\mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet}}), \mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet}}), \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$ (2. Stufe)
	Pot$\mathcal{U}(\underline{r\bullet})$....	$\uparrow \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}$ $\downarrow \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}$	. Pot$\mathcal{J}(\underline{r\bullet})$	$(\uparrow \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}, \downarrow \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$: Galoisverbindung zw. $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ und $\mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$
	$\uparrow \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}} \downarrow \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}$ Hüllenoperator auf Pot$\mathcal{U}$(r•)	$\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}) \subseteq$ Pot$\mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$×Pot$\mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$. $(X,Y) \in \mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$ $:\Leftrightarrow X^{\uparrow \underline{r\bullet\bullet}} = Y,\ Y^{\downarrow \underline{r\bullet\bullet}} = X$. $(X,Y) \leq_{r\bullet\bullet} (X',Y') :\Leftrightarrow$ $X \subseteq X',\ Y' \subseteq Y$	$\downarrow \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}} \uparrow \underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}$ Hüllenoperator auf Pot$\mathcal{J}$(r•)	$\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$: Begriffsverband zu $\mathbf{K}_{r\bullet\bullet}$. $\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet}})$ ist „primitiv“ (X,Y): ein $\mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$-Begr. $\leq_{r\bullet\bullet}$: Halbordnung auf $\mathcal{B}(\mathbf{r\bullet\bullet})$.
Stufe 3	$\mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$. **••-Umfangsverband** = Menge d. „Gegenstände“ von $K_{r\bullet\bullet\bullet}$ Es ist $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$ = $\{\mathcal{U}(\underline{r\bullet}), \varnothing\} \cup \{\ \{\{A\}\}\ \mid A \in \mathcal{U}(r)\}$	$\underline{\mathbf{r\bullet\bullet\bullet}} \subseteq \mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}) \times \mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$. $X\ \underline{\mathbf{r\bullet\bullet\bullet}}\ Y$ $:\Leftrightarrow (X,Y) \in \mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$, also $\underline{\mathbf{r\bullet\bullet\bullet}} = \mathcal{B}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$	. $\mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$ **••-Inhaltsverband** = Menge d.„Merkmale“ von $K_{r\bullet\bullet\bullet}$ Es ist $\mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}})$= $\{\mathcal{J}(\underline{r\bullet}), \varnothing\} \cup \{\ \{\{B\}\} \mid B \in \mathcal{J}(r)\}$	„**•••-Kontext**“ $\mathbf{K}_{\underline{r\bullet\bullet\bullet}}$= $(\mathcal{U}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}), \mathcal{J}(\underline{\mathbf{r\bullet\bullet}}), \underline{\mathbf{r\bullet\bullet\bullet}})$ (3. Stufe)
usw.				

2.2.5.4 Die Hauptarbeit bei der Anwendung des Konzepts „f-Kontext“

Hier will ich kurz auf etwas aufmerksam machen, das im noch sehr mathematisch abgefassten Standardwerk [1] der **FBA** trotz vieler Beispiele zu kurz kommt. Die in [1] gegebenen vielen Kontext- und Verbands-Beispiele fallen dort meist „vom Himmel“ und dienen zur Erläuterung der Theorie. Die ***Hauptarbeit*** bei der kollektiven Entwicklung eines oder mehrerer f-Kontexte am konkreten Anwendungsproblem wird nicht besonders betont. Sie besteht m.E. aus folgendem:

f-Kontexte wendet man auf komplexe, *außermathematisch* formulierte Sachverhalte / Sachverhaltssysteme an, zum Beispiel auf einen Sachverhalt, der auf vielen Textseiten verbal und bildlich dargestellt ist. Es gilt, eine ***Struktur*** im Sachverhalt ausfindig zu machen, mit welcher man ihn dann weiter analysieren kann. In der Beschreibung des Sachverhalts werden Ausdrücke auffallen, die der Sachbearbeitergruppe, welche ihn strukturieren soll, als für ihn *„besonders relevant“* erscheinen. Das können Fachtermini in Form von Substantiva, Adjektiva, Adverbien und **Verben**, sowie andere Sprachelemente sein, die durch Verben verbunden sind. Es können aber auch ganze einfache Teilaussagen der Form *Subjekt – Prädikat* sein – und schließlich können es auch Schaubilder sein, die den Sachtext ergänzen. Alle diese Elemente notiert man sich zunächst in einer **Liste L**. Die ***Hauptarbeit*** besteht nun darin, einen – oder vielleicht sogar mehrere – „***Kontextrahmen***“ aus **L** zu erstellen. Mit „*Kontextrahmen*“ meine ich die Einteilung der **Liste L** in „*Relationen*“, „*Gegenstände*“ (einzutragen in die linke Randspalte der Kontexttabelle) und „*Merkmale*“ (einzutragen in die Kopfzeile der Kontexttabelle) – die Reihenfolge der Einträge spielt dabei keine oder eine untergeordnete Rolle. Bei dieser Einteilung kann einem die intuitive Vorstellung, was ein „Gegenstand“, was ein „Merkmal“ sei, helfen; sie kann die Erstellung des Kontextrahmens aber auch ***erheblich behindern***, wenn man meint, seine intuitive Vorstellung von „Gegenstand“ / „Merkmal“ ***absolut*** (also kontext***un***abhängig / unabhängig vom untersuchten Sachverhalt) einsetzen zu müssen, ohne die im Kontext relevanten *Relationen* zu berücksichtigen! Die **Verben** deuten dabei am deutlichsten hin auf (binäre) Relationen, welche „Gegenstände“ mit „Merkmalen“ verbinden. Trifft man auf sprachliche Ausdrücke, bei denen ein Verb mehr als zwei „Gegenstände“ oder „Merkmale“ verbindet, also auf eine mehr als 2-stellige Relation hinweist – kleines Beispiel:

> „`Christoph` *wurde am* `03.10.1938` *in* `Bremen` *geboren als Sohn des* `Schauspielers` `Martin`“,

– so kann man das formal meist in mehrere, nur **2-stellige** Relationsformen umwandeln, die durch das logische UND verknüpft sind:

„`Christoph` *<u>wurde geboren am</u>* `03.10.1938`	UND
`Christoph` *<u>wurde geboren in</u>* `Bremen`	UND
`Christoph` *<u>ist Sohn von</u>* `Martin`	UND
`Martin` *<u>war von Beruf</u>* `Schauspieler`“	

In diesem Sachverhaltsteil kommen also vier binäre Relationen

r:= „... <u>wurde geboren am</u> ...“, s:= *„... <u>wurde geboren in</u> ...“*,

t:= „... <u>ist Sohn von</u> ...“, u:= „... <u>war von Beruf</u> ...“

vor. Formal gehört zu jeder dieser Relationen je *ein* f-Kontext

$$K_r = (G_r, M_r, r), K_s = (G_s, M_s, s), K_t = (G_t, M_t, t), K_u = (G_u, M_u, u).$$

Zu den „Gegenständen“ zählen `Christoph` und `Martin`; zu den „Merkmanlen“ zählen `03.10.1938`, `Bremen`, `Martin` und `Schauspieler`. Alle Kontexte kann man in einer Kontexttabelle (IN, IN, *REL*) vereinigen, indem man die gemeinsame „Instanzenmenge“ IN: = $G_r \cup M_r \cup G_s \cup M_s \cup G_t \cup M_t, \cup G_u \cup M_u \cup$ {ggf. ein paar Zusatzelemente} sowohl als „Gegenstandsmenge“ als auch als „Merkmalmenge“ nimmt, aber die Relationen r, s, t, u durch unterschiedliche Kreuzchenarten $\boxtimes_r$, $\boxtimes_s$,... kennzeichnet.

Das angegebene kleine Beispiel ist ziemlich trivial. Hat man aber ein „großes“ Sachverhaltssystem zu strukturieren, so ist die Erstellung des zweckmäßigsten ***Kontextrahmens*** (d.i. das Herausfinden der „Relationen“ / „Gegenstände“ / „Merkmale“) eine anspruchsvolle Aufgabe. Dafür gibt es *kein Kochrezept*, weil man ja von einem *außermathematisch* formulierten Sachverhalt(ssystem) ausgehen muss. Ist der Kontextrahmen erst einmal erstellt (eventuell erst nach mehreren Fehlversuchen, bei denen keine Einigkeit im Team der Sachbearbeiter erzielt werden konnte), so sind die *Kreuzchen* $\boxtimes_r$, $\boxtimes_s$,... in die Tabelle meist relativ schnell eingetragen (und die gemeinten Relationen damit festgelegt), weil das vorbewusst zum Teil schon bei der Erstellung des *Kontextrahmens* entschieden wurde.

Ein Kreuzchen $\boxtimes_r$ im Kreuzpunkt einer g-Zeile und einer m-Spalte, bedeutet, dass der Gegenstand g mit dem Merkmal m „etwas zu tun hat“ im Sinne einer gemeinten Relation **r**. Bald nach den ersten Kreuzchen ist man sich eventuell schon klar, „*welche*“ Relation r = {(g,m) **|** **...**} mit den Kreuzchen gemeint ist, und kann ihr einen ***<u>sprechenden Namen</u>*** geben – das ist besonders dann leicht, wenn auf die gemeinte Relation durch ein bestimmtes **Verb** im Sachverhalt hingewiesen ist. (In unserer Beschreibung der abstrakten mathematischen, noch uninterpretierten FBA-Struktur werden Relationen nur mit ***„r“***, ***„s“***, *...* notiert; das sind also noch keine „*sprechenden*“ Namen)**.** [10]

Die *geschickte Namensgebung* für „Relationen“ / „Gegenstände“ / „Merkmale“ (zu denen umgangssprachlich nicht immer schon „natürliche“ Namen zur Verfügung stehen!) spielt beim Aufbau einer Ontologie eine *<u>immens wichtige Rolle</u>*, denn sie hat mit der „Bedeutung“ zu tun, die man den verwendeten Termini zumisst. „Bedeutung“ aber – dieses total intuitive Wort – ist mit der Erstellung einer Ontologie untrennbar verknüpft. [11]

Selbstverständlich wird es daher im konkreten Fall – und je nach Zusammensetzung des Sachbearbeiterteams – ***mehrere*** Möglichkeiten geben, wie die oben erwähnte **Liste L** der relevanten Termini in „Relationen“, „Gegenstände“ und „Merkmale“ aufzuteilen ist. Daher wird es zu einem Sachverhaltssystem auch mehrere Möglichkeiten geben, durch welche „**f-Begriffe**“ es charakterisiert werden kann. Der Grund ist, dass die Denkweisen, Vorstellungen und die Erfahrung der im Team versammelten Sachbearbeiter selbst einen „KONTEXT“ bilden, der sich im untersuchten Sachverhalt nur dann teilweise widerspiegelt, wenn die Sachbearbeiter „mit dem Sachverhalt

[10] **Übungsaufgabe:** Wir schildern folgenden Sachverhalt mit dem Titel *„Kindererziehung im Mütterclan“.* Der Sachverhalt ist folgender: „Der Clan besteht aus drei Müttern und sechs Kindern. Jede Mutter erzieht genau drei Kinder. Zu zwei Kindern findet sich genau eine Mutter, die beide erzieht. Zu zwei Müttern findet sich genau ein Kind, das von beiden erzogen wird.“ Es handelt sich hier um nur die *eine* Relation r:= „... *erzieht*...“ – Erstelle zu diesem Sachverhalt einen formalen Kontext und ermittle den f-Begriffsverband! (Anm.: Dieser Sachverhalt ist übrigens ein Modell für eine endliche „Projektive Geometrie“.)

[11] **Grundsätzliche Anmerkung:** Hinter jedem Strukturangebot, also der angebotenen Methode, wie man eine „Ontologie“ aufbauen könnte, steckt bereits eine gewisse „Metaphysik“ (auch hinter der FBA-Methode!). Wer behauptet, eine „metaphysik-freie“ Aufbaumethode für eine Ontologie angeben zu können, dem ist entweder die dahintersteckende „Metaphysik“ nicht bewusst oder er verabsolutiert – ebenfalls meist unbewusst – „seine Metaphysik“. (Das sieht man u.a. beim philosophischen Ontologen *Roman Ingarden* [19] oder auch an den sogenannten „Top-Level-Ontologien“ einiger theoretischer Informatiker [etwa bei [29] *H. Herre* „General Formal Ontology“, Uni Leipzig, 2006] – in ihnen drückt sich nach meinem Empfinden meist „reine antike oder mittelalterliche Metaphysik“ aus, nämlich die Vorstellung, dass „die Welt“ aus „Dingen und Eigenschaften“ ***bestehe***, und dass so etwas unabhängig von menschlicher Perzeption sei. Dem FBA-Konzept dagegen liegt folgende „Metaphysik“ zugrunde: Dass „die Welt“ in „Dinge & Eigenschaften“ aufteilbar sei, ist ein dem menschlichen (kollektiven und damit auch individuellen) Bewusstsein eigentümliches Konzept, mit dem eine Gesellschaft / Kultur gut auskommt: So, wie dieses Konzept im Umfeld einer menschlichen Kultur / Gesellschaft angewendet wird, so wird mit „der Welt“ halt (in dieser Kultur / Gesellschaft) umgegangen. „Die Welt an sich“ – also unabhängig von unserer Einbettung in sie – zu betrachten, ist dabei eine ziemlich unbrauchbare oder gar abwegige Vorstellung. Diese „FBA-Metaphysik“ ist m.E. auch die geeignetste für den Umgang aller modernen Naturwissenschaften mit „der Welt“.

vertraut sind“ und ihre Denkweisen / Vorstellungen auf ihn eingestellt haben. Die „Begriffe“ sind eben nur das ***Tertiäre***; das ***Sekundäre*** ist das zu untersuchende Sachverhaltssystem; – das ***Primäre*** aber ist der oben erwähnte, schwer fassbare „KONTEXT“. – Und das macht die Schwierigkeiten aus, die auch durch das FBA-Konzept nicht immer beseitigt werden können. Mit dem FBA-Konzept hat man aber wenigstens eine ***einfache Methode***, welche die Gefahr der Beliebigkeit bei der Ermittlung von Begriffen, die auf rein intuitivem Wege unübersehbar ist, einschränkt; und welche andererseits weniger belastet ist durch überalterte (ontologische) Traditionen, die in einer davon beeinflussten „Top-Level-Ontologie“ einem Sachbearbeiterteam eventuell aufgezwungen werden und mit dem untersuchten Sachverhaltssystem eventuell wenig zu tun haben. [11] [12] [13]

Wie man aus dem Geschilderten eine „Ontologie“ macht und diese durch nur ***<u>einen</u>*** *formalen Kontext* beschreibt, das ist gerade das ***Hauptanliegen dieser Note***.

2.2.5.5 Anmerkung zu einer etwas „aufgeweichteren“ Begriffsdefinition

Die hier zugrundegelegte „strenge“ f-Begriffs-Definition nach [1] (FBA) ist zwar eine sehr schöne und weittragende Definition für das, was man einen „Begriff“ nennen könnte, aber sie ist nicht die einzige ***relationen***-basierte Möglichkeit. Eine Anmerkung aus [30] (***W. G. Stock***, 2009) führt mich zu einer Begriffsdefinition, die „etwas aufgeweichter“ ist als die „strenge“ FBA-Definition für „f-Begriff“: Sie berücksichtigt auch die ***Wittgenstein***-sche „**Familienähnlichkeit**“ [vgl. dazu etwa [32]], die überhaupt nicht in konventionelle Begriffsdefinitionen passt, was ein Manko ist. Die Idee ist in [30] prädikatenlogisch formuliert. Ich skizziere sie hier einmal in **FBA-Notation**.

Wenn wir bei einem „Begriff“ β unterscheiden zwischen denjenigen Merkmalen, die *allen* unter den Begriff β fallenden Gegenständen *„zwingend zukommen“* und solchen die wenigstens einigen unter β fallenden Gegenständen *„auch zukommen können“* (*Stock* nennt sie „gemüseartige Merkmale“); und wenn wir diese Idee sogleich

---

[12] Es ist klar, dass nicht alles, was man in einem Sachverhalt intuitiv als „Begriff“ ansieht, als ein „f-Begriff“, durch einen aussagekräftigen „Umfang“ und „Inhalt“ charakterisiert werden kann. Dazu zählen Termini, die man für die sog. „***Allgemeinbegriffe***“ (*Universalia*) benutzt; („schön“ ist eben „schön“; wenn man substantiviert und „Schönheit“ durch „schön“ zu charakterisieren versucht, oder umgekehrt, kommt man sprachlich ins Schleudern; damit hat sich schon ***Platon*** ergebnislos herumgeschlagen.) Im FBA-Konzept werden solche „Allgemeinbegriffe“ nicht als aussagekräftige formale Begriffe charakterisiert, sondern dienen ggf. nur als „Gegenstände“ oder „Merkmale“, die entweder mit sich selbst einen „isolierten“ f-Begriff ergeben oder als „Merkmal“ praktisch allen Gegenständen (oder gar keinen) des f-Kontextes zukommen bzw. als „Gegenstand“ die praktisch alle (oder gar keine) Merkmale des f-Kontextes bekommen. Wir beschreiben z.B. 4 Möglichkeiten – der Einfachheit halber an Hand der Ermittlung des Kontextrahmens für nur *einen* formalen Kontext (G, M, r). Sei β der Name für einen Allgemeinbegriff: Fall (a): β fungiere im Kontextrahmen sowohl als „Gegenstand“ als auch als „Merkmal“: In der Kontexttabelle ergebe sich nur *ein* Kreuzchen ☒ im Schnittpunkt der β-Zeile und der β-Spalte. Oder Fall (b): β fungiere nur als „Merkmal“, das *jedem* Gegenstand g zukommt: Im Schnittpunkt jeder g-Zeile und der β-Spalte steht dann ein ☒. Oder Fall (c): β fungiere nur als „Gegenstand“ auf den *alle* Merkmale m zutreffen: Im Schnittpunkt der β-Zeile und jeder m-Spalte steht ein ☒. Oder Fall (d): Man kann die Fälle (b) und (c) kombinieren. – Im Fall (a) ist ({β}, {β}) „singulärer“ f-Begriff: D.h.({β}, {β}) ist mit allen anderen Begriffen unvergleichbar im Sinne der Halbordnung des Begriffsverbandes. Lässt man ({β}, {β}) einfach weg, so entsteht ein „Rest-Kontext“ bzw. ein „Rest-Begriffsverband“ der alle anderen Begriffe in ihrer Halbordnung untereinander genau so beschreibt, wie der ursprüngliche Begriffsverband. In den Fällen (b), (c) und (c) ergibt das FBA-Konzept, dass die Kontexttabelle „bereinigt“ werden kann, indem die (g,β) bzw. die (β,m) alle „gestrichen“ werden können, ohne dass der betreffende Begriffsverband seine Struktur ändert. Das Wort „β“ ist dann gar nicht als „Gegenstand“ oder als „Merkmal“ notwendig, sondern es kann zu etwas anderem verwendet werden – z.B. als Name (oder Teilbezeichnung) für den ganzen Kontext selbst.

[13] Mancher mag sicht fragen, warum die in der oben erwähnten **„Liste L“** aufzuführenden „relevanten Termini“ des untersuchten Sachverhalts, die zwecks Erstellung eines Kontextrahmens in „Relationen“ und „Instanzen“ („Gegenstände“ / „Merkmale“) aufzuteilen sind, nicht selbst bereits „Begriffe“ genannt werden dürfen. – Selbstverständlich dürfen sie das! Die Unterscheidung zwischen „Instanzen“, „Relationen“ und (daraus zu entwickelnden) „Begriffen“ absolut verstehen zu wollen, wäre ***ziemlich unsinnig***! Hat man (z.B. mit unserem formalen FBA-Konzept) einmal „Begriffe“ entwickelt, so werden sich – auf einer „nächst höheren“ Abstraktionsebene – stets „höhere Relationen“ ergeben, mit denen man aus den bisherigen „Begriffen“ als den neuen „Instanzen“ wieder Kontexte und damit „Begriffe“ (man könnte diese dann „Super-Begriffe“ nennen) ergeben. Im FBA-Konzept deuten wir das in Kap.2.2.5.3 und später in Kap.3.3.4 bzw. Kap.3.3.6 mit dem Schlagwort „Begriffsstufen“ an.

dualisieren (was *Stock* nicht tut, was aber ein *wichtiges Kennzeichen des **FBA-Konzepts*** ist!), indem wir auch bei den Gegenständen von β unterscheiden zwischen denjenigen, die *„zwingend unter β fallen“* und solchen, die *„auch unter β fallen können“*, dann ergibt sich folgendes „FBA-Konzept“ (das taucht im FBA-Standardwerk [1] nicht so wie hier, sondern nur im Rahmen der sog. „*Merkmalexploration*“,[1]/§2.3, S,79ff, auf.)**:**

Sei K_r = (G, M, r) ein (endlicher) f-Kontext. Neben der „Galoisverbindung“ ($\uparrow$r, $\downarrow$r) zwischen der Gegenstandsmenge G und der Merkmalmenge M führen wir eine **„Anti-Galois-Verbindung“** ($\ulcorner$r, $\lrcorner$r) ein mit folgender Definition:

$\ulcorner r$: PotG$\to$PotM,	def. durch	$A^{\ulcorner r} := \{y\in M \mid \exists g\in A: g\mathbf{r}y\}$	für $A\subseteq G$,
$\lrcorner r$: PotM$\to$PotG,	def. durch	$B^{\lrcorner r} := \{x\in G \mid \exists m\in B: x\mathbf{r}m\}$	für $B\subseteq M$.

Daraus folgt dom(r)= $M^{\lrcorner r}$, range(r) = $G^{\ulcorner r}$. Setzen wir $\varphi := \ulcorner r \lrcorner r$ und $\psi := \lrcorner r \ulcorner r$, dann folgt für irgendewelche Teilmengen A, A'$\subseteq$G, B, B'$\subseteq$M:

(i) $(A\cup A')^{\varphi} = A^{\varphi}\cup A'^{\varphi}$, $(B\cup B')^{\psi}=B^{\psi}\cup B'^{\psi}$ und damit:

(ii) $A\subseteq A^{\varphi}\subseteq A^{\varphi\varphi}\subseteq A^{\varphi\varphi\varphi}\subseteq\ldots\subseteq \mathrm{dom}(r)$, $B\subseteq B^{\psi}\subseteq B^{\psi\psi}\subseteq B^{\psi\psi\psi}\subseteq\ldots\subseteq \mathrm{range}(r)$.

Ist A der Umfang, B der Inhalt eines f-Begriffs (A,B) im f-Kontext (G, M, r) – also A$\subseteq$G, B$\subseteq$M, $A^{\uparrow r}$=B, $B^{\downarrow r}$=A –, so könnten wir daneben auch $A^{\ulcorner r}$ und $B^{\lrcorner r}$ bilden; wobei sich $A\subseteq B^{\lrcorner r}$, $B\subseteq A^{\ulcorner r}$ ergibt. Man könnte dann z.B. $A_r := B^{\lrcorner r} - A$ den „***Nebenumfang***“, $B^r := A^{\ulcorner r} - B$ den „***Nebeninhalt***“ und etwa das Paar ($A\cup A_r$; $B\cup B^r$) den **„aufgeweichten Begriff**“ zum f-Begriff (A,B) nennen[14]. Wir könnten damit – wie im folgenden Kap.3.1 ausgehend von einer Menge **REL_0** „praktisch relevanter“ Relationen – eine Ontologie aufbauen, die auch die *Wittgenstein*-sche „Familienähnlichkeit“ berücksichtigt.

Das tun wir in dieser Note nicht, sondern wir bleiben bei der **„strengen“ FBA-Definition für „f-Begriff“ gemäß Kap.2.2.5.2.** (Die Untersuchung einer Ontologie-Definition mit „aufgeweichten Begriffen“ bleibt einer weiteren Note vorbehalten).

3 Eine O-Definition auf FBA-Basis

3.1 Die Hauptkomponenten der O-Definition

Aus den „Hauptkomponenten“ werden alle anderen für eine Ontologie relevanten Komponenten abgeleitet. Die Zusammenstellung der „Hauptkomponenten“ weist zugleich darauf hin, wo die Hauptarbeit bei der *Realisierung* einer Ontologie zu leisten ist. *Der wesentliche Unterschied zu konventionellen O-Definitionen* besteht darin, dass wir nicht von „Begriffen“ und nicht von Relationen zwischen „Begriffen“, sondern von *Relationen auf einer „offenen“ Menge von sog. „Instanzen“* ausgehen: Diese Umstellung führt – zusammen mit dem FBA-Konzept – zu einem reichen Reservoir an mathematischen Strukturen, die den konventionellen O-Definitionen ***unbekannt*** sind, die aber als Leitlinien für die Realisierung einer Ontologie sehr hilfreich sein können.

Def.7: Als „**Ontologie**“ bezeichne ich ein Tupel **O := (IN, REL, LEX, BEZ)** mit folgenden Hauptkomponenten:

(1) **IN** sei eine **endliche** (nicht-leere) **Menge**, deren Elemente wir als „**Instanzen“** bezeichnen. **IN** ist die („offene“) *Grundmenge* der Ontologie. Die einzige „Struktur“, die IN haben soll, ist: IN enthalte eine besondere **„Dummy-Instanz“ d**. Diese Dummy-Instanz wird eine Rolle bei den gleich einzuführenden „praktisch relevanten“ Relationen der Ontologie spielen.

Anmerkung-1: Die x,y,...$\in$**IN** sind (außer d) zunächst einfach als *Variablen* auf einer noch ***ungedeuteten, „offenen“*** und jederzeit erweiterbaren Grundmenge zu behandeln, die wir mit „**IN**“ bezeichnen. Erst mit Hinzunahme der nächsten Komponente **REL_0** bzw. **REL** kommt „**Struktur**“ in die Sache.

---

[14] Für den „Nebenumfang“ bzw. „Nebeninhalt“ auch höhere Ableitungen der „Anti-Galoisverbindung“ heranzuziehen, halte ich für unangebracht, da diese wegen (ii) in endlich vielen Wiederholungsschritten schließlich auf dom(r) bzw. range(r) führt, also auf keine Aussage über den speziellen f-Begriff (A,B).

(2) **REL_0** sei eine **endliche Menge *zweistelliger*** Relationen, **$r \subset IN\text{-}\{d\} \times IN\text{-}\{d\}$,** deren Elemente r, wir als die für O „***praktisch relevanten*** **IN-Relationen**" bezeichnen. **triv** := IN×IN heiße die „**triviale Relation**"; sie gehört ***nicht*** zu REL_0; d∈IN ist die in (1) hervorgehobene „*Dummy-Instanz*". Für die weiteren Überlegungen erweist es sich als nützlich, REL_0 folgendermaßen zu einer Menge **REL** rekursiv zu ergänzen:

Def.7.1.REL:

(i) Alle $r \in REL_0$ sollen zu REL gehören: $REL_0 \subseteq REL$.

(ii) Mit r, s∈REL soll auch $r \cap s$ zu REL gehören: $r \cap s \in REL$.

REL heiße die Menge der für die Ontologie „***mathematisch relevanten*** **IN-Relationen**". **triv** ist ***keine*** IN-Relation. [15]

Die Namensmengen IN und REL seien zueinander „fremd" gedacht, $IN \cap REL = \emptyset$. Wir wählen die Bezeichnung „*IN-Relation*", weil jedes r∈REL eine binäre Relation auf der *Instanzenmenge* **IN** ist.

Anmerkung-2: Die Komponente, *welche die gesamte Ontologie bestimmt,* ist die Menge REL_0 der praktisch relevanten IN-Relationen. Die Einführung der „Dummy-Instanz" d∈IN und der Ausschluss der trivialen Relation **triv**=IN×IN schränken die Auswahl der Menge **REL_0** in keiner Weise inhaltlich ein. Diese Festsetzung ist nur dazu da, später die Darstellung der **formalen Kontexte** und der zugehörigen Begriffsverbände zu den IN-Relationen r∈REL zu vereinheitlichen.

Anmerkung-3 – nur binäre Relationen?: Aus den 2-stelligen IN-Relationen auf der Menge IN kann man mit logischen Operatoren und Quantoren formal **beliebig-stellige Relationen** herstellen. Unsere natürlichen Sprachen sind jedoch so komplex, dass es fraglich erscheint, ob *jede* sprachliche Schilderung in *dieser* Weise auf nur binäre Relationen zurückführbar ist. Ein mathematischer Ansatz mit mehr als nur 2-stelligen Relationen steht z.B. bei ***K.E. Wolff*** in [7]: „*Power Context Families*". Da wir aber hier nur das *Grundprinzip* mit einer mathematisch möglichst ***einfachen*** und trotzdem einigermaßen ***voll ausgebildeten*** O-Definition vorstellen wollen, beschränken wir uns auf **2-stellige** Basis-Relationen: eben die o.a. **„IN-Relationen"**.

(3) **LEX** :=LC∪LR sei eine **endliche Menge**, genannt: das „**Lexikon**", deren Elemente „**Symbole**" heißen mögen.

(4) **BEZ** :=$\{bez_{LC}, bez_{LR}\}$ hat zwei „**Bezeichnungsrelationen**" $bez_{LC} \subseteq LC \times C(REL)$, $bez_{LR} \subseteq LR \times \underline{REL}$, wobei C(REL) bzw. <u>REL</u> die Mengen der später noch abzuleitenden sog. „*IN-Begriffe*" bzw. der sog. „*C-Relationen*" sind.

Die Symbole des Lexikons sind als umgangssprachliche Elemente („Stichwörter" / „Schlagwörter") einer ***Fachsprache*** anzusehen, deren Struktur und Termini die Ontologie spezifizieren / präzisieren / vereinheitlichen / in Beziehung setzen soll. Die Symbole x∈LC sind Bezeichner für die sog. „IN-Begriffe" c∈C(REL), die σ∈LR Bezeichner für die sog. „C-Relationen" **<u>r•</u>**∈<u>REL</u>. (C(REL) und <u>REL</u> sind später abzuleitende O-Komponenten.)

Ein Symbol σ∈LR z.B. mag mehrere Relationen <u>r•</u>, <u>s•</u>,...∈<u>REL</u> bezeichnen. Diese sind dann „**Homonyme**" von σ. Dieselbe Relation <u>r•</u> mag aber auch von mehreren Symbolen ρ_1, ρ_1,... bezeichnet sein. Diese sind dann „**Synonyme**" von <u>r•</u>.

Im Gegensatz zu den Symbolen von LEX sind die Namen der C-Relationen und der IN-Begriffe als ***normiert*** und als ***systeminterne*** Elemente der Ontologie anzusehen. Damit aber im Lexikon keine Bezeichnung „fehlt", sollte für die Namensmengen C(REL), <u>REL</u> immer

$C(REL) \subseteq LC$, $\underline{REL} \subseteq LR$

angenommen werden. Das Stück **(IN, REL)** nennen wir die „***Systeminterna***"; die

[15] Wichtig ist uns in Def.7(2) nur, dass die Menge **REL_0** der praktisch relevanten IN-Relationen die triviale Relation **triv**:= IN×IN ***nicht*** enthält (daher die Dummy-Instanz d in (1) von Def.7). Bei der Konstruktion von REL hätten wir uns auch so entscheiden können: (i) $REL_0 \subseteq REL$; (ii) mit r,s∈REL auch $r \cap s$, $r \cup s \in REL$. Damit wäre REL selbst ein *vollständiger Verband* mit $r \wedge s = r \cap s$, $r \vee s = r \cup s$, $\mathbf{1}_{REL}$ (≠**triv**) wäre die Vereinigungung, $\mathbf{0}_{REL}$ wäre der Durchschnitt aller $r \in REL_0$. Für die weitere Struktur der Ontologie ist es unerheblich, ob wir REL wie in Def.7.1 oder alternativi wie eben geschildert konstruieren. Wir bleiben bei der obigen Festlegung. Sie hat den Vorteil, dass bei jeder (die Dummy-Instanz ausschließenden) Ontologie-Erweiterung $REL_0 \Rightarrow REL_0^+$ stets **triv** als EINS genommen werden kann.

Schnittstelle **(LEX, BEZ) | (IN, REL)** nennen wir die „***Userschnittstelle***“ der Ontologie.

Anmerkung-4: Das „Lexikon“ **LEX** und die „**Userschnittstelle**“ sehe ich als notwendigen Teil einer jeden O-Definition an: Für die konsistente Kommunikation zwischen den Komponenten der *Systeminterna* **(IN, REL)** ist die *Namensnormierung* notwendig. In der Praxis jedoch – d.h. außerhalb der Systeminterna – ist eine strikte Namensnormierung selten; daher sind LEX und BEZ notwendig. Letztendlich „***lebt*** “ das realisierte O-System nur durch die Schnittstelle zum *menschlichen* ***User.*** Er muss bei seinen Eingaben für ihn verständliche (d.h. für ihn gebräuchliche) Ausdrücke benutzen können. Ebenso muss das O-System User-Anfragen in user-verständlichen Antworten ausgeben können. Gäbe es das „Lexikon“ und die „Userschnittstelle“ nicht, so wäre das gar nicht möglich, bzw. die Regeln, nach denen ein User mit dem O-System umgehen müsste, wären so ***benutzerunfreundlich***, dass das realisierte O-System schlicht „ausstirbt“, so „intelligent“ es auch gewesen sein mag.

Zunächst beschäftigen wir uns mit den „Systeminterna“ (IN, REL) und den daraus abzuleitenden Komponenten. Am Ende erst beschäftigen wir uns mit der „Userschnittstelle“ (LEX, BEZ) | (IN, REL).

3.2 Details zur O-Definition auf FBA-Basis

3.2.1 Die IN-Relationenmenge REL und ihre Halbordnung

Die Auswahl der Menge **REL_0** der „praktisch relevanten“ IN-Relationen ***bestimmt die Systeminterna der gesamten Ontologie*.** Ihre Erweiterung zur Menge **REL** der „mathematisch relevanten“ IN-Relationen erscheint mir vernünftig, denn warum sollte man den Fall ausschließen, dass ein Instanzenpaar (x,y) sowohl in einer IN-Relation r, als auch in einer anderen IN-Relation s stehen kann?

Beispiel: x:= „`Darmstadt`, y:= „`Hessen`“ seien Instanzen. „`Darmstadt` *liegt in* `Hessen`“/„`Darmstadt` *ist eine Großstadt von* `Hessen`“ sind zwei Aussagen, die mit den – offensichtlich unterschiedlichen – Relationen r:= *„...liegt in...“* und s:= *„...ist Großstadt von...“* gebildet werden können. Das Instanzenpaar (x,y) = (`Darmstadt`, `Hessen`) steht in beiden Relationen, und daher auch in ihrem Durchschnitt $r\cap s$. Sind r und s IN-Relationen, dann sollte vernünftigerweise auch $r\cap s$ zu den IN-Relationen zählen.

3.2.1.1 Die natürliche Halbordnung auf der IN-Relationenmenge REL

Der Menge der „Relationen“, welche bei Ontologie-Definitionen der Informatiker genannt ist, wird keine Halbordnung zugeschrieben; sie ist dort sozusagen eine „völlig ungeordnete“ Menge. Auf unserer in Def.7.1 konstruierten IN-Relationenmenge REL bildet aber die *Mengeninklusion* $\subseteq$ in natürlicher Weise eine Halbordnung, die wir hier mit $\leq_{REL}$ bezeichnen. Für $r,s\in REL$ mit $r\subseteq s$, d.h. $r\leq_{REL}s$, ist r eine Teilrelation von s. Für $r,s\in REL$ mit $r\not\subseteq s$ und $s\not\subseteq r$ sind r,s *unvergleichbar* im Sinne dieser Halbordnung $\leq_{REL}$.

Anmerkung: Setzen wir **$REL^*:= REL\cup\{triv\}$** so gilt mit Def.7.1**: (REL^*, $\leq_{REL}$)** ist ein **vollständiger Verband,** und damit ist **(REL, $\leq_{REL}$)** ein **Inf-Halbverband.** Für jedes $R\subseteq REL^*$ werden Infimum und Supremum so gebildet:

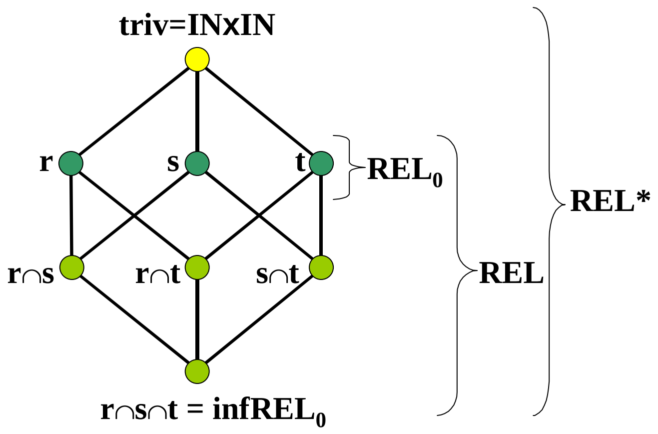
$$\inf R=\bigcap_{r\in R} r=\bigcap R,\quad \sup R=\bigcap\{t\in REL^*|\bigcup R\subseteq t\}$$

i.b. für zwei IN-Relationen: $\inf\{r,s\}= r\wedge s=r\cap s\in REL$. $\sup\{r,s\} =r\vee s= \bigcap\{t\in REL^*|r\cup s \subseteq t\}$.

Bew.: Def.7.1 besagt, dass $REL^* = REL\cup\{triv\}$ ein **Hüllensystem** ist mit dem größten Element **triv** = $IN\times IN$ =

$EINS_{REL}$ und dem kleinsten Element $\bigcap REL_0 =NULL_{REL}$. Nach [1]/Hilfssatz 3, S.9 ist jedes Hüllensystem ein **vollständiger Verband.** Die triviale Relation **triv** $=IN\times IN$ soll weder zu REL_0, noch zu REL gehören, sondern nur zu REL^*. Gemäß unserer Festlegung (2) in Def.7 ist für IN-Relationen $r,s\in REL$ die Vereinigung $r\cup s$ i.allg. *keine* IN-Relation. Es folgt aber für $r,s\in REL$: Falls $\sup\{r,s\}=r\vee s <_{REL}$ **triv** ist, dann gilt $r\vee s=r\cup s$. Anschaulich sieht man das sofort im Bsp. der **Abb.7**. [Vgl. dazu auch die Fußnote [15] weiter oben].

Die Halbordnung $\leq_{REL}$ auf der IN-Relationenmenge REL ist ein nützliches Strukturmerkmal, das von den Informatikern nicht ausgenutzt wird. **Abb.7** veranschaulicht den Zusammenhang zwischen der „erzeugenden“ Menge REL_0 der „praktisch relevanten“, dem Inf-Halbverband REL der „mathematisch relevanten“ IN-Relationen und dem vollständigen Verband (REL*****,$\leq_{REL}$).



Zusammenhang zwischen

- der „erzeugenden“ Menge REL$_0$ der praktisch relevanten IN-Relationen,
- dem Inf-Halbverband der mathematisch relevanten IN-Relationen
- und dem vollständigen Verband REL*.

Abb.7: Veranschaulichung für REL$_0$, REL und REL*****

3.2.1.2 Eine Vereinbarung über die Kontexte

Zu jeder IN-Relation r∈REL gehören die beiden Bereiche

dom(r) := {x∈IN | ∃y∈IN: xry} ⊂ IN, – genannt: ***Gegenstandsbereich***“
oder auch „*Domain*“ oder „*Vorbereich*“ von r;

range(r) := {y∈IN | ∃x∈IN: xry} ⊂ IN, – genannt: „***Merkmalsbereich***“
oder auch „*Range*“ oder „Nachbereich“ von r**.**

(i) **<u>Vereinbarung & Definition:</u>**
Zu jeder IN-Relation r∈REL sei als ihr formaler Kontext stets $\mathbf{K_r} := \mathbf{(IN, IN, r)}$ gewählt [und nicht etwa nur (dom(r), range(r), r)]. K_r nennen wir den „**F-Kontext**“ zur IN-Relation r. Der zu K_r gehörige Begriffsverband **<u>B</u>(r)** heiße **„F-Begriffsverband zu r“** und seine Elemente heißen „**F-Begriffe zu r**“ (alles nun mit *großem* „**F**“ wie „***F****ormal*“ gemäß „**F**BA“)**.**

Mit dieser Normierung hat – wegen der „Dummy-Instanz“ d∈IN – die Kontexttabelle *jeder* IN-Relation mindestens eine *Leerzeile* und mindestens eine *Leerspalte*. Das hat wegen Kap.2.2.5.2/(viii) zur Folge, dass für *jeden* F-Begriffsverband <u>B</u>(r) das größte bzw. kleinste Element die Form $\mathbf{1_r}$ = (IN,∅) bzw**.** $\mathbf{0_r}$ = (∅,IN) hat und daher für alle r∈REL ***gleich*** ist; wir können also die Indizes weglassen:

(i’) **1 := (IN,∅)** bzw**.** **0 := (∅, IN)**
sind die EINS bzw. die NULL ***jedes*** F-Begriffsverbandes <u>B</u>(r) (r∈REL). Das vereinheitlicht später die Darstellung der Menge aller F-Begriffe der Systeminterna (IN, REL) der Ontologie.

Anmerkung-1: Gilt r∩s=∅ für zwei IN-Relationen, so ist auch die leere Relation eine IN-Relation. Zum F-Kontext (IN, IN, ∅) gehört dann der F-Begriffsverband <u>B</u>(∅) = {**1, 0**} mit **1**=(IN,∅), **0**=(∅,IN) als einzigen „F-Begriffen“. Gilt

$r \cap s \neq \varnothing$ für alle $r,s \in$ REL, dann ist auch infREL$\neq\varnothing$, und die leere Relation ist *keine* IN-Relation, das heißt: {**1**, **0**} ist dann zwar ein Teilverband, aber kein „F-Begriffsverband" gemäß Vereinbarung (i).

Anmerkung-2: Die Bezeichnungen „Gegenstandsbereich" für dom(r) und „Merkmalsbereich" für range(r) orientieren sich am Sprachgebrauch der **FBA**. Sie sollen aber *keineswegs* dazu verleiten, dass man sich unter „Gegenständen" *nur* solche Dinge wie Pkws, Häuser, Tassen, Tauben, Mikroben, oder: Darmstadt, Kenya, Obama, usw. ... vorstellen darf. Ebenso darf man sich unter „Merkmalen" nicht *nur* Eigenschaften wie „mehr als 10 cm lang", „30°C warm", „10 Kg schwer", „karmin-rot", oder: „schön", „schmerzhaft", „philosophisch" usw. ... vorstellen. Die Werkzeuge der FAB sind gegenüber solchen „ontologischen" Einschränkungen völlig immun. – Und das ist, meine ich, gerade ein Vorteil von FBA. Je nach Kontext und Relation, kann es gerade umgekehrt angebracht sein, dass z.B. „Tasse" als „Merkmal", und „mehr als 10 cm lang" als „Gegenstand" herhalten dürfen; oder dass sogar „Mischformen" – sowohl für dom(r) als auch für range(r) – angebracht sind.
Der Grund dafür ist, dass FBA eben *nicht* (wie es in informatischen Ontologien bisher üblich ist, und was m.E. ihre Schwierigkeiten ausmacht) von einer intuitiven oder „ontologischen" Vorstellung über „Begriffe" ausgeht, sondern von **Relationen** bzw. ihren **Kontexten** auf einer *an sich erst einmal mal* ***ziemlich offen wählbaren*** *Grundvariablenmenge* ***IN.*** Instanzen aus IN werden erst dann „konkret", wenn man sie in formalen Kontexten und deren Relationen erfasst und festlegt. Erst daraus wird definiert, was „Begriffe" sein sollen. Und diese Vorgehensweise kann – davon bin ich überzeugt – Ausschnitte der menschlichen(!) „Wirklichkeit" (--- kommt von „wirken" und NICHT von „sein"! ---) viel realistischer formalisieren und strukturieren.

3.2.1.3 Ein Beispiel für REL_0 und REL

Das folgende Beispiel stellt eine sehr einfache IN-Relationenmenge REL vor, zeigt zwei veranschaulichende Schaubilder zur Struktur der Systeminterna (IN, REL) der durch REL_0 gegebenen kleinen Beispiel-Ontologie und gibt zugleich einen „generischen" Einblick in das *„Bezeichnungs- und Namensproblem*", das bei jeder praktischen Umsetzung einer Ontologie-Definition in eine geeignete Programmiersprache zu bewältigen ist[16].

Die Menge der „praktisch relevanten" IN-Relationen, REL_0 := {r,s}, sei festgelegt durch die beiden Aussageformen

r(<Stadt>, <Land>) := „<Stadt> *liegt_in* <Land>",
s(<Stadt>, <Land>) := „<Stadt> *zieht_Touristen_an_aus* <Land>";

<Stadt>, <Land> sind „sprechende Namen" für Variablen auf dom(r) bzw. range(r). Damit kann man für den Relationendurchschnitt $r \cap s$ formulieren:

r(<Stadt>, <Land>) UND s(<Stadt>, <Land>) = ($r \cap s$)(<Stadt>, <Land>)
:= „<Stadt> *liegt_in_und_zieht_Touristen_ an_aus* <Land>".

Der Inf-Halbverband der „mathematisch relevanten" IN-Relationen ist dann REL = {r, s, $r \cap s$}. Damit r und s wohldefiniert sind, müssen ihre **Gegenstands**- und **Merkmalsbereiche** innerhalb der (als Ganzes noch beliebigen!) Instanzenmenge IN eingegrenzt werden. Wir wählen:

dom(r) := `STADT` := {alle Großstädte in Deutschland}, dom(s) $\subseteq$ dom(r) $\subset$ IN,
range(r) := `LAND` := {alle deutschen Bundesländer}, range(s) $\subseteq$ range(r) $\subset$ IN.

Die Namen `STADT` bzw. `LAND` werden also je für eine **Menge** von Städten bzw. Ländern vergeben und sind von den Variablennamen <Stadt>, <Land> zu unterscheiden!

Abb.8a zeigt den Graphen des sehr einfachen Verbandes (REL*,$\leq_{REL}$): $r \cap s$ ist Teilrelation sowohl von r als auch von s. **Abb.8b** veranschaulicht die drei Kontexte

[16] Der mit seiner natürlichen Umgangssprache vertraute Laie macht sich keine Vorstellung, welche ***Bezeichnungsprobleme*** bei der praktischen Umsetzung in computernahe Formulierungen – auch schon bei der primitivsten Ontologie – zu bewältigen sind, und findet die Umsetzungsmethoden meist „unnötig verkomplizierend": Ein paar Sätze der natürlichen Umgangssprache formulieren den ganzen Sachverhalt viel „einfacher", wenn auch etwas „ungenauer". „Genauigkeit" ist nur für die **Umsetzung in Programmiersprachen** erforderlich. Daher habe ich in Kap.1 behauptet, an der „Schnittstelle Mensch – Mensch" sei eine (informatische und automatisierbare) „Ontologie" **unnötig** – wogegen sie an den Schnittstellen „Computer – Computer" und „Mensch – Computer" durchaus erforderlich ist.

(IN, IN, r), (IN, IN, s), (IN, IN, r∩s) im selben Kontext-Tabellenschema, wobei die IN-Relationen r und s als ovale Flächen dargestellt sind, deren Durchschnitt r∩s ist.

d∈IN ist die Dummy-Instanz, die keiner der IN-Relationen r, s, r∩s (weder in *dom* noch in *range*) angehört.

Dieser kleinen Ontologie (IN, REL) können wir den Namen *„Touristische Anziehungspunkte in Deutschland für deutsche Großstädter“* geben.

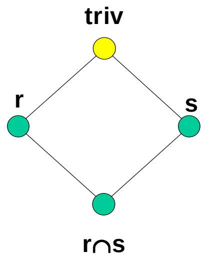


Abb.8a: Graph des Verbandes (REL*, $\leq_{REL}$) mit REL_0 ={r, s}

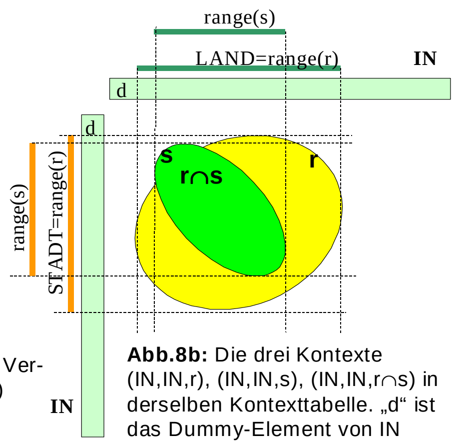


Abb.8b: Die drei Kontexte (IN,IN,r), (IN,IN,s), (IN,IN,r∩s) in derselben Kontexttabelle. „d“ ist das Dummy-Element von IN

Nun geben wir noch Beispiele für die sog. **“Instanziierung“**: `Darmstadt` bzw. `Hessen` sind **Instanzen** aus dem Gegenstands- bzw. dem Merkmalbereich der IN-Relation r. Es gilt: `Darmstadt` ∈ `STADT`, `Hessen` ∈ `LAND`.

„`Darmstadt` *liegt_in* `Hessen`“, d.h. „(`Darmstadt`,`Hessen`) ∈ r“

ist eine zutreffende Aussage zur Relation r. Für welche Bundesländer die Aussageform „`Darmstadt` *zieht_Touristen_ an_aus* <Land>“ zutrifft, das zu ermitteln ist Aufgabe der Instanziierung. – Nun bilden wir einmal zur Instanz `Darmstadt` den **F-Begriff** ($\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow r\downarrow r}$, $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow r}$): Die Menge $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow r}$ besteht aus allen <Ländern>, in denen `Darmstadt` liegt, also ist offensichtlich $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow r}$ = {`Hessen`} (eine nur 1-elementige Menge), und die Menge $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow r\downarrow r}$ besteht aus allen <Städten>, die in allen <Ländern> liegen, in denen auch `Darmstadt` liegt; also aus allen <Städten> von Hessen: $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow r\downarrow r}$ = {alle hessischen Großstädte}; und damit ist

($\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow r\downarrow r}$, $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow r}$**)** = **(**{alle hessischen Großstädte}, {`Hessen`}**)**

ein F-Begriff zu r. Dasselbe machen wir mit dem F-Begriff ($\mathtt{Hessen}^{\downarrow r}$, $\mathtt{Hessen}^{\downarrow r\uparrow r}$): Die Menge $\mathtt{Hessen}^{\downarrow r}$ besteht aus den <Städten>, die in `Hessen` liegen, also $\mathtt{Hessen}^{\downarrow r}$ = {alle hessischen Großstädte}. Die Menge $\mathtt{Hessen}^{\downarrow r\uparrow r}$ besteht aus allen <Ländern>, in denen alle <Städte> liegen, die auch in `Hessen` liegen, d.h. wieder: $\mathtt{Hessen}^{\downarrow r\uparrow r}$ = {`Hessen`}; und damit hier wieder:

($\mathtt{Hessen}^{\downarrow r}$, $\mathtt{Hessen}^{\downarrow r\uparrow r}$**)** = **(**{alle hessischen Großstädte}, {`Hessen`}**)**

Etwas komplexer wird es mit der IN-Relation s über touristische Anziehungspunkte: Die Menge $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow s}$ besteht aus allen <Ländern>, deren Touristen von `Darmstadt` angezogen werden. Die Menge $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow s\downarrow s}$ besteht aus allen <Städten>, welche Touristen aus all denjenigen <Ländern> anziehen, die auch von `Darmstadt` angezogen werden.

($\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow s\downarrow s}$, $\mathtt{Darmstadt}^{\uparrow s}$**)** ist ein F-Begriff zu s.

Diesem F-Begriff könnte man etwa den Namen *„die touristische Anziehungskraft innerhalb Deutschland von deutschen Städten wie* `Darmstadt`“ geben; das ist zwar einfacher, aber nicht so genau ausgedrückt, wie es der formale Begriff tut.

Die Menge $\mathtt{Hessen}^{\downarrow s}$ besteht aus allen <Städten>, welche Touristen anziehen, die aus `Hessen` sind. Die Menge $\mathtt{Hessen}^{\downarrow s\uparrow s}$ besteht aus allen <Ländern>, deren Touristen von all denjenigen <Städten> angezogen werden, die auch Touristen aus `Hessen` anziehen.

(`Hessen`$^{\downarrow s}$, `Hessen`$^{\downarrow s \uparrow s}$**)** ist ein F-Begriff zu s.

Diesem F-Begriff könnte man den Namen *„touristische Anziehungspunkte für Bundesländer wie* `Hessen`“ geben; das ist zwar einfacher, aber nicht so genau ausgedrückt, wie es der formale Begriff tut.

Aufgabe: Bilde und interpretiere aus `Darmstadt` und `Hessen` die entsprechenden F-Begriffe zur Relation $r \cap s$.

3.2.2 Die F-Begriffsmenge F(REL) der Ontologie und ihre Halbordnung

Nach den bisherigen Vorbereitungen ist es erst einmal naheliegend, was wir als **formale Begriffe** für die gesamten Systeminterna (IN, REL) einer Ontologie nehmen.

Def.8.F-Begriff: Ein Mengenpaar (A,B) mit $A,B \subseteq IN$ heiße „**F-Begriff der Ontologie**“, wenn es eine IN-Relation $r \in REL$ gibt, so dass (A,B) ein formaler Begriff zum Kontext (IN, IN, r) ist im Sinne der Def.4. Dabei heißt A der „**Umfang“**, B der „**Inhalt**“ des F-Begriffs (A,B). Die Menge aller F-Begriffe ist also

$$\mathbf{F(REL) := \{(A,B) \in Pot(IN) \times Pot(IN) \mid \exists r \in REL: (A,B) \in \underline{B}(r)\}} \subseteq Pot(IN) \times Pot(IN)$$

F(REL) ist nichts anderes, als die Vereinigung aller F-Begriffsverbände $\underline{B}(r)$ ($r \in REL$):

(i) $\mathbf{F(REL) = \bigcup_{r \in REL} \underline{B}(r).}$

Nach der *Vereinbarung* (i) in Kap.3.2.1.2 über die F-Kontexte soll zu jedem $r \in REL$ der F-Kontext K_r immer **(IN, IN, r)** sein, d.h.: er enthält stets wenigstens eine Leerzeile bzw. wenigstens eine Leerspalte, so dass für alle $r \in REL$ die F-Begriffsverbände $\underline{B}(r)$ *dieselbe* EINS = (IN,∅) und *dieselbe* NULL = (∅,IN) haben.

Veranschaulichung der Formel (i): Der *Graph* der Menge F(REL) (F-Begriffe (A,B) als „Punkte“ dargestellt, Unterbegriffe weiter unten, Oberbegriffe weiter oben, Nachbarpunkte (A,B), (A’B’) – d.h. $(A,B) <_r (A',B')$, wobei kein Begriffspunkt (X,Y) dazwischen liegt – durch eine Linie verbunden) stellt sich dar als ein **„*Bündel von Bananen*“**, deren obere Enden im EINS-Punkt (IN,∅) und deren untere Enden im NULL-Punkt (∅,IN) zusammenfallen. Jede „Banane“ stellt einen F-Begriffsverband $\underline{B}(r)$ ($r \in REL$) dar. Die einzelnen „Bananen“ können sich noch an anderen Stellen „durchdringen“. **Abb.9** zeigt diese Veranschaulichung.

Anmerkung-1: Der zur trivialen Relation **triv**=IN×IN gehörige Verband $\underline{B}$(triv) besteht aus nur ***einem*** Element $EINS_{triv} = NULL_{triv}$, kann also im „Bananenbündel“ nicht dargestellt werden. Die triviale Relation **triv** galt daher in Def.7(2) ***nicht*** als IN-Relation und daher $\underline{B}$(triv) auch ***nicht*** als F-Begriffsverband!

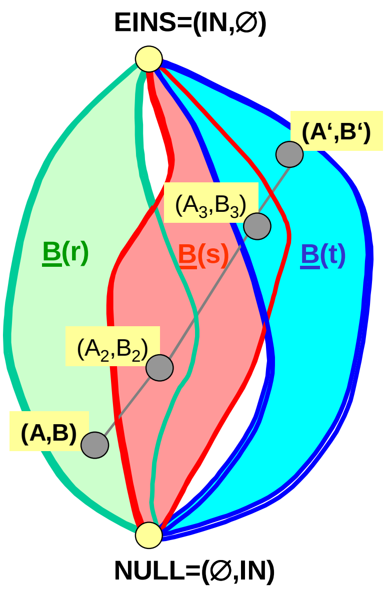
Die eben geschilderte Veranschaulichung legt auch sofort nahe, wie man in natürlicher Weise eine **Halbordnung** „$\leq_F$“ auf F(REL) etabliert, so dass einerseits die Halbordnungen $\leq_r$ auf den Teilbereichen $\underline{B}(r) \subseteq F(REL)$ *Teil-Halbordnungen* werden, und andererseits „$\leq_F$“ nicht zu beliebig wird.

Def.9. Halbordnung „$\leq_F$“**:** Seien (A,B), (A’,B’) F-Begriffe von F(REL). Wir definieren:

(A,B) $\leq_F$ (A’,B’) :⇔ es gibt eine Folge von IN-Relationen $r_1, ..., r_n \in REL$ und eine Folge von F-Begriffen $(A_2,B_2),..., (A_n,B_n) \in F(REL)$, so dass $(A,B) \leq_{r1} (A_2,B_2) \leq_{r2} ... \leq_{rn-1} (A_n,B_n) \leq_{rn} (A',B')$ gilt.

Diese Folge nennen wir auch einfach einen „**Pfad** von (A,B) nach (A’,B’)“.

Die Relation $\leq_F$ ist in der Tat eine Halbordnung auf F(REL), da die $\leq_r$ ($r \in REL$) Halbordnungen sind, und da die Mengeninklusion eine Halbordnung auf Pot(IN) ist.



Veranschaulichung der F-Begriffs-menge

F(REL) = $\underline{B}(r) \cup \underline{B}(s) \cup \underline{B}(t)$

für REL= {triv, r, s, t}, t := $r \cap s \neq \emptyset$;

$\underline{B}$(triv) kann hier ***nicht*** dargestellt werden und ist ***kein*** F-Begriffsverband!

Es gilt im Beispiel:

$(A,B) <_F (A‘,B‘)$,

d.h. **(A,B) ist Unterbegriff von (A‘,B‘),** weil

$(A,B) <_{\mathbf{r}} (A_2,B_2) <_{\mathbf{s}} (A_3,B_3) <_{\mathbf{t}} (A‘,B‘)$,

„Pfad von (A,B) nach (A‘,B‘)“ ist.

Dabei ist $(A_2,B_2) \in \underline{B}(r) \cap \underline{B}(s)$ und $(A_3,B_3) \in \underline{B}(s) \cap \underline{B}(t)$.

Abb.9: Veranschaulichung der Halbordnung $(F(REL), \leq_F)$ als „Bananenbündel“.

(ii) Def.9 ergibt:

(a) Aus $(A,B) \leq_F (A',B')$ folgt zusammen mit der Definition für $\leq_r$ auf $\underline{B}(r)$: $(A_k,B_k) \in \underline{B}(r_{k-1}) \cap \underline{B}(r_k)$ und $A \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq A'$ und $B' \subseteq B_n \subseteq ... \subseteq B_2 \subseteq B$.

(b) Zwei F-Begriffe (A,B), (A,B’) mit $B \neq B'$ sind $\leq_F$-unvergleichbar; zwei F-Begriffe (A,B), (A’,B) mit $A \neq A'$ sind $\leq_F$-unvergleichbar.

(c) Für die strikte Form $<_F$ der Hablordnung $\leq_F$ ergibt sich: $(A,B) <_F (A',B') \Rightarrow A \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset A'$ und $B' \subset B_n \subset ... \subset B_2 \subset B$.

(d) Die Begriffsverbände $(\underline{B}(r), \leq_r)$ $(r \in REL)$ sind *Teilhalbordnungen* von $(F(REL), \leq_F)$.

(e) Für zwei IN-Relationen $r,s \in REL$ gilt: $\underline{B}(r) \cap \underline{B}(s) \subseteq \underline{B}(r \cap s)$; i.allg. ist aber $\underline{B}(r) \cap \underline{B}(s) \neq \underline{B}(r \cap s)$.

Bew.: (a) folgt direkt aus Def.9. Zu (b): Sei $B' \neq B$. Annahme $(A,B) \leq_F (A,B')$. Mit (ii) folgt daraus $A=A_2= ...=A_n$. Also z.B. $(A,B) \leq_{r1} (A,B_2)$; im selben F-Begriffsverband $\underline{B}(r_1)$ bestimmt aber der Umfang A den Inhalt eindeutig; also muss $B=B_2$ sein; ... schließlich entsprechend: B=B’. Die Annahme ergibt einen Widerspruch zur Voraussetzung $B' \neq B$. Damit ist dann auch (c) bewiesen. (d) ist unmittelbare Folge der Def.9. Zu (e): Ist $(A,B) \in \underline{B}(r) \cap \underline{B}(s)$, so rechnet man mit Hilfe der Formeln Kap.2.2.5.1/(iii) aus: $A^{\uparrow r}=A^{\uparrow s}=B = A^{\uparrow r \cap s}$, $B^{\downarrow r}=B^{\downarrow s}=A = B^{\downarrow r \cap s}$, also: $\underline{B}(r) \cap \underline{B}(s) \subseteq \underline{B}(r \cap s)$. Dass aber i.allg. $\underline{B}(r) \cap \underline{B}(s) \neq \underline{B}(r \cap s)$ gilt, zeigt man durch ein Gegenbeispiel unter Zuhilfenahme der Veranschaulichung in **Abb.11b**.

Anmerkung-1: Umgekehrt kann man aus $A \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq A'$ und $B' \subseteq B_n \subseteq ... \subseteq B_2 \subseteq B$ ***nicht*** allgemein auf $(A,B) \leq_F (A',B')$ schließen; d.h. die Halbordnung $\leq_F$ auf der F-Begriffsmenge F(REL) ist „***restriktiver***“ als eine nur mit der Mengeninklusion definierte Halbordnung.

Die F-Begriffshalbordnung $(F(REL), \leq_F)$ ist i.allg. ***kein*** Verband, denn zu $(A,B) \in \underline{B}(r)$ und $(A',B') \in \underline{B}(s)$ $(r \neq s)$ braucht weder das Supremum $(A,B) \vee (A',B')$ noch das Infimum $(A,B) \wedge (A',B')$ in F(REL) zu existieren. Ein Gegenbeispiel zeigt **Abb.10a/b**.

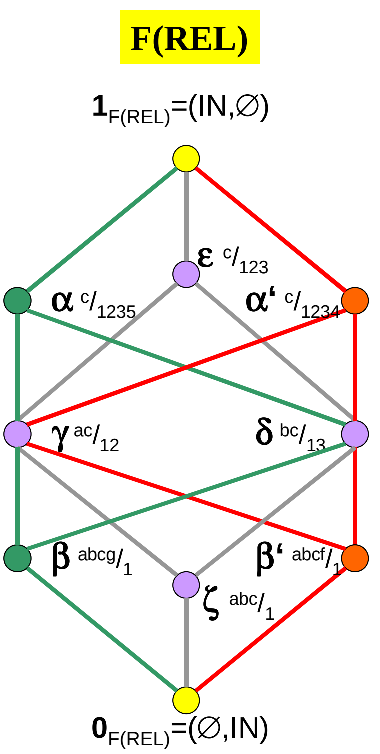
In **Abb 10a** ist **d** ist die Dummy-Instanz; {**d**, 1, 2, 3, 4, 5}$\subseteq$**IN** ist die Menge der für das Beispiel relevanten Gegenstände; {**d**, a, b, c, f, g} $\subseteq$**IN** die Menge der relevanten Merkmale. In der Kontexttabelle sind im Kreuzpunkt (Gegenstand x, Merkmal y) die IN-Relationen angegeben, in denen (x,y) steht.

Vereinigte Kontexttabelle für die F-Begriffsmenge F(REL) zu REL={r, s, r∩s}

	d	a	b	c	f	g	...
d							
1		r s	r s	r s	s	r	
2		r s		r s			
3			r s	r s			
4				s			
5				r			
...							

F-Begriff	**gehört zu**
$\mathbf{1}_{F(REL)}$ = (IN, ∅)	allen F-Begriffsverbänden
$\mathbf{0}_{F(REL)}$ = (∅, IN)	allen F-Begriffsverbänden
α = ({1, 2, 3, 5}, {c})	B(r)
α' = ({1, 2, 3, 4}, {c})	B(s)
β = ({1}, {a, b, c, g})	B(r)
β' = ({1}, {a, b, c, f})	B(s)
γ = ({1, 2}, {a, c}	B(r), B(s), B(r∩s)
δ = ({1, 3}, {b, c})	B(r), B(s), B(r∩s)
ε = ({1, 2, 3} , {c})	B(r∩s)
ζ = ({1} , {a, b, c})	B(r∩s)

Abb.10a: Beispiel einer Halbordnung (F(REL),$\leq_F$), die *kein* Verband ist.



Die Halbordnung (F(REL), $\leq_F$) ist i. allg. **kein Verband**.

Gegenbeispiel:

REL_0 = {r, s}
REL = {r, s, r∩s} (r∩s≠∅)
F(REL) = B(r)∪B(s)∪B(r∩s)
B(r) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, α, γ, δ, β, $\mathbf{0}_{F(REL)}$}
B(s) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, α', γ, δ, β', $\mathbf{0}_{F(REL)}$}
B(r∩s) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, ε, γ, δ, ζ, $\mathbf{0}_{F(REL)}$}
B(r)∩B(s) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, γ, δ, $\mathbf{0}_{F(REL)}$} ⊂ B(r∩s).

B(r)∩B(s) ist zwar Teilmenge aber hier kein Teilverband von B(r∩s), da (in B(r∩s)) Supremum ε und Infimum ζ von {γ, δ} nicht zu B(r)∩B(s) gehören.

α, α', ε sind paaarweise $\leq_F$-unvergleichbar,
β, β', ζ sind paaarweise $\leq_F$-unvergleichbar,
γ, δ, sind $\leq_F$-unvergleichbar.

Abb.10b: Begriffsgraph zur Halbordnung (F(REL),$\leq_F$) des Beispiels in Abb.10a.

Mit der Def.9 ist das ursprüngliche *„Unterbegriff“ / „Oberbegriff“-Konzept* der einzelnen F-Begriffsverbände B(r) (r∈REL) voll auf die gesamte Halbordnung (F(REL), $\leq_F$) der F-Begriffe der Ontologie übertragen.

Abb.11a zeigt eine Veranschaulichung für die Unter-/Oberbegriff-Halbordnung $\leq_F$, in der Kontext-Tabelle, bei der die IN-Relationen r und s als konvexe ebene Figuren dargestellt sind. Ferner zeigt **Abb.11b**, dass i. allg. B(r)∩B(s) ≠ B(r∩s) ist.

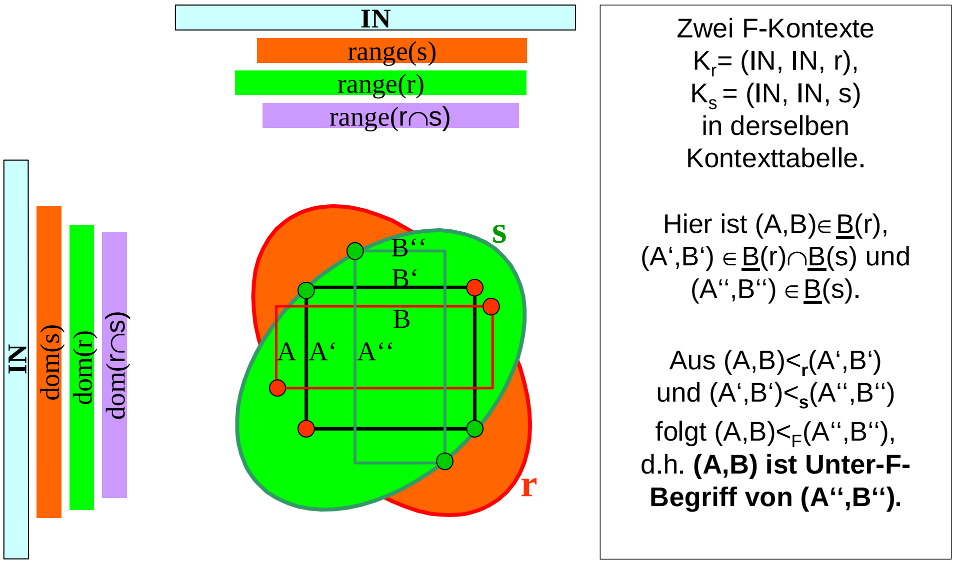


Abb.11a: Veranschaulichung von „Unter-/Oberbegriff“ im Kontext-Schema für F(REL)

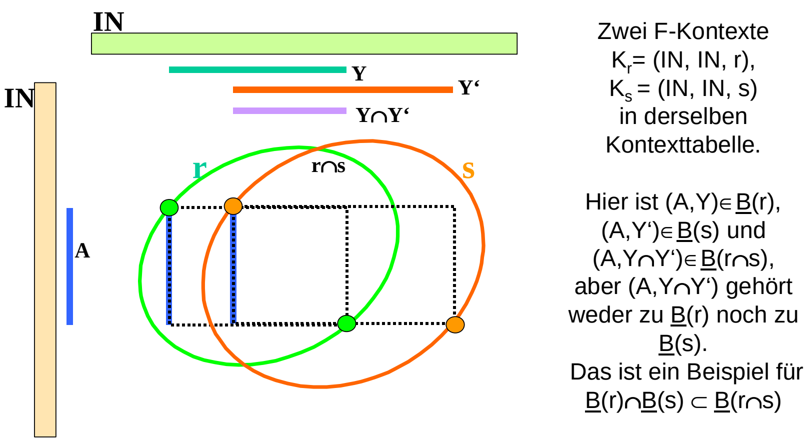


Abb.11b: Veranschaulichung dafür, dass i.allg. B(r)∩B(s)≠B(r∩s) ist

Anmerkung-2: (F(REL),$\leq_F$) ist selbst kein vollständiger Verband. Wir können aber, *über* der Grundmenge F(REL), ein ***Hüllensystem*** $\mathcal{H}$(REL) definieren, das wir **„F-Begriffs-Hüllensystem“** der Ontologie nennen wollen und es rekursiv so konstruieren:

(1) Es soll F(REL)∈$\mathcal{H}$(REL) sein;

(2) Für jedes r∈REL soll B(r)∈$\mathcal{H}$(REL) sein;

(3) mit F, F'∈$\mathcal{H}$(REL) soll auch F∩F'∈$\mathcal{H}$(REL) sein.

$\mathcal{H}$(REL) ist nach [1]/S.9 ein **vollständiger Verband.** Er besteht aus folgenden Elementen: F(REL) als größtem Element, den F-Begriffsverbänden B(r) (r∈REL), sowie all ihren Verbandsdurchschnitten D(R) (R⊆REL). Das kleinste Element ist der Durchschnitt D(REL)=$\bigcap_{r\in REL}$B(r) *aller* F-Begriffsverbände. Infimum und Supremum jeder

Teilmenge $\mathcal{T}$ von $\mathcal{H}$(REL) sind $\inf\mathcal{T} = \bigcap\mathcal{T}$ und $\sup\mathcal{T} = \bigcap\{F\in\mathcal{H}(REL) \mid \bigcup\mathcal{T}\subseteq F\}$. Die Zusatzstruktur $\mathcal{H}$(REL) wird später in Kap.3.2.4 als der sog. „F-Umfangsverband" zum sog. „F-Compound-Kontext" der Ontologie identifiziert.

3.2.3 Der F-Compound-Kontext der Ontologie

Nun können wir ***das ganze Stück (IN, REL)*** der ***Systeminterna*** der Ontologie von der Instanzenmenge IN „abkoppeln" und es mit ***<u>einem</u>*** *formalen Kontext**,** genannt* ***„F-Compound-Kontext"*** [17]

(i) $\mathbf{K_F := (F(REL), REL, i)}$

beschreiben, wobei die Inzidenzrelation **i** definiert ist durch
(ii) $\mathbf{((A,B), r) \in i \;:\Leftrightarrow\; (A,B) \in \underline{B}(r)}$ für $(A,B)\in F(REL)$, $r\in REL$.

Die „**Gegenstände**" von K_F sind die F-Begriffe, die „**Merkmale**" die IN-Relationen. Und es gilt dom(**i**) = F(REL), range(**i**) = REL. In der Kontexttabelle von K_F gibt es also weder Leerzeilen noch Leerspalten.

Nun ein paar Einzelheiten: Das Abbildungspaar ($\uparrow$i, $\downarrow$i) sei wieder die durch die Inzidenzrelation **i** gegebene *Galoisverbindung* zwischen F(REL) und REL. Wir schreiben für einen einzelnen F-Begriff $(A,B)\in F(REL)$ statt $\{(A,B)\}^{\uparrow i}$ kürzer $(A,B)^{\uparrow i}$, bzw. für eine einzelne IN-Relation $r\in REL$ statt $\{r\}^{\downarrow i}$ kürzer $r^{\downarrow i}$.

(iii) Dann folgt aus (ii) mit Hilfe von Kap.2.2.5.2:

$(A,B)^{\uparrow i}$ = $\{r\in REL \mid (A,B)\in\underline{B}(r)\}$ = „Merkmalzeile" des F-Begriffs (A,B)
= Menge aller IN-Relationen, in deren F-Begriffsverband der Begriff (A,B) enthalten ist,
$r^{\downarrow i}$ = $\{(A,B)\in F(REL) \mid (A,B)\in\underline{B}(r)\}$ = „Gegenstandsspalte" der IN-Relation r
= $\underline{\mathbf{B}}\mathbf{(r)}$ = **der F-Begriffsverband zur IN-Relation r.** (Wir können o.B.d.A. annehmen, dass der F-Compound-Kontext K_F „*spaltenbereinigt*" sei, d.h., dass aus $r^{\downarrow i} = s^{\downarrow i}$ folgt: r=s für alle $r,s\in REL$.)
$(A,B)^{\uparrow i\downarrow i}$ = $\{(X,Y)\in F(REL) \mid \forall s\in REL: (A,B)\in\underline{B}(s) \Rightarrow (X,Y)\in\underline{B}(s)\}$
= $\bigcap_{(A,B)\in B(s)} \underline{B}(s)$ = Durchschnitt aller F-Begriffsverbände, denen (A,B) angehört
= der **Verbandsdurchschnitt** zur IN-Relationenmenge $(A,B)^{\uparrow i}$.
$r^{\downarrow i\uparrow i}$ = $\underline{B}(r)^{\uparrow i} = \{s\in REL \mid \underline{B}(r)\subseteq\underline{B}(s)\}$
= Menge aller IN-Relationen, deren F-Begriffsverbände den Verband $\underline{B}$(r) enthalten.
$\underline{B}(r)^{\uparrow i\downarrow i}$ = $r^{\downarrow i\uparrow i\downarrow i} = r^{\downarrow i} = \underline{B}(r)$.

(iv) Ist schließlich $F\subseteq F(REL)$ eine Menge von F-Begriffen, $R\subseteq REL$ eine Menge von IN-Relationen, so gilt

$F^{\uparrow i}$ = $\{r\in REL \mid \forall(A,B)\in F: (A,B)\in\underline{B}(r)\}$ = $\bigcap_{(A,B)\in F}(A,B)^{\uparrow i}$
= Durchschnitt aller Merkmalzeilen, deren F-Begriffe zu F gehören.

$R^{\downarrow i}$ = $\{(A,B)\in F(REL) \mid \forall r\in R: (A,B)\in\underline{B}(r)\}$ = $\bigcap_{r\in R} r^{\downarrow i} = \bigcap_{r\in R}\underline{B}(r) := \underline{D}(R)$
= der **Verbandsdurchschnitt** zu $R\subseteq REL$.

Die *formalen Begriffe* des Kontextes $\mathbf{K_F = (F(REL), REL, i)}$ nennen wir nicht „F-Begriffe", denn dieses Wort ist schon zu sehr überlastet, sondern wir erfinden einen anderen Namen:

Def.10.F-Compound: Ein Paar (F, R) gebildet aus einer F-Begriffs-Teilmenge $F \subseteq F(REL)$ und einer IN-Relationen-Teilmenge $R\subseteq REL$ heiße ein „**F-Compound**" des

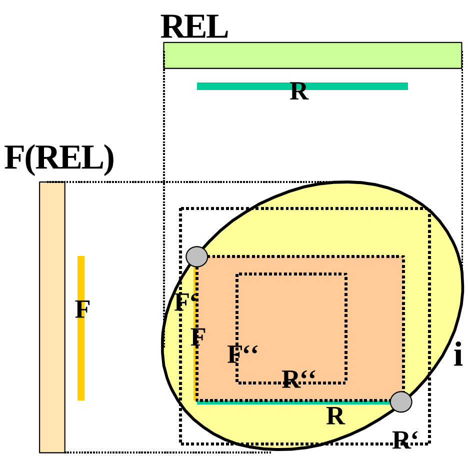
[17] Erst nach Abfassung der Version V3.8 dieser Note (Anfang Juli 2012) bin ich auf die Arbeit [28] (1996) von ***R. Wille*** über „Multicontexts" gestoßen. Vergleiche ich [28] mit meinem F-Compound-Kontext K_F =(F(REL), REL, **i**), so kann ich K_F als einen Sonderfall der Strukturen in [28] ansehen, nämlich als einen *Multicontext* mit besonders starken „Zusammenhängen" zwischen den Einzelkontexten der betrachteten F-Kontex-Familie.

Kontextes (F(REL), REL, **i**) genau dann, wenn $\mathbf{F^{\uparrow i} = R}$ *und* $\mathbf{R^{\downarrow i} = F}$ gilt. F heiße der **Umfang**, R heiße der **Inhalt** des F-Compounds.

Mit der Hilfsdefinition Def.4.1 aus Kap.2.2.5.2 bekommt man eine gewisse Vorstellung von dem, was ein „F-Compound“ des Kontextes K_F ist:

(v) Ein F-Compound (F,R) stellt sich in der Kontexttabelle (F(REL),REL,**i**) dar als ein *extremales Rechteck* $F \times R \subseteq \mathbf{i}$; es ist *extremal* in dem Sinne, dass jedes „echt kleinere“ oder „echt größere“ Rechteck ($F' \subset F$, $R' \subset R$ oder $F \subset F'$, $R \subset R'$) ***keinen*** F-Compound von K_F mehr darstellt. Eine Veranschaulichung hierfür zeigt **Abb.12**.

(vi) Die F-Compoundmenge $\mathcal{B}(\mathbf{i})$:=
{(F,R) | $F \subseteq F(REL)$, $R \subseteq REL$, (F,R) ist ein F-Compound} heiße der „**F-Compoundverband**“ der Ontologie. Auf $\mathcal{B}(\mathbf{i})$ wird gemäß FBA eine Halbordnung $\leq_{\mathbf{i}}$ definiert durch $(F,R) \leq_{\mathbf{i}} (F',R')$ **:**⇔ $F \subseteq F'$ ⇔ $R' \subseteq R$. Nach dem Hauptsatz der FBA ist $(\mathcal{B}(\mathbf{i}), \leq_{\mathbf{i}})$ ein **vollständigen Verband**. Die Verbands-EINS ist $(F(REL), F(REL)^{\uparrow i})$; die Verbands-NULL ist $(REL^{\downarrow i}, REL)$.



Veranschaulichung eines **F-Compounds (F,R)** als **„extremales Rechteck“** im F-Compound-Kontext (F(REL), REL, **i**)

FxR stellt einen C-Compound dar, weil $F^{\uparrow i}$ =R und $R^{\downarrow i}$ =F.
Jedes „größere“ Rechteck F'xR', ($F \subset F'$, $R \subset R'$),
u. jedes „kleinere“ Rechteck F''xR'',($F'' \subset F$, $R'' \subset R$),
stellt *keinen* F-Compound mehr dar.

Abb.12: Veranschaulichung eines F-Compounds als „extremales Rechteck“.

(vii) Mit (iv) gilt für jeden F-Compound $(F,R) \in \mathcal{B}(\mathbf{i})$:

$F = \bigcap_{r \in R} \underline{B}(r) = \underline{D}(R)$
$= \{(A,B) \in F(REL) \mid R \subseteq (A,B)^{\uparrow i}\}$

d.h.: der F-Compoundumfang ist der Verbandsdurchschnitt zum F-Compoundinhalt R. F-Compoundumfänge sind also immer Verbandsdurchschnitt.

$R = \bigcap_{(A,B) \in F} (A,B)^{\uparrow i}$
$= \{r \in REL \mid F \subseteq \underline{B}(r)\}$

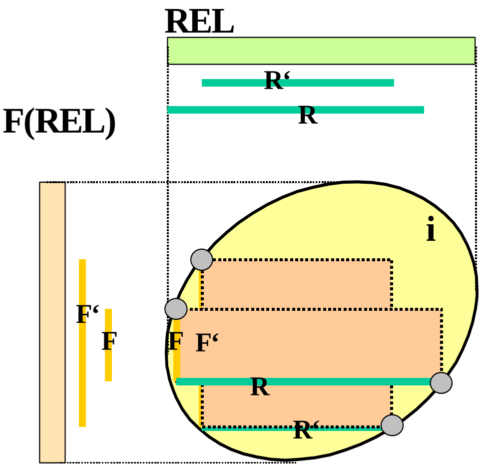
d.h.: der F-Compoundinhalt ist der Durchschnitt der Merkmalzeilen aller F-Begriffe des Compoundumfanges; d.i. die Menge aller IN-Relationen, deren F-Begriffsverbände den Compoundumfang F enthalten.

$F=\underline{D}(R) \subseteq \underline{B}(\cap R) = \underline{B}(\mathrm{inf}R)$ d.h.: Für einen F-Compound (F,R) stammen alle F-Begriffe des Compoundumfangs F aus nur ***einem*** F-Bergiffsverband, nämlich aus dem F-Begriffs-verband zum Infimum seines Inhalts, $\underline{B}(\mathrm{inf}R)$.

Schließlich folgt aus Kap.2.2.5.2/(vi) für beliebige Mengen $F \subseteq F(REL)$, $R \subseteq REL$:

(ix) Der (gemäß $\leq_i$) ***kleinste*** F-Compound, der F im Compound-Umfang hat, ist **($F^{\uparrow i \downarrow i}$, $F^{\uparrow i}$),** und der (gemäß $\leq_i$) ***größte*** F-Compound, der R im Compound-Inhalt enthält, ist **($R^{\downarrow i}$, $R^{\downarrow i \uparrow i}$)**.

Abb.13 veranschaulicht im Kontext K_F die Halbordnung $\leq_\mathbf{i}$ des F-Compondverbands $\underline{\mathcal{B}}(\mathbf{i})$ und damit das Konzept von „Unter- / Ober-F-Compound“.



Veranschaulichung der **Halbordnunung $\leq_i$** im F-Compound-Kontext (F(REL), REL), **i**):

(F,R) $<_\mathbf{i}$ (F‘,R‘),
d.h.
(F,R) ist Unter-F-Compound von (F‘,R‘),
weil
$F \subset F‘$ und $R‘ \subset R$

Abb.13: Veranschaulichung von „Unter-/Ober-F-Compound“

Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften für F-Compoundumfänge und F-Com-poundinhalte:

(x) **(a)** Jeder F-Begriffsverband $\underline{B}(r)$ ($r \in REL$) ist ein F-Compoundumfang.
(b) Die F-Compoundumfänge sind genau die Verbandsdurchschnitte $\underline{D}(R)$ zu beliebigen (nicht-leeren) IN-Relationenteilmengen $R \subseteq REL$.
(c) Jeder F-Compoundinhalt R ist ein *Inf-Halbverband* in der IN-Relationen-menge REL, also gegen Infimum-Bildung in $(REL, \leq_{REL})$ abgeschlossen, d.h. für $r,s \in R$ ist auch $r \cap s \in R$. Zusammen mit der „trivialen“ Relation **triv** $= IN \times IN$ ist R^* := $R \cup \{$**triv**$\}$ daher ein **vollständiger Teilverband** des vollständigen Ver-bandes $(REL^*, \leq_{REL})$.

Bew.: (a) folgt aus (iii). Zu (b): Dass jeder F-Compoundumfang ein Verbandsdurchschnitt ist, besagt (vii). Sei um-gekehrt $R \subseteq REL$ eine beliebige nicht-leere IN-Relationenteilmenge und $\underline{D}(R)$ ihr Verbandsdurchschnitt; dann gilt mit (iv) $R^{\downarrow i} = \underline{D}(R)$. $(R^{\downarrow i}, R^{\downarrow i \uparrow i})$ ist aber nach (ix) ein F-Compound, also ist $\underline{D}(R)$ ein F-Compound-Umfang. Zu (c): Ist R ein F-Compoundinhalt, so gibt es ein $F \subseteq F(REL)$, so dass (F,R) ein F-Compound mit $F^{\uparrow i}=R$ ist. Sei $r,s \in R$. Aus (vii) folgt $r,s \in (A,B)^{\uparrow i}$ für alle $(A,B) \in F$, daher folgt mit (iii): $(A,B) \in B(r)$ und $(A,B) \in B(s)$, also $(A,B) \in B(r) \cap B(s) \subseteq B(r \cap s)$ und somit: $(A,B) \in B(r \cap s)$ für alle $(A,B) \in F$, d.h. $r \cap s \in (A,B)^{\uparrow i}$ für alle $(A,B) \in F$, also auch $r \cap s \in R$. Die letzte Behauptung ergibt sie daraus, dass $R^* := R \cup \{triv\}$ ein Hüllensystem über der Menge triv ist.

Beispiel: Abb.14 zeigt den sehr einfachen F-Compond-Kontext K_F und den F-Compond-Verband $\underline{\mathcal{B}}$(i) zum Beispiel von **Abb.10a/b** aus Kap.3.2.2 für die IN-Relationenmenge REL={r, s, r$\cap$s} und die F-Begriffsmenge F(REL) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, $\mathbf{0}_{F(REL)}$, α, β, α', β', γ, δ, ε, ζ}. Dort hatten wir die F-Compound-Umfänge B(r) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, α, γ, δ, β, $\mathbf{0}_{F(REL)}$}, B(s) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, α‘, γ, δ, β‘, $\mathbf{0}_{F(REL)}$}, B(r$\cap$s) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, ε, γ, δ, ζ, $\mathbf{0}_{F(REL)}$}, B(r)$\cap$B(s) = {$\mathbf{1}_{F(REL)}$, γ, δ, $\mathbf{0}_{F(REL)}$} $\subseteq$ B(r$\cap$s).

F-Compound-Kontext K_F		REL		
		r	s	r$\cap$s
F(REL)	α	x		
	β	x		
	α'		x	
	β'		x	
	γ	x	x	x
	δ	x	x	x
	ε			x
	ζ			x
	$\mathbf{1}_{F(REL)}$	x	x	x
	$\mathbf{0}_{F(REL)}$	x	x	x

F-Compound-Verband $\underline{\mathcal{B}}$(**i**)

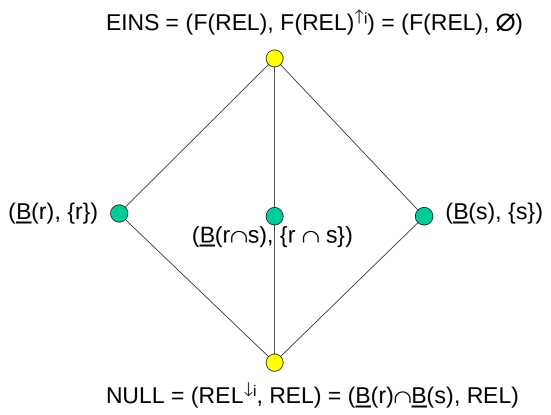


Abb.14: Der F-Compont-Kontext u. F-Compond-Verband zum Beispiel in **Abb.10a/b**

Anmerkung: Die letzte Aussage in (vii) gibt Anlass zu folgendem Abbildungspaar

φ^{sup}: $\underline{\mathcal{B}}$(i) $\to$ F(REL), φ_{inf}: $\underline{\mathcal{B}}$(i) $\to$ F(REL)

des F-Compoundverbandes $\underline{\mathcal{B}}$(i) in die Menge F(REL) der F-Begriffe, definiert durch φ^{sup}(F,R):= sup_RF $\in$ B(infR), φ_{inf}(F,R):= inf_RF $\in$ B(infR) für F-Compounds (F,R), wobei mit sup_R die Supremums-, mit inf_R die Infimumsbildung im jeweiligen F-Begriffsverband B(infR) bezeichnet sei. Eventuell könnte das Abbildungspaar nützlich für die Entdeckung weiterer Strukturen einer FBA-basierten Ontologie sein. Eine entsprechende Untersuchung wird hier nicht unternommen, sondern sei einer weiteren Note vorbehalten.

3.2.4 „Begriffsstufen“ für F-Begriffe

Schließlich gehen wir noch auf die Hüllensysteme ($\mathcal{U}$(**i**),$\subseteq$) bzw. ($\mathcal{J}$(**i**),$\subseteq$) der F-Compound-Umfänge bzw. –Inhalte ein:

$$\mathcal{U}(\mathbf{i}) := \{F\subseteq F(REL) \mid \exists R\subseteq REL:(F,R) \text{ ist F-Compond}\} = \{F^{\uparrow i\downarrow i} \mid F\subseteq F(REL)\},$$
$$\mathcal{J}(\mathbf{i}) := \{R\subseteq REL \mid \exists F\subseteq F(REL):(F,R) \text{ ist F-Compond}\} = \{R^{\downarrow i\uparrow i} \mid R\subseteq REL\}.$$

Der Hüllenoperator zu $\mathcal{U}$(i) ist $\varphi=...^{\uparrow i\downarrow i}$: PotF(REL)$\to$ $\mathcal{U}$(i) der zu $\mathcal{J}$(i) ist $\psi=...^{\downarrow i\uparrow i}$: PotREL$\to\mathcal{J}$(i). Diese Hüllensysteme sind (wie aus Kap.2.2.5.3 hervorgeht) beide **vollständige Verbände**. $\mathcal{U}$(i) nennen wir den **„F-Comp.Umfangsverband“**; er hat die EINS=F(REL) und die NULL=$REL^{\downarrow i}$ = D(REL) = Durchschnitt *aller* F-Begriffsverbände B(r). $\mathcal{J}$(i) nennen wir den **„F-Comp. Inhaltsverband“**; er hat die EINS=REL und die NULL=$F(REL)^{\uparrow i}$. Für die Verbandseigenschaft muss man sich nur merken, dass der Durchschnitt F$\cap$F’ zweier F-Compoundumfänge wieder ein F-Compoundumfang und der Durchschnitt R$\cap$R’ zweier F-Compoundinhalte wieder ein F-Compoundinhalt ist.

Anmerkung-1: Vereinigungsbildung ergibt: $\cup\mathcal{U}$(i) = F(REL), $\cup\mathcal{J}$(i) = REL

Anmerkung-2: Der F-Comp.Umfangsverband $\mathcal{U}$(i) ist nichts anderes, als das *F-Begriffs-Hüllensystems* $\mathcal{H}$(REL) [vgl. Kap.3.2.2/Anmerkung-3]: $\mathcal{U}$(i) = $\mathcal{H}$(REL).

Bew: Jeder F-Compound-Umfang ist Durchschnitt von F-Begriffsverbänden, also gilt $\mathcal{U}(i)\subseteq\mathcal{H}(REL)$. Aus Kap.3.2.3/(iii) folgt umgekehrt: jeder Durchschnitt von F-Begriffsverbänden ist die Ableitung $R^{\downarrow i}$ einer IN-Relationenmenge R⊆REL. Es ist aber ($R^{\downarrow i}$, $R^{\downarrow i\uparrow i}$) ein F-Compound, also ist $R^{\downarrow i}$ ein F-Compound-Umfang, $R^{\downarrow i}\in\mathcal{U}(i)$. Daher auch: $\mathcal{H}(REL)\subseteq\mathcal{U}(i)$.

Anmerkung-3: Nicht nur $\mathcal{U}$(i), sondern auch die Hauptideale von $\mathcal{U}$(i), sind **vollständige Verbände**; man könnte sie **„Super-F-Begriffe"** nennen.

Aus $\mathcal{U}$(i) und $\mathcal{J}$(i) kann man den **„•-F-Compound-Kontext"** ($\mathcal{U}$(i), $\mathcal{J}$(i), **i•**) machen mit der Inzidenzrelation **i•**, definiert durch F**i•**R :⇔ (F,R)∈$\mathcal{B}$(i), d.h. mengenmäßig ist **i•** nichts anderes als der F-Compondverband $\mathcal{B}$(i). Die „echten" formalen Begriffe dieses Kontextes – man könnte sie **„Super-F-Compounds"** nennen – haben die Form ({F}, {R}), wobei (F,R) ein F-Compound ist; die „unechten" sind: ($\mathcal{U}$(i),∅) =EINS, (∅,$\mathcal{J}$(i)) = NULL; im zugehörigen **vollständigen „•-Begriffsverband"** ($\mathcal{B}$(**i•**), $\leq_{i\bullet}$), sind alle „echten" Super-F-Compounds der Form ({F}, {R}) (mit F≠F(REL), F≠∅ und R≠REL, R≠∅) untereinander $\leq_{i\bullet}$–unvergleichbar.

Tab.2 gibt eine Übersicht über die Strukturen zum F-Compound-Kontext K_F. Sie ist aus Tab.1 in Kap.2.2.5.3 durch konsequente Substitutionen entstanden.

Tab.2: Merkdiagramm für „Begriffsstufen“ zum F-Compound-Kontext

Stufe	Gegenstände / Umfänge	Inzidenzrelation / Begriffsverband	Merkmale / Inhalte	Kontext / Kommentar
Stufe 0	$F(REL) = \cup_{r\in REL}\underline{B}(r)$ Menge der „Gegenstände“ von K_F – d.s. die F-Begriffe. $(F(REL),\leq_F)$ ist **kein** vollst. Verband!	$\mathbf{i}\subseteq F(REL)\times REL$. $(A,B)\ \mathbf{i}\ r \Leftrightarrow (A,B)\in F(REL)$	REL Menge der „Merkmale“ von K_F – d.s. die IN-Relationen. $(REL, \leq_{REL})$ ist ein vollst. Verband.	**F-Compound-Kontext**: K_F = (F(REL), REL, **i**)
	PotF(REL) .	$\xrightarrow{\uparrow i}$ $\xleftarrow{\downarrow i}$	. PotREL	$(\uparrow i, \downarrow i)$: Galoisverbindung zwischen F(REL) und REL
	$\uparrow i\downarrow i$ Hüllen-operator auf PotF(REL)	$\mathcal{B}(\mathbf{i})$ $\subseteq$PotF(REL)×PotREL $(F,R)\in\mathcal{B}(\mathbf{i})$ $:\Leftrightarrow F^{\uparrow i}=R,\ R^{\downarrow i}=F$. $(F,R)\leq_i(F',R') :\Leftrightarrow F\subseteq F', R'\subseteq R$	$\downarrow i\uparrow i$ Hüllen-operator auf PotREL	$\mathcal{B}(i)$: der F-Compoundverband zu K_F. (F,R): F-Compound. $\leq_i$: Halbordnung auf $\mathcal{B}(i)$
Stufe 1	$\mathcal{U}(i)$. **F-Comp.Umfangsverband** = Menge d.„Gegenstände“ von $K_{\underline{i}\bullet}$ - d .s. die F-Compound- Umfänge F=D(R), also die Verbandsdurchschnitte	$\underline{i\bullet} \subseteq\mathcal{U}(i)\times\mathcal{J}(i)$. $F\ \underline{i\bullet}\ R :\Leftrightarrow (F,R)\in \mathcal{B}(\mathbf{i})$, also $\underline{i\bullet} = \mathcal{B}(\mathbf{i})$	$\mathcal{J}(i)$ **F-Comp.Inhaltsverband** = Menge d. „Merkmale“ v. $K_{\underline{i}\bullet}$ - d.s. die F-Compound-Inhalte R	**„•-F-Comp.Kontext“** $K_{\underline{i}\bullet} = (\mathcal{U}(i), \mathcal{J}(i), \underline{i\bullet})$ (1. Stufe)
	Pot$\mathcal{U}$(i) .	$\xrightarrow{\uparrow\underline{i\bullet}}$ $\xleftarrow{\downarrow\underline{i\bullet}}$	. Pot$\mathcal{J}$(i)	$(\uparrow\underline{i\bullet}, \downarrow\underline{i\bullet})$: Galoisverbindung zwischen $\mathcal{U}$(i) und $\mathcal{J}$(i)
	$\uparrow\underline{i\bullet}\downarrow\underline{i\bullet}$ Hüllen-operator auf Pot$\mathcal{U}$(i)	$\mathcal{B}(\underline{i\bullet})$ $\subseteq$ Pot$\mathcal{U}$(i)×Pot$\mathcal{J}$(i). $(X,Y)\in\mathcal{B}(\underline{i\bullet})$ $:\Leftrightarrow X^{\uparrow i\bullet}=Y,\ Y^{\downarrow i\bullet}=X$. $(X,Y) \leq_{\underline{i}\bullet} (X',Y') :\Leftrightarrow X\subseteq X', Y'\subseteq Y$	$\downarrow\underline{i\bullet}\uparrow\underline{i\bullet}$ Hüllen-operator auf Pot$\mathcal{J}$(i)	$\mathcal{B}(\underline{i\bullet})$: Der Begriffsverband“ zu $\mathbf{K}_{\underline{r}\bullet}$. $\mathcal{B}(\underline{r\bullet})$ ist „primitiv“. (X,Y): ein $\mathcal{B}(\underline{i\bullet})$-Begriff $\leq_{\underline{i}\bullet}$: Halbordnung auf $\mathcal{B}(\underline{i\bullet})$.
Stufe 2	$\mathcal{U}(\underline{i\bullet})$. **•-Umfangsverband** = Menge d. „Gegenstände“ von $\mathbf{K}_{\underline{i}\bullet\bullet}$. Es ist $\mathcal{U}(\underline{i\bullet})=\{\mathcal{U}(r),\emptyset\}\cup\{\{F\}\mid F\in\mathcal{U}(i)\}$	$\underline{i\bullet\bullet} \subseteq \mathcal{U}(\underline{i\bullet})\times\mathcal{J}(\underline{i\bullet})$. $X\ \underline{r\bullet\bullet}\ Y$ $:\Leftrightarrow(X,Y)\in\mathcal{B}(\underline{i\bullet})$, also $\underline{i\bullet\bullet} = \mathcal{B}(\underline{i\bullet})$	. $\mathcal{J}(\underline{i\bullet})$ **•-Inhaltsverband** = Menge d.„Merkmale“ von $\mathbf{K}_{\underline{i}\bullet\bullet}$. Es ist $\mathcal{J}(\underline{r\bullet}) = \{\mathcal{J}(i),\emptyset\}\cup\{\{R\}\mid R\in\mathcal{J}(i)\}$	**„••-Kontext“** $\mathbf{K}_{\underline{i}\bullet\bullet}$= $(\mathcal{U}(\underline{i\bullet}),\mathcal{J}(\underline{i\bullet}),\underline{i\bullet\bullet})$ (2. Stufe)
usw.				

3.2.4.1 Alternativen zum F-Compound-Kontext

Statt des F-Compound-Kontextes K_F=(F(REL), REL, **i**) betrachten wir einmal den Kontext K_{hF} := (F(REL), F(REL), hF), wo die Inzidenzrelation hF die Halbordnung auf der F-Begriffsmenge ist, hF:= $\leq_F$. K_{hF} nennen wir den **„hF-Compound-Kontext“** der Ontologie. Ein Paar (F,G) mit F,G$\subseteq$F(REL) heiße **„hF-Compound“**, wenn $F^{\uparrow hF}$ = G und $G^{\downarrow hF}$ = F ist. Dabei heiße F der **Umfang**, G der **Inhalt** des hF-Compounds. Die Menge $\underline{\mathcal{B}}$(hF) aller hF-Compounds wird zu einem **vollständigen Verband**

($\underline{\mathcal{B}}$(hF),$\leq_{hF}$), wenn man die Halbordnung $\leq_{hF}$ durch (F,G)$\leq_{hF}$(F',G') :$\Leftrightarrow$ F$\subseteq$F', G'$\subseteq$G definiert. ($\underline{\mathcal{B}}$(hF), $\leq_{hF}$) heiße der **„hF-Compoundverband".** Zu ($\underline{\mathcal{B}}$(hF), $\leq_{hF}$) gehören der **„hF-Comp.Umfangsverband"** $\mathcal{U}$(hF):= $\cup\{F^{\uparrow hF\downarrow hF} \mid F\subseteq F(REL)\}$ und der **„hF-Comp.Inhaltsverband"** $\mathcal{J}$(hF):= $\cup\{G^{\downarrow hF\uparrow hF} \mid G\subseteq F(REL)\}$. ($\mathcal{U}$(hF),$\subseteq$), ($\mathcal{U}$(hF), $\subseteq$) sind beides vollständige Verbände mit „derselben" Struktur wie ($\underline{\mathcal{B}}$(hF), $\leq_{hF}$).

Definiert man nun wieder die **„•-Relation**" $\underline{hF\bullet}$ durch F $\underline{hF\bullet}$ G :$\Leftrightarrow$ (F,G)$\in\underline{\mathcal{B}}$(hF), so kommt man auf den **„•-hF-Compound-Kontext"** $K_{\underline{hF\bullet}}$:= ($\mathcal{U}$(hF), $\mathcal{J}$(hF), $\underline{hF\bullet}$) mit zugehörigem **„•-Begriffsverband"** ($\underline{\mathcal{B}}$($\underline{hF\bullet}$), $\leq_{\underline{hF\bullet}}$) und dem entsprechenden **„•-Umfangs-",** ($\mathcal{U}$(hF•), $\subseteq$) bzw. **„•-Inhaltsverband"** ($\mathcal{J}$(hF•), $\subseteq$) --- usw.

Man könnte nun noch ein paar Zusammenhänge zwischen F-Compounds und hF-Compounds untersuchen. Der Kürze halber unterlassen wir das vorläufig.

3.2.4.2 Zusammenfassung

Die Menge F(REL) der F-Begriffe einer Ontologie hat also nicht nur eine natürliche Halbordnung $\leq_F$, sondern sie ist darüber hinaus strukturiert in drei Stufen:

- *„Begriffe"*: Die F-Begriffe, also die Elemente von F(REL).
- *„Super-Begriffe"* (mehrere Arten): Die F-Compound-Umfänge F=$\underline{D}$(R)$\in\mathcal{U}$(i) des F-Umfangsverbandes $\mathcal{U}$(i)) (darunter die F-Begriffsverbände als spezielle F-Compound-Umfänge). Die hF-Compound-Umfänge F$\in\mathcal{U}$(hF) bzw. –Inhalte G$\in\mathcal{J}$(hF).
- *„Super-Super-Begriffe"* (mehrere Arten): Die Umfänge {F}$\in\mathcal{U}$($\underline{\mathbf{i\bullet}}$) des •-Umfangsverbandes $\mathcal{U}$($\underline{\mathbf{i\bullet}}$) („verpackte" F-Begriffe). Die entsprechenden „verpackten" Umfänge / Inhalte des •-Umfangs- bzw. •-Inhaltsverbandes $\mathcal{U}$($\underline{\bullet hF}$) bzw. $\mathcal{J}$($\underline{\bullet hF}$).

Dabei tritt als strukturbildende Eigenschaft in jeder Stufe die des **vollständigen Verbandes** auf.

Nun kommen wir auf das zurück, was in den konventionellen O-Definitionen als „Begriff" bezeichnet wird.

3.3 Die IN-Begriffsmenge der Ontologie und ihre Halbordnung

In den mir bekannten konventionellen O-Definitionen der Informatiker werden „Begriffe" *nicht* – wie in FBA – als Paare von Instanzenmengen, sondern als gewisse *Teilmengen* der Instanzenmenge **IN** selbst aufgefasst. Auch das können wir mit dem FBA-Konzept leicht nachvollziehen.

3.3.1 IN-Begriff

Def.11.IN-Begriff: Eine Teilmenge X$\subseteq$IN heiße ein „**IN-Begriff**" der Ontologie, wenn X der Umfang *oder* der Inhalt eines F-Begriffs ist. Die Menge aller IN-Begriffe definieren wir daher als

$$\begin{aligned}\mathbf{C(REL)} \;&:=\; \mathbf{\{X\in Pot(IN)\mid \exists r\in REL: (X,X^{\uparrow r})\in F(REL)}\ \textbf{\textit{oder}}\ \mathbf{(X^{\downarrow r},X)\in F(REL)\}}\\ &=\; \{X^{\uparrow r\downarrow r}\mid X\in \mathrm{Pot(IN)},\, r\in \mathrm{REL}\}\cup\{X^{\downarrow r\uparrow r}\mid X\in \mathrm{Pot(IN)},\, r\in \mathrm{REL}\}\\ &=\; \textstyle\bigcup_{r\in REL}\mathcal{U}(r)\cup\bigcup_{r\in REL}\mathcal{J}(r)\end{aligned}$$

Einfacher ausgedrückt: C(REL) := {X∈Pot(IN) | X ist Umfang oder Inhalt eines F-Begriffs}.
Ich wähle den Namen „IN-Begriff", weil solche „Begriffe" Mengen von *Instanzen* sind.

Jedenfalls ist ein IN-Begriff keine beliebige Instanzenmenge X, sondern eine solche wird erst zu einem *IN-Begriff*, wenn sie mit einer ***IN-Relation*** in der in Def.11 angegebenen Weise verknüpft ist. Die IN-Begriffsmenge C(REL) ist damit in einem O-Schema kein „eigenständiges" Gebilde (wie das in den O-Definitionen der Informatiker erscheint), sondern sie ist aus dem Stück (IN, REL) der Systeminterna von O, welches als der F-Compound-Kontext K_F=(F(REL), REL, **i**) dargestellt werden kann, ***abgeleitet***.

Anmerkung: IN-Begriffe können sowohl Mengen von „Gegenständen" („Dingen" / „Objekten" im intuitiven Sinne) als auch Mengen von „Merkmalen" („Eigenschaften" / „Attributen" im intuitiven Sinne) bedeuten. Auch hier wieder sind, gemäß FBA-Terminologie, „Gegenstand" und „Merkmal" *keine absolut gemeinten Termini*, sondern das hängt von der zugrundegelegten ***Relation*** ab. Die in den informatischen O-Definitionen beobachtbare „***Unsymmetrie***" durch Bevorzugung der „Gegenstandsbegriffe" gegenüber den „Merkmalbegriffen" – letztere bei den Informatikern auch „Attribute & Methoden" genannt, vgl. etwa [12] – fällt mit dem FBA-Konzept weg. „Gegenstandsbegriffe" (Umfänge) werden hier genau so behandelt wie „Merkmalbegriffe" (Inhalte).

3.3.2 Die Umfangs- und Inhaltsmenge der IN-Begriffsmenge C(REL)

Die IN-Begriffsmenge C(REL) hat zwei sich *überlappende* Teile, die sich aus den in Kap.2.2.5.3 erwähnten **Umfangs-** bzw. **Inhaltsverbänden** zusammensetzen:

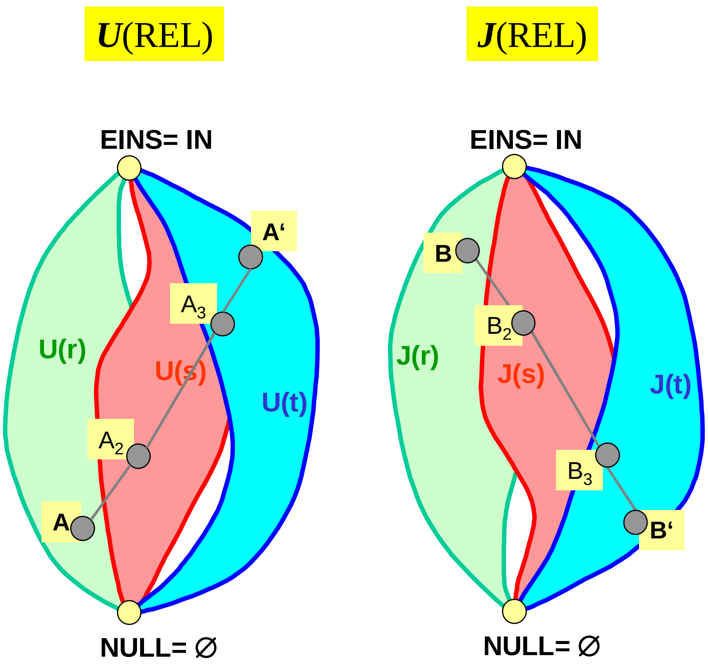
$\mathcal{U}$(REL) := $\bigcup_{r\in REL}\mathcal{U}(r)$ = $\{X^{\uparrow r\downarrow r}\mid X\in Pot(IN), r\in REL\}$ = Vereinigung aller **Umfangsverbände** $\mathcal{U}$(r) der Kontexte K_r=(IN,IN,r) (r∈REL). $\mathcal{U}$(REL) heiße die **Umfangsmenge der Ontologie**.

$\mathcal{J}$(REL) := $\bigcup_{r\in REL}\mathcal{J}(r)$ = $\{X^{\downarrow r\uparrow r}\mid X\in Pot(IN), r\in REL\}$ = Vereinigung aller **Inhaltsverbände** $\mathcal{J}$(r) der Kontexte K_r=(IN,IN,r) (r∈REL). $\mathcal{J}$(REL) heiße die **Inhaltsmenge der Ontologie.**

Anmerkung: $\mathcal{U}$(REL) und $\mathcal{J}$(REL) zusammen bilden die IN-Begriffsmenge, $\mathcal{U}$(REL)∪$\mathcal{J}$(REL)=C(REL). Ihr Durchschnitt $\mathcal{U}$(REL)∩$\mathcal{J}$(REL) ist ***nicht leer***, weil die „unechten" IN-Begriffe IN und ∅ in beiden Teilen vorkommen, und weil manche Instanzen sowohl als „Gegenstände" als auch als „Merkmale" eines F-Begriffes dienen können.

$\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL) haben eine sehr ähnliche Struktur wie die Halbordnung (F(REL),$\leq_F$) aller F-Begriffe, nämlich die eines „***Bananenbündels***" mit zusammenfallenden oberen und unteren Enden, wobei jede „Banane" einen Umfangsverband $\mathcal{U}$(r) bzw. einen Inhaltsverband $\mathcal{J}$(r) darstellt. Das zeigt **Abb. 15**.

Wir wollen zunächst natürliche Halbordnungen auf diesen beiden Teilen einrichten, die sich aus den natürlichen Halbordnungen der Umfangsverbände ($\mathcal{U}$(r),⊆) und der Inhaltsverbände ($\mathcal{J}$(r),⊆) (r∈REL) sowie der Halbordnung (F(REL),$\leq_F$) ergeben.



Veranschaulichung der Halbordnungen
U(REL)= U(r)∪U(s)∪U(t),
„Umfangsmenge“
(Vereinigung der Umfangsverbände)
und
J(REL)= J(r)∪J(s)∪J(t)
„Inhaltsmenge“ (Vereinigung der Inhaltsverbände)
Im Fall REL_0={r, s, t}.
Es gilt im Beispiel:
$A <_U A_2 <_U A_3 <_U A‘$
bzw.
$B‘ <_J B_3 <_J B_2 <_J B$
weil
$(A,B) <_r (A_2,B_2) <_s (A_3,B_3) <_t (A‘,B‘)$
gilt für die entsprechenden F-Begriffe.

Abb.15: Die „Bananenbündel“ von *U*(REL) und *J*(REL)

Def.12.Halbordnungen auf *U*(REL), *J*(REL):

(a) Für F-Begriffsumfänge A, A’∈*U*(REL) definieren wir $A\leq_U A’$ folgendermaßen: Im Fall A=A’ sei $A\leq_U A’$. Im Fall A≠A’ gelte $A\leq_U A’$ genau dann, wenn es Inhalte B, B’∈*J*(REL) gibt, so dass (A,B), (A’,B’) F-Begriffe sind, und $(A,B)\leq_F(A’,B’)$ gilt.

(b) Für F-Begriffsinhalte B, B’∈*J*(REL) definieren wir $B\leq_J B’$ entsprechend: Im Fall B=B’ sei $B\leq_J B’$. Im Fall B≠B’ gelte $B\leq_J B’$ genau dann, wenn es Umfänge A, A’∈*U*(REL) gibt, so dass (A,B), (A’,B’) F-Begriffe sind, und $(A,B)\leq_F(A’,B’)$ gilt.

Zu beweisen ist, dass (*U*(REL),$\leq_U$) und (*J*(REL),$\leq_J$) Halbordnungen sind. Dazu folgende Sprechweise für A, A’∈*U*(REL) bzw. B, B’∈*J*(REL): Wir sagen „es gibt einen *Pfad* von A nach A’ “ wenn für entsprechende F-Begriffe $(A,B)\leq_F(A’,B’)$ gilt, und entsprechend: „es gibt einen *Pfad* von B nach B’“, wenn für entsprechende F-Begriffe $(A’,B’)\leq_F(A,B)$ gilt.

(i) (*U*(REL),$\leq_U$) und (*J*(REL),$\leq_J$) sind Halbordnungen.

Bew.(a): Reflexivität von $\leq_U$ ist klar. Zur Antisymmetrie: Sei $A\leq_U A’$und $A’\leq_U A$; im Fall für A=A’ ist klar, dass daraus A=A’ folgt; Annahme A≠A’: Dann gibt es einen Pfad von A nach A’ und einen von A’ nach; Widerspruch; also A=A’; damit gilt auch die Antisymmetrie. Zur Transitivität: Sei $A\leq_U A’$ und $A’\leq_U A’’$; für A=A’ bzw. für A’=A’’ folgt $A\leq_U A’’$. Fall A≠A’, A’≠A’’: Nach Voraussetzung gibt es einen Pfad von A nach A’ und einen von A’ nach A’’, also zusammen einen von A nach A’’, also gilt dann auch $A\leq_U A’’$. Damit gilt auch die Transitivität, und $\leq_U$ ist Halbordnung auf *U*(REL). Analog beweist man, dass $\leq_J$ Halbordnung auf *J*(REL) ist.

(*U*(REL),$\leq_U$), (*J*(REL),$\leq_J$) sind jedoch – ebenso wie (F(REL),$\leq_F$) – i. allg. selbst ***keine*** vollständigen Verbände!

3.3.3 Die Halbordnung („Taxonomie") auf der IN-Begriffsmenge

Die Halbordnung auf C(REL) leiten wir aus den Halbordnungen $\leq_U$, $\leq_J$ in natürlicher Weise ab und bezeichnen sie mit „$\leq_C$":

Def.13.Halbordnung auf C(REL): Seien X, Y $\in$ C(REL).

$$X \leq_C Y :\Leftrightarrow \begin{cases} X \leq_U Y & \text{falls X,Y Umfänge von F-Begriffen sind,} \\ X \leq_J Y & \text{falls X,Y Inhalte von F-Begriffen sind.} \end{cases}$$

Die Definition ist so gewählt, dass aus $X \leq_C Y$ stets $X \subseteq Y$ folgt.

Anmerkung-1: Die Halbordnung $\leq_C$ ist aber „**restriktiver**" als die pure Mengeninklusion auf C(REL), denn aus $X \subseteq Y$ muss nicht immer $X \leq_C Y$ folgen: X,Y (mit $X \subset Y$) können $\leq_C$-unvergleichbar sein, z.B. wenn ein F-Begriff mit Umfang (bzw. Inhalt) X $\leq_F$-unvergleichbar zu einem F-Begriff mit Umfang (bzw. Inhalt) Y ist. In (A,B), (A,B')$\in$ F(REL) mit $B \neq B'$ sind die Inhalte B, B' immer $\leq_J$-unvergleichbar; in (A,B), (A',B)$\in$F(REL) mit $A \neq A'$ sind die Umfänge A, A' immer $\leq_U$-unvergleichbar.
Ist Z, Z'$\in \mathcal{U}$(REL)$\cap \mathcal{J}$(REL), so ist es nicht „verboten", dass sowohl (Z,Z') als auch (Z',Z) ein F-Begriff sein kann; im ersten Fall zählt dann Z als Umfang, Z' als Inhalt; im zweiten Fall ist es umgekehrt.

Mit der *Vereinbarung (i)* von Kap.3.2.1.2 über die F-Kontexte ist **IN** *der* ***größte*** und $\emptyset$ *der* ***kleinste*** IN-Begriff (beide sind natürlich vom praktischen Standpunkt her „unwichtig" / „unecht", für die mathematische Struktur der Ontologie sind sie jedoch relevant). Gilt X $<_C$ Y für X,Y$\in$C(REL), so heiße X ein „**Unter-IN-Begriff**" von Y bzw. Y ein „**Ober-IN-Begriff**" von X. Gilt weder $X \leq_C Y$ noch $Y \leq_C X$, so gelten die beiden IN-Begriffe als **$\leq_C$-unvergleichbar**. Informatiker nennen die strikte Form $<_C$ der Halbordnung auf der IN-Begriffsmenge eine **„Taxonomie"** und bezeichnen sie oft mit H[18].

Anmerkung-2: Ausgehend vom FBA-Konzept braucht man jedenfalls für die Festlegung der Halbordnung („**Taxonomie**" H) auf der IN-Begriffsmenge keine „Klimmzüge" zu veranstalten, sondern sie ergibt sich sozusagen „von selbst" durch die Ableitung der Mengen F(REL), C(REL) aus den O-System-Interna (IN, REL).

Anmerkung-3: Informatiker scheinen für die Menge **C** der „Begriffe" ihrer Ontologie meist nur das zu nehmen, was wir als die Umfangsmenge $\mathcal{U}$(REL) bezeichnen. Ihre „**Taxonomie H**" ist dann die strikte Form $<_U$ der Halbordnung $\leq_U$ auf $\mathcal{U}$(REL). Jeder „Begriff" A von **C** wird bei den Informatikern „beschrieben", wobei diese „Beschreibung" meist *gar nicht als programmtechnisch prozessierbar* aufgefasst wird. Da sie nicht vom FBA-Konzept ausgehen, merken sie nicht, dass eine solche „Beschreibung" formalisiert werden kann als der zum Umfang A gehörige Inhalt B, so dass (A,B) ein F-Begriff wird; – und dass die Menge aller formalisierten „Beschreibungen" ein zu ihrer Begriffsmenge **C** dual ***völlig gleichberechtigtes*** System darstellt, nämlich das Inhaltssystem $\mathcal{J}$(REL). Außerdem bleibt der strukturell einfache Zusammenhang zwischen der Begriffsmenge **C**, der Taxonomie **H** und der Menge **R** ihrer *binären Relationen* auf ***C*** unaufgedeckt, und sie müssen sich bei der Ermittlung sowohl der Taxonomie **H** als auch der Relationen r$\in$**C×C** sozusagen mit „intuitivem Gewurstel" bzw. mit der Anlehnung an überalterte philosophische Traditionen begnügen. All diese Mängel / Unsymmetrien fallen mir in den Konzepten der **OOP** (Objektorientierten Programmierung) und der **UML** (Unified Modeling Language) auf.

Abb.16 zeigt die IN-Begriffsmenge C(REL) als Bündel der zwei „Bananen" $\mathcal{U}$(REL) und $\mathcal{J}$(REL). In ihrem Durchschnitt befinden sich diejenigen IN-Begriffe, die sowohl als Umfänge („Gegenstandsbegriffe") als auch als Inhalte („Merkmalbegriffe") für die durch REL strukturierte Ontologie gelten.

---

[18] Wie schon erwähnt, ist in einer ***Taxonomie*** „<" die Aussage „α ist Unterbegriff von β" bei den Informatikern meist so gemeint, dass α *unmittelbarer* Unterbegriff von β sei, d.h.: $\alpha<\beta$ und es gibt kein γ mit $\alpha<\gamma<\beta$. Die FBA-Leute sagen dazu: „α ist *unterer Nachbar* von β". Der Grund für diese unterschiedliche Interpretation ist: Beim Begriffsaufbau einer konventionellen Ontologie ist den Informatikern wichtig, dass keine „Hierarchiestufe" vergessen / übersprungen wird (das passiert leicht, wenn man kein mathematisches Grundkonzept hat). Bei der *mathematischen* Definition für „endliche Halbordnung" oder „endlicher vollständiger Verband" ist das selbstverständlich und wird daher nicht besonders erwähnt, denn es steckt bereits in der Definition für "endliche Halbordnung". (Historisch gesehen ist eine „Taxonomie" nur eine spezielle, nämlich eine *hierarchische*, Halbordnung.)

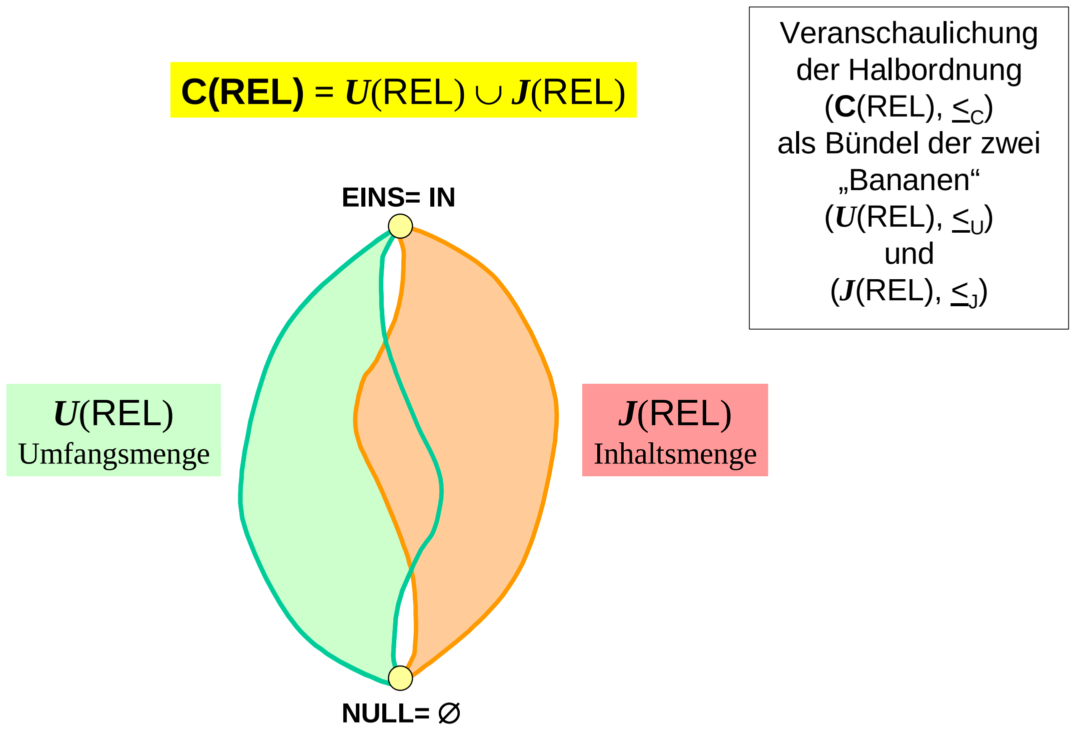


Abb.16: Die IN-Begriffsmenge C(REL) als „Bananenbündel“

Anmerkung-4: Fasst man die Halbordnungen als Teilmengen kartesischer Produkte auf: $\leq_U \subseteq \mathcal{U}(\text{REL})\times\mathcal{U}(\text{REL})$, $\leq_J \subseteq \mathcal{J}(\text{REL})\times\mathcal{J}(\text{REL})$, $\leq_C \subseteq \text{C(REL)}\times\text{C(REL)}$, so ist die Halbordnung („Taxonomie“) auf der IN-Begriffsmenge C(REL) die Vereinigung der Halbordnungen auf Umfangs- und Inhaltsmenge**:** $\boldsymbol{\leq_C = \leq_U \cup \leq_J}$**.**

3.3.4 Die Menge der C-Relationen und ihre Halbordnung

Beim O-Schema der Informatiker geht man von Relationen *auf der **Begriffsmenge*** aus (und nicht auf der Instanzenmenge). Auch das können wir mit dem FBA-Konzept leicht nachvollziehen, wenn wir als Begriffsmenge die ***IN-Begriffsmenge C(REL)*** nehmen. Mit einer C-Relation soll ein IN-Begriff A mit einem IN-Begriff B verknüpft werden, wenn A der Umfang und B der Inhalt des F-Begriffs (A,B) ist. Daher wählen wir folgende Definition:

Def.13.C-Relationen: Aus jeder IN-Relationenteilmenge R⊆REL, leiten wir eine **„C-Relation“** $\underline{\mathbf{R\bullet}} \subseteq \text{C(REL)}\times\text{C(REL)}$ ab durch die Definition

A $\underline{\mathbf{R\bullet}}$ B :⇔ (A,B)∈$\underline{\text{D}}$(R), für A∈$\mathcal{U}$(REL), B∈$\mathcal{J}$(REL), wobei $\underline{\text{D}}$(R) der *Verbandsdurchschnitt* zu R ist [vgl. Kap.3.2.2/(iii)].

Ein Paar (A,B) zweier IN-Begriffe steht also in einer C-Relation $\underline{\mathbf{R\bullet}}$ genau dann, wenn A der *Umfang* und B der *Inhalt* eines F-Begriffs ist mit (A,B)∈B(r) für alle r∈R. Als Teilmenge von C(REL)×C(REL) aufgefasst ist $\underline{R\bullet}$ mit dem Verbandsdurchschnitt $\underline{\text{D}}$(R) identisch

(i) $\underline{R\bullet} = \underline{\text{D}}(R)$

Anmerkung: Ist speziell R einelementig, R={r}, so schreiben wir $\underline{R\bullet} := \underline{r\bullet}$, und $\underline{r\bullet}$ ist identisch mit dem zur IN-Relation r∈REL gehörigen F-Begriffsverband $\underline{\text{B}}$(r) :

$\underline{\mathbf{r\bullet}} = \underline{\text{B}}(r) = r^{\downarrow i}$ (**i** war die Inzidenzrelation zum F-Compoundkontext K_F)

Da bei gegebenem r∈REL die Operationen ↑r und ↓r ***Abbildungen*** („Funktionen") sind, gilt wegen (i):

(ii) (a) Aus X**r•**Y_1 und X**r•**Y_2 folgt $Y_1=Y_2$; sowie: aus X_1**r•**Y und X_2**r•**Y folgt $X_1=X_2$.
(b) Gilt X**r•**Y_1 und X**s•**Y_2 mit $Y_1 \neq Y_2$ (bzw. X_1**r•**Y und X_2**s•**Y mit $X_1 \neq X_2$), so muss **r•**≠**s•** sein;

d.h. zu *gegebenem(!)* **r•** bestimmt der Umfang eines F-Begriffs seinen Inhalt *eindeutig*; und umgekehrt. Andererseits kann es zwei verschiedene C-Relationen **r•**, **s•** geben mit X**r•**Y *und* X**s•**Y.

Nach Kap.3.2.3/Satz (x) sind die Verbandsdurchschnitte D(R) (R⊆REL) genau die F-Compoundumfänge F∈$\mathcal{U}$(i), also die Elemente des F-Comp.Umfangsverbands $\mathcal{U}$(i) [vgl. Kap.3.2.4]. Damit gilt:

(iii) **Satz:** Die gesamte Menge **REL** aller **C-Relationen auf C(REL)** ist nichts anderes als der **F-Compound-Umfangsverband** $\mathcal{U}$(i). Damit ist REL ein **vollständiger Verband** und trägt somit auch eine natürliche Halbordnung.
(REL, ⊆) = ($\mathcal{U}$(i), ⊆). Vereinigungsbildung ergibt:
∪REL = $\cup_{r\in REL}$ **r•** = F(REL) = Menge aller F-Begriffe der Ontologie.

Bei konventionellen O-Schema-Definitionen der Informatiker ist zwar von einer „**Taxonomie**" auf der Begriffsmenge **C**, nie aber von einer Halbordnung (also ebenfalls einer „Taxonomie") auf der Menge der (binären) C-*Relationen* die Rede. Die Relationenmenge erscheint in konventionellen Ontologien „völlig ungeordnet".

3.3.5 Der C-Compound-Kontext der Ontologie

Nun können wir das ganze Stück (C(REL), REL) des O-Schemas einer Ontologie von der Instanzenmenge „abkoppeln" und es mit ***einem*** formalen Kontext, genannt: **„C-Compound-Kontext der Ontologie"**, beschreiben:

(i) **K_C := ($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), j),** wobei die Inzidenzrelation **j** definiert ist durch A **j** B :⇔ ∃R⊆REL:(A,B)∈D(R) ⇔ ∃**R•**∈REL: A **R•** B für A∈$\mathcal{U}$(REL), B∈$\mathcal{J}$(REL), mit dom(**j**) =$\mathcal{U}$(REL), range(**j**) =$\mathcal{J}$(REL). Die F-Begriffs-Umfänge A∈$\mathcal{U}$(REL) sind die neuen „**Gegenstände**", die F-Begriffs-Inhalte B∈$\mathcal{J}$(REL) die neuen „**Merkmale**" im C-Compound-Kontext.

(ii) **j**, als Menge aufgefasst, ist nichts anderes als die Menge der F-Begriffe der Ontologie **j = F(REL).**

(iii) Mit der durch **j** gegebenen *Galoisverbindung* (↑j,↓j) zwischen $\mathcal{U}$(REL) und $\mathcal{J}$(REL) gilt für irgendwelche Teilmengen C ⊆$\mathcal{U}$(REL), D ⊆$\mathcal{J}$(REL):

$C^{\uparrow j}$ = {B∈$\mathcal{J}$(REL)| ∀A∈C:(A,B)∈F(REL)} = $\bigcap_{A\in C}\{A\}^{\uparrow j}$
= Durchschnitt aller Merkmalzeilen, deren IN-Begriffe zu C gehören. Ein Inhalt B gehört zu $C^{\uparrow j}$, g.d. wenn er mit *allen* Umfängen A∈C F-Begriffe (A,B) bildet.

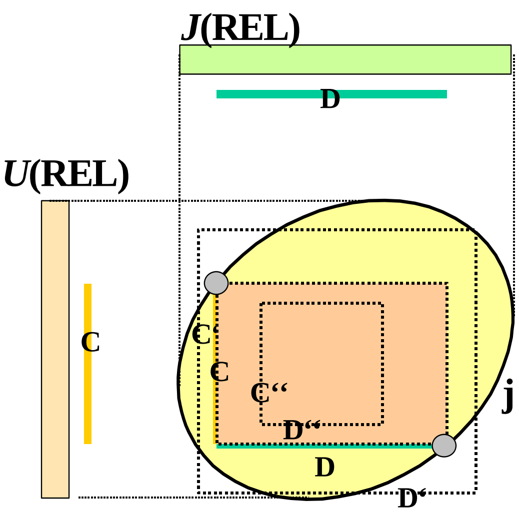
$D^{\downarrow j}$ = {A∈$\mathcal{U}$(REL)| ∀B∈D:(A,B)∈F(REL)} = $\bigcap_{B\in D}\{B\}^{\downarrow j}$
= Durchschnitt aller Gegenstandsspalten, deren IN-Begriffe zu C gehören. Ein Umfang A gehört zu $D^{\downarrow j}$, g.d. wenn er mit *allen* Inhalten B ∈D F-Begriffe (A,B) bildet.

Die *formalen Begriffe* des Kontextes K_C nennen wir nicht „F-Begriffe", denn dieses Wort ist schon zu sehr überlastet, sondern wir benutzen wieder die „Compound"-Bezeichnung.

Def.14.C-Compound: Ein Paar (C,D) mit C⊆$\mathcal{U}$(REL), D⊆$\mathcal{J}$(REL) heiße ein „**C-Compound**" des Kontextes ($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), **j**) genau dann, wenn **$C^{\uparrow j}$ = D** *und* **$D^{\downarrow j}$ = C** gilt. C heiße der „**Umfang**", D der „**Inhalt**" des C-Compounds. Die C-Compoundmenge $\mathcal{B}(\mathbf{j})$:= {(C,D) | C⊆$\mathcal{U}$(REL), D⊆$\mathcal{J}$(REL), (C,D) ist ein C-Compound} heiße der „**C-Compoundverband**“ der Ontologie. Auf $\mathcal{B}(\mathbf{j})$ wird gemäß FBA eine Halbordnung $\leq_j$ definiert durch (C,D) $\leq_j$ (C’,D’) :⇔ C⊆C’ ⇔ D’⊆D. Nach dem Hauptsatz der FBA ist ($\mathcal{B}(\mathbf{j})$, $\leq_j$) ein **vollständigen Verband**.

Mit der Hilfsdefinition Def.4.1 aus Kap.2.2.5.2 bekommt man eine gewisse Vorstellung von dem, was ein „C-Compound“ des Kontextes K_C ist:

Ein C-Compound (C,D) stellt sich in der Kontexttabelle ($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), **j**) dar als ein *extremales Rechteck* C×D⊆**j**; es ist „*extremal*“ in dem Sinne, dass jedes „echt kleinere“ oder „echt größere“ Rechteck (C’⊂C, D’⊂D oder C⊂C’, D⊂D’) ***keinen*** C-Compound von K_C mehr darstellt. Dies wird in **Abb.17** veranschaulicht.



Veranschaulichung eines C-Compounds (C,D) als **„extremales Rechteck“** im **C-Compoundkontext** ($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), **j**)

CxD stellt einen C-Compound dar, weil $C^{\uparrow j}$=D und $D^{\downarrow j}$=C.

Jedes größere Rechteck C‘xD‘, C⊂C‘, D⊂D‘, u. jedes kleinere Rechteck C“xD“,

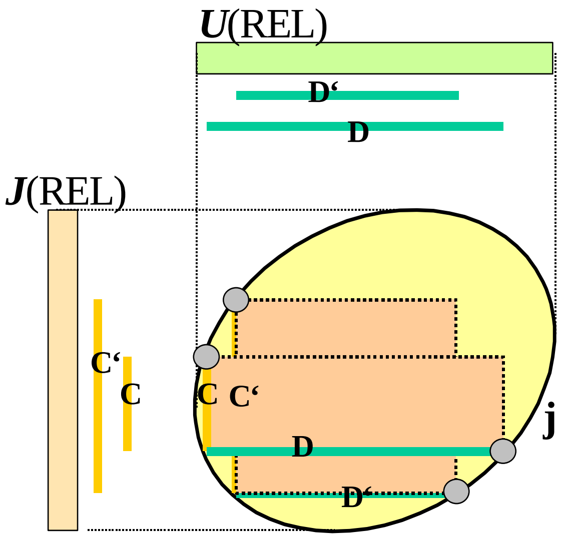
C“⊂C, D“⊂D,

stellt *keinen* C-Compound mehr dar.

Abb.17: Veranschaulichung eines C-Compounds als „extremales Rechteck

Abb.18 Zeigt im C-Compound-Kontext eine Veranschaulichung der Halbordnung $\leq_j$ des C-Compound-Verbands $\mathcal{B}$(j) und damit die Beziehung „Unter- / Ober-C-Compound“.

Nun ein paar Einzelheiten zur Struktur der Umfangsmenge $\mathcal{U}$(REL), der Inhaltsmenge $\mathcal{J}$(REL) und der C-Compounds des Kontextes K_C.



Veranschaulichung der **Halbordnunung ≤j** im C-Compound-Kontext (***U***(REL), ***J***(REL), **j**):

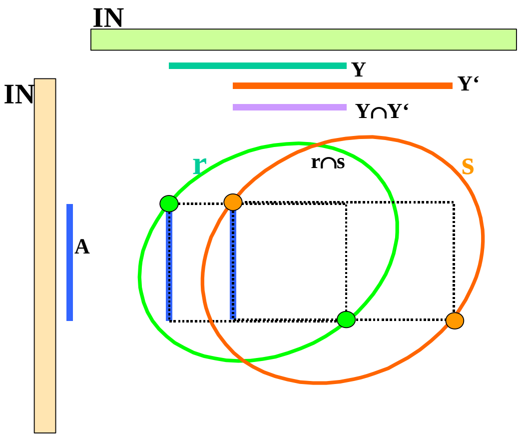
(C,D) <j (C‘,D‘),
d.h.
(C,D) ist Unter-C-Compound von (C‘,D‘),
weil
$C\subset C'$ und $D'\subset D$

Abb.18: Veranschaulichung „Unter- / Ober-C-Compound“

(iv) **Def. echt / unecht:** Folgende **Sprechweise** ist nützlich. Den größten bzw. kleinsten IN-Begriff, IN bzw. ∅, nennen wir „**unecht**“; einen F-Begriffs-Umfang $A\in \boldsymbol{U}$(REL) oder –Inhalt $B\in \boldsymbol{J}$(REL) nennen wir „**echt**“, wenn er weder der größte, noch der kleinste IN-Begriff ist. Eine (nicht-leere) Teilmenge $C\subseteq \boldsymbol{U}$(REL) bzw. $D\subseteq \boldsymbol{J}$(REL) nennen wir „**echt**“, wenn *alle* IN-Begriffe von C bzw. D *echt* sind, andernfalls „**unecht**“.

(v) Sei $A\in \boldsymbol{U}$(REL) ein einzelner F-Begriffsumfang, $B\in \boldsymbol{J}$(REL) ein einzelner F-Begriffsinhalt; nach (iii) ist dann $\{A\}^{\uparrow j}$ die Menge aller Inhalte $Y\in \boldsymbol{J}$(REL), die mit A F-Begriffe (A,Y) bilden; und $\{B\}^{\downarrow j}$ die Menge aller Umfänge $X\in \boldsymbol{U}$(REL), die mit B F-Begriffe (X,B) bilden. Es gilt:
(a) Ein Umfang A bzw. Inhalt B ist genau dann **unecht**, wenn $\{A\}^{\uparrow j}$ bzw. $\{B\}^{\downarrow j}$ **unecht** sind. Im einzelnen: $A=IN \Leftrightarrow \varnothing\in\{A\}^{\uparrow j} \Leftrightarrow \{A\}^{\uparrow j}=\{\varnothing\}$; $A=\varnothing \Leftrightarrow IN\in\{A\}^{\uparrow j} \Leftrightarrow \{A\}^{\uparrow j}=\{IN\}$. Dual dazu: $B=IN \Leftrightarrow \varnothing\in\{B\}^{\downarrow j} \Leftrightarrow \{B\}^{\downarrow j}=\{\varnothing\}$; $B=\varnothing \Leftrightarrow IN\in\{B\}^{\downarrow j} \Leftrightarrow \{B\}^{\downarrow j}=\{IN\}$. Daraus folgt: A ist genau dann echt, wenn $\{A\}^{\uparrow j}$ echt ist; B ist genau dann echt, wenn $\{B\}^{\downarrow j}$ echt ist.
(b) Ist $\{A\}^{\uparrow j}$ bzw. $\{B\}^{\downarrow j}$ mehrelementig, so ist A bzw. B **echt**.
(c) Ist $\{A\}^{\uparrow j}$ mehrelementig, so sind alle F-Begriffe (A,Y), (A,Y') mit $Y,Y'\in\{A\}^{\uparrow j}$, $Y\neq Y'$ **≤$_F$–*unvergleichbar***; und somit sind die Y, Y' **≤$_C$-*unvergleichbar***. Dual: Ist $\{B\}^{\downarrow j}$ mehrelementig, so sind alle F-Begriffe (X,B), (X',B) mit $X,X'\in\{A\}^{\uparrow j}$, $X\neq X'$ **≤$_F$–*unvergleichbar;*** und somit sind die X, X' **≤$_C$-*unvergleichbar*.**
(d) Seien A, B **echt**; dann gilt: Mit $Y,Y'\in\{A\}^{\uparrow j}$ ist auch $Y\cap Y'\in\{A\}^{\uparrow j}$ genau dann, wenn $Y\cap Y'\neq\varnothing$. Dual: Mit $X,X'\in\{B\}^{\downarrow j}$ ist auch $X\cap X'\in\{B\}^{\downarrow j}$ genau dann, wenn $X\cap X'\neq\varnothing$.

Bew.: (a) IN als Umfang (Inhalt) hat nur den Inhalt (Umfang) ∅. Ein echter Umfang (Inhalt) kann (lt. Def. „echt“) zu keinem unechten Inhalt (Umfang) gehören. (b) folgt direkt auch (a). (c) ergibt sich aus Kap.3.2.2/(ii)(b). Zu (d) Sei A echter Umfang zweier verschiedener F-Begriffe $(A,Y)\in\underline{B}(r)$, $(A,Y')\in\underline{B}(s)$ $(r\neq s)$. Man rechnet aus: $A^{\uparrow r}\cap A^{\uparrow s} = A^{\uparrow r\cap s}$, $(Y\cap Y')^{\downarrow r\cap s} = A$, $A^{\uparrow r\cap s} = Y\cap Y'$. Da A als **echt** vorausgesetzt wurde, ist $Y\cap Y' \in\{A\}^{\uparrow j}$ genau dann, wenn $Y\cap Y'\neq\varnothing$ ist. Die Veranschaulichung zu (d) zeigt **Abb.19**. Die zweite Behauptung in (d) ist dual zur ersten und wird analog bewiesen.



Veranschaulichung:
Zwei F-Kontexte
K_r= (IN, IN, r),
K_s = (IN, IN, s)
in derselben
Kontexttabelle.

Ist (A,Y) F-Begriff zu r und (A,Y') F-Begriff zu s, so ist (A,Y∩Y') F-Begriff zu r∩s, falls Y∩Y' nicht leer ist .

Abb.19: Veranschaulichung zur Behauptung (d)

Nun noch ein paar Aussagen über C-Compounds:

(vi) Seien (C,D), (C',D') C-Compounds.
(a) Jede Kombination (A,B)∈C×D ist ein F-Begriff.
(b) Je zwei verschiedene F-Begriffsumfänge A, A'∈C sind **$\leq_U$-*unvergleichbar***; und je zwei verschiedene F-Begriffsinhalte B, B'∈D sind **$\leq_J$-*unvergleichbar***.
(c) Der kleinste F-Begriff, der C×D in seinem Umfang enthält, nämlich $((C\times D)^{\downarrow i\downarrow i}, (C\times D)^{\downarrow i})$ (**i** war die Inzidenzrelation zum **F**-Compoundkontext K_F), ist *stets der unechte* F-Begriff (IN, ∅)=$EINS_{F(REL)}$**.**
(d) Ist C bzw. D mehrelementig, so ist C bzw. D *echt*.
(e) C bzw. D ist genau dann *unecht*, wenn C bzw. D von der Form {IN} oder {∅} ist.
(f) Sind C, C' C-Compoundumfänge, so ist auch C∩C' ein C-Compoundumfang; sind D, D' C-Compoundinhalte so ist auch D∩D' ein C-Compoundinhalt.
(g) Die C-Compoundumfänge bilden einen vollständigen Verband, den „**C-Compound-Umfangsverband**" $\mathcal{U}$(**j**); die C-Compoundinhalte bilden einen vollständigen Verband, den „**C-Compound-Inhaltsverband**" $\mathcal{J}$(**j**).
(h) In jedem C-Compound (C,D) gilt für F-Begriffe (A,B), (A,B'), (A',B), (A',B')∈ C×D: Ist A≠A', B≠B' und (A,B)∈<u>B</u>(r), (A,B')∈<u>B</u>(s), (A',B)∈<u>B</u>(t), (A',B')∈<u>B</u>(u), so gilt für die IN-Relationen r, s, t, u ∈REL: r≠s, r≠t, t≠u und s≠u. (Es könnte höchstens r=u oder s=t sein.)
(i) Sei R(C,D) := {r∈REL | ∃(A,B)∈C×D: (A,B)∈<u>B</u>(r)} die Menge der *„am C-Compound (C,D) beteiligten*" IN-Relationen. Dann ergibt sich folgende *Abschätzung* für die Anzahl |R(C,D)|: max{|C|, |D|} ≤ |R(C,D)| ≤ |C|·|D| ≤ |REL|.

Bew.: Die Aussagen (a) – (f) folgen leicht aus (v). (g) folgt aus (f). Zu (h) und (i): Sei (C,D) ein C-Compound. Ist A∈C, so heiße die Menge Z^A :={(A,Y)∈F(REL)| Y∈D} die „A-Zeile"; ist B∈D, so heiße die Menge S_B := {(X,B)∈F(REL) | X∈C} die „B-Spalte". Alle an einer A-Zeile beteiligten IN-Relationen sind ***verschieden***, ihre Anzahl ist also gleich $|Z^A|$. Entsprechend ist die Anzahlt der an einer B-Spalte beteiligten IN-Relationen $|S_B|$. Im Minimalfall kommen alle an einer A-Zeile beteiligten IN-Relationen in jeder anderen A'-Zeile je genau 1-mal vor / oder: alle an einer B-Spalte beteiligten IN-Relationen kommen in jeder anderen B'-Spalte je genau 1-mal vor. Im Maximalfall sind für je zwei verschiedene F-Begriffe (A,B), (A',B')$\in$C$\times$D mit (A,B)$\in$B(r), (A',B')$\in$B(s) beiden IN-Relationen verschieden, r$\neq$s. Damit ergibt sich die Abschätzung max{|C|, |D|} ≤ |R(C,D)| ≤ |C|·|D|.

Anmerkung: Die Aussagen (vi) enthüllen Folgendes: Im C-Compound-Kontext K_C ist die Beziehung zu den IN-Relationen r$\in$REL – und damit auch zu den C-Relationen $\underline{R\bullet} \in \underline{REL}$, bzw. zu den Verbandsdurchschnitten $\underline{D}$(R) (R$\subseteq$REL) – ***„total verdeckt“***. Die C-Compounds liegen sozusagen alle ***„quer“*** zur Halbordnung von F(REL) und damit ***„quer***“ zu den Halbordnungen der F-Begriffsverbände $\underline{B}$(r) (r$\in$REL).

Das mag eventuell der Grund dafür sein, dass man in den konventionellen O-Definitionen der Informatiker die Beziehung zwischen „Begriffen“ (Menge C(REL)), der „Taxonomie“ (der Halbordnung auf C(REL)) und den „Relationen“ (Menge $\underline{REL}$) nicht erkannt hat und sich deshalb bisher mit „intuitivem Gewurstel“ bei der Erstellung der „Taxonomie“ und der „Relationen“ begnügen musste. (?)

3.3.6 „Begriffsstufen“ von IN-Begriffen

Wie beim F-Compound-Kontext erwähnen wir auch für den C-Compound-Kontext die „Begriffsstufen“ im Merkdiagramm der Tab.3.

Tab.3: Merkdiagramm für „Begriffsstufen“ zum C-Compound-Kontext K_C

and	Gegenstände / Umfänge	Inzidenzrelation / Begriffsverband	Merkmale / Inhalte	Kontext / Kommentar
Stufe 0	$\mathcal{U}$(REL) Menge der „Gegenstände“ von K_C – d.s. die Umfänge A von F-Begriffen. ($\mathcal{U}$(REL),$\leq_U$) ist **kein** vollst. Verband.	**j**$\subseteq \mathcal{U}$(REL)$\times\mathcal{J}$(REL). A **j** B ⇔ (A,B)∈F(REL), also **j** = F(REL)	$\mathcal{J}$(REL) Menge der „Merkmale“ von K_C – d.s. die Inhalte B von F-Begriffen. ($\mathcal{J}$(REL), $\leq_J$) ist **kein** vollst. Verband	**C-Compound-Kontext**: K_C = ($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), **j**)
	Pot$\mathcal{U}$(REL) .	$\xrightarrow{\uparrow j}$ $\xleftarrow[\downarrow j]{}$	. Pot$\mathcal{J}$(REL)	(↑j, ↓j) : Galoisverbindung zwischen $\mathcal{U}$(REL) und $\mathcal{J}$(REL)
	↑j↓j Hüllenoperator auf Pot$\mathcal{U}$(REL)	$\mathcal{B}$(**j**) ⊆PotF(REL)×PotREL (C,D)∈$\mathcal{B}$(j) :⇔ $C^{\uparrow j}$=D, $D^{\downarrow j}$=C. (C,D)$\leq_j$(C',C') :⇔ C⊆C', D'⊆D	↓j↑j Hüllenoperator auf Pot$\mathcal{J}$(REL)	($\mathcal{B}$(**j**),$\leq_j$): der C-Compoundverband zu K_C. (C,D): ein C-Compound. $\leq_j$: die Halbordnung auf $\mathcal{B}$(**j**)
Stufe 1	$\mathcal{U}$(**j**) . **C-Comp.Umfangsverband** = Menge der „Gegenstände“ von $K_{j\bullet}$ - d .s. die C-Compound-Umfänge C	**j•** ⊆$\mathcal{U}$(**j**)×$\mathcal{J}$(**j**). C **j•** D :⇔ (C,D)∈$\mathcal{B}$(**j**), also **j•** = $\mathcal{B}$(**j**)	$\mathcal{J}$(**j**) **C-Comp.Inhaltsverband** = Menge der „Merkmale“ von $K_{j\bullet}$.- d.s. die C-Compound-Inhalte D	**„•-Kontext“** $K_{j\bullet}$ = ($\mathcal{U}$(j), $\mathcal{J}$(j), **j•**) (1. Stufe)
	Pot$\mathcal{U}$(j) .	$\xrightarrow{\uparrow j\bullet}$ $\xleftarrow[\downarrow j\bullet]{}$	. Pot$\mathcal{J}$(j)	(↑**j•** , ↓**j•**) : Galoisverbindung zwischen $\mathcal{U}$(j) und $\mathcal{J}$(j)
	↑**j•**↓**j•** Hüllenoperator auf Pot$\mathcal{U}$(j)	$\mathcal{B}$(**j•**) ⊆ Pot$\mathcal{U}$(i)×Pot$\mathcal{J}$(i). (X,Y)∈$\mathcal{B}$(**j•**) :⇔ $X^{\uparrow j\bullet}$=Y, $Y^{\downarrow j\bullet}$=X. (X,Y) $\leq_{j\bullet}$ (X',Y') :⇔ X⊆X', Y'⊆Y	↓**j•**↑**j•** Hüllenoperator auf Pot$\mathcal{J}$(j)	($\mathcal{B}$(**j•**),$\leq_{j\bullet}$): Begriffsverband“ zu $K_{j\bullet}$.$\mathcal{B}$(**j•**) ist „primitiv“. (X,Y): ein $\mathcal{B}$(**j•**)-Begriff $\leq_{j\bullet}$: Halbordnung auf $\mathcal{B}$(**j•**).
Stufe 2	$\mathcal{U}$(**j•**) = $\mathcal{U}$(j),∅}∪{{C}|C∈$\mathcal{U}$(j)}: = **•-Umfangsverband** = Menge d. „Gegenstände“ von $K_{j\bullet\bullet}$.	**j••** ⊆ $\mathcal{U}$(**j•**)×$\mathcal{J}$(**j•**). X **j••** Y :⇔(X,Y)∈$\mathcal{B}$(**j•**), also **j••** = $\mathcal{B}$(**j•**)	$\mathcal{J}$(**j•**) = {$\mathcal{J}$(j),∅}∪{{D}|D∈$\mathcal{J}$(j)} = **•-Inhaltsverband** = Menge d.„Merkmale“ von $K_{j\bullet\bullet}$.	**„••-Kontext“** $K_{j\bullet\bullet}$= ($\mathcal{U}$(**j•**), $\mathcal{J}$(**j•**), **j••**) (2. Stufe)
usw.				

3.3.6.1 Alternativen zum C-Compound-Kontext

Statt des C-Compound-Kontextes K_C = ($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), **j**) kann man auch folgende andere Kontexte untersuchen, die ebenfalls *„Compound-Kontexte“* genannt werden dürfen:

$K^{\mathcal{U}}$:= ($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{U}$(REL), hU), genannt: der **„hU-Compound-Kontext“**,
$K^{\mathcal{J}}$:= ($\mathcal{J}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), hJ), genannt: der **„hJ-Compound-Kontext“**,
K^{C} := (C(REL), C(REL), hC), genannt: der **„hC-Compound-Kontext“**.

Darin sind die Inzidenzrelationen die **Halbordnungen**
$hU:= \leq_U$, $hJ := \leq_J$, $hC := \leq_C = hU \cup hJ$.

K^C ist – in der Sprechweise von [1]/S.196 – die „***Vereinigung***" der beiden Kontexte $K^{\mathcal{U}}$, $K^{\mathcal{J}}$:
$K^{\mathcal{U}} \cup K^{\mathcal{J}} :=(\mathcal{U}(REL) \cup \mathcal{J}(REL), \mathcal{U}(REL) \cup \mathcal{J}(REL), hU \cup hJ) =(C(REL), C(REL), \leq_C) =K^C$.

Zu diesen „Compound-Kontexten" gehören die Galoisverbindungen ($\uparrow hU$, $\downarrow hU$) auf $\mathcal{U}$(REL), ($\uparrow hJ$, $\downarrow hJ$) auf $\mathcal{J}$(REL) und ($\uparrow hC$, $\downarrow hC$) auf C(REL), die Compound-Typen

„hU-Compound": (C,D) mit $C, D \subseteq \mathcal{U}(REL)$, def. durch $C^{\uparrow hU} = D$, $D^{\downarrow hU}$ bzw.
„hJ-Compound": (C,D) mit $C, D \subseteq \mathcal{J}(REL)$, def. durch $C^{\uparrow hJ} = D$, $D^{\downarrow hJ}$ bzw.
„hC-Compound": (C,D) mit $C, D \subseteq C(REL)$, def. durch $C^{\uparrow hC} = D$, $D^{\downarrow hC}$

und schließlich die **vollständigen Begriffsverbände**

($\underline{\mathcal{B}}(hU), \leq_{hU}$) := **„hU-Compoundverband"** = Menge aller hU-Compounds;
($\underline{\mathcal{B}}(hJ), \leq_{hJ}$) := **„hJ-Compoundverband"** = Menge aller hJ-Compounds und
($\underline{\mathcal{B}}(hC), \leq_{hC}$) := **„hC-Compoundverband"** = Menge aller hC-Compounds.

Die Halbordnungen $\leq_{hU}$, $\leq_{hJ}$, $\leq_{hC}$ dieser Compoundverbände sind definiert durch

$(C,D) \leq_{hU} (C',D')$:$\Leftrightarrow$ $C \subseteq C'$, $D' \subseteq D$ für **hU-Compounds** aus ($\underline{\mathcal{B}}(hU), \leq_{hU}$) bzw.
$(C,D) \leq_{hJ} (C',D')$:$\Leftrightarrow$ $C \subseteq C'$, $D' \subseteq D$ für **hJ-Compounds** aus ($\underline{\mathcal{B}}(hJ), \leq_{hJ}$) bzw.
$(C,D) \leq_{hC} (C',D')$:$\Leftrightarrow$ $C \subseteq C'$, $D' \subseteq D$ für **hC-Compounds** aus ($\underline{\mathcal{B}}(hC) \leq_{hC}$)**.**

Nur am Beispiel des hU-Compound-Kontextes $K^{\mathcal{U}}$ erwähnen wir ein paar Einzelheiten; bei den anderen beiden Compound-Kontexten $K^{\mathcal{J}}$, K^C geht das analog. Sei $C,D \subseteq \mathcal{U}(REL)$ und (C,D) ein hU-Compound. Mit den Bezeichnungen aus Kap.2.2.3, angewandt auf die Halbordnung $hU = \leq_U$, gilt:

$D = C^{\uparrow hU} = \{B \in \mathcal{U}(REL) | \forall A \in C: A \leq_U B\} = OS(C)$ = Menge der oberen Schranken von C,
$C = D^{\downarrow hU} = \{A \in \mathcal{U}(REL) | \forall B \in D: A \leq_U B\} = US(D)$ = Menge der unteren Schranken von D.

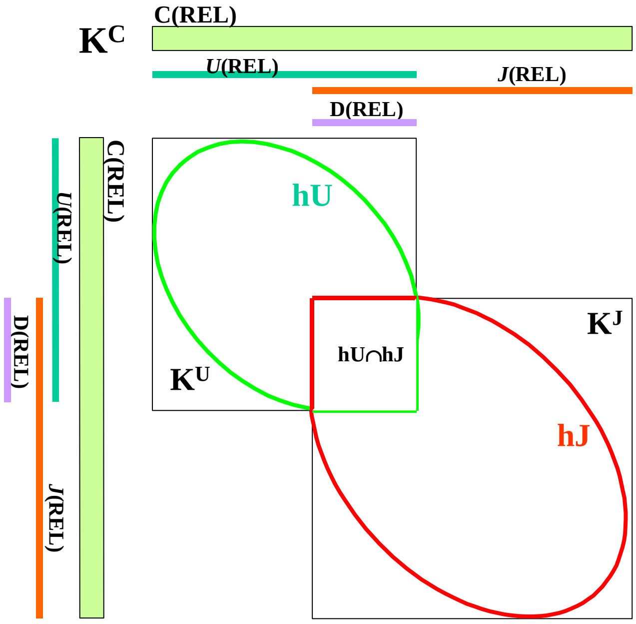
(C,D) ist also genau dann ein hU-Compound, wenn (in der Halbordnung $hU = \leq_U$) gilt:
US(OS(C))=C und OS(US(D))=D.

Die Menge $\mathcal{U}$(hU) der hU-Compound-Umfämge C bzw. die Menge $\mathcal{J}$(hU) der hU-Compound-Inhalte D ist je ein Hüllensystem und damit je ein **vollständiger Verband**; der Hüllenoperator für $\mathcal{U}$(hU) ist $...^{\uparrow hU \downarrow hU}$, der für $\mathcal{J}$(hU) ist $...^{\downarrow hU \uparrow hU}$.

Anmerkung – ein Spezialfall: Wenn der Durchschnitt $D(REL):= \mathcal{U}(REL) \cap \mathcal{J}(REL)$ der Menge der F-Begriffsumfänge mit der Menge der F-Begriffsinhalte aus nur ***einem*** Compound besteht, der sowohl Umfang als auch Inhalt eines hC-Compounds von K^C ist, handelt es sich bei der Vereinigung $K^C = K^{\mathcal{U}} \cup K^{\mathcal{J}} = (C(REL), C(REL), \leq_C)$ um eine sog. „**Verklebung**" der beiden Kontexte $K^{\mathcal{U}}$, $K^{\mathcal{J}}$ [vgl. [1]/Def.74, S. 196]. In diesem Fall hat der hC-Compoundverband ($\underline{\mathcal{B}}(hC), \leq_{hC}$) eine besondere Struktur: Er ist eine sog. **„Ideal-Filter-Verklebung"** [vgl. [1]/Def.73, S.194] des hU-Compoundverbands ($\underline{\mathcal{B}}(hU), \leq_{hU}$) mit dem hJ-Compoundverband ($\underline{\mathcal{B}}(hJ), \leq_{hJ}$). Das besagt: (1) $\underline{\mathcal{B}}(hC) = \underline{\mathcal{B}}(hU) \cup \underline{\mathcal{B}}(hJ)$, (2) zwei hC-Compounds mit $(C,D) \leq_{hC} (C',D')$ können beide nur entweder in $\underline{\mathcal{B}}$(hU) oder in $\underline{\mathcal{B}}$(hJ) liegen, (3) der Durchschnitt $\underline{\mathcal{B}}(hU) \cap \underline{\mathcal{B}}(hJ)$ ist die Vereinigung eines Hauptideals und eines Hauptfilters von $\underline{\mathcal{B}}$(hC): $\underline{\mathcal{B}}(hU) \cap \underline{\mathcal{B}}(hJ) = \mathbf{(}(C_1,D_1)\mathbf{]} \cup \mathbf{[}(C_2,D_2)\mathbf{)}$ [19] für geeignete hC-Compounds (C_1,D_1), $(C_2,D_2) \in \underline{\mathcal{B}}(hC)$. Das geht aus [1]/Satz 35, S.196 hervor.

Abb.20 zeigt die Vereinigung und gegebenenfalls die „Verklebung" im hC-Compound-Kontext K^C.

[19] In unserer Schreibweise ist ein „Hauptideal" $\mathbf{(}(C_1,D_1)\mathbf{]}$ die Menge $US((C_1,D_1))$ der unteren Schranken eines Compounds (C_1,D_1) und ein „Hauptfilter" $\mathbf{[}(C_2,D_2)\mathbf{)}$ die Menge $OS((C_2,D_2))$ der oberen Schranken eines Compounds (C_2,D_2) (in der gegebenen Ordnung $\leq_j$).



„**Vereinigung**":
$K^U \cup K^J = K^C =$
(C(REL), CREL, hC),
mit
C(REL)=$\mathcal{U}$(REL)∪$\mathcal{J}$(REL),
D(REL):=$\mathcal{U}$(REL)∩$\mathcal{J}$(REL)
,
hC = hU∪hJ.
Die Vereinigung heißt eine „**Verklebung**", wenn hU∩hJ = D(REL)xD(REL) ist und D(REL) sowohl ein Compoundumfang als auch ein Compoundinhalt von K^C ist.

Abb.20: Vereinigung und ggf. Verklebung im hC-Compound-Kontext

3.3.6.2 Zusammenfassung

Die ***Relationen*** auf der „***Begriffsmenge***" einer Ontologie, die die Informatiker meinen, sind die **C-Relationen** auf der Menge C(REL) der IN-Begriffe. Jede C-Relation <u>R•</u> (R⊆REL) hat die Struktur eines Verbandsdurchschnittes <u>D</u>(R), ist also ein F-Compoundumfang F. Die Menge <u>REL</u> aller C-Relationen ist ein vollständiger Verband, nämlich der F-Compond-Umfangsverband $\mathcal{U}$(i), und hat daher eine natürliche Halbordnung (man könnte sie die „R-Taxonomie" nennen). Die „***Taxonomie***" auf der Begriffsmenge (man nenne sie die „C-Taxonomie") entspricht der Halbordnung hC = $\leq_C$ auf C(REL). hC ist Vereinigung der Halbordnungen hU = $\leq_U$ (auf der Umfangsmenge $\mathcal{U}$(REL) und hJ = $\leq_J$ (auf der Inhaltsmenge $\mathcal{J}$(REL)), und ist in natürlicher Weise aus der Halbordnung $\leq_F$ auf der F-Begriffsmenge F(REL) abgeleitet, welche die Vereinigung aller F-Begriffsverbände <u>B</u>(r) (r∈REL) ist.

Die Menge C(REL) der IN-Begriffe einer Ontologie hat nicht nur eine natürliche Halbordnung hC = $\leq_C$ (*„Taxonomie" / „C-Taxonomie"*), sondern sie ist darüber hinaus strukturiert in drei „Begriffsstufen":

- ***„Begriffe":*** Die IN-Begriffe, also die Elemente von C(REL), interpretierbar als Umfänge oder als Inhalte von F-Begriffen.
- ***„Super-Begriffe"*** (mehrere Arten)**:** Die Umfänge / Inhalte der C-Compounds (jeweils zusammengefasst im Verband $\mathcal{U}$(**j**) / $\mathcal{J}$(**j**)), sowie die Umfänge / Inhalte der hU-Compounds bzw. hJ-Compounds bzw. hC-Compounds (jeweils zusammengefasst in den Verbänden $\mathcal{U}$(hU) / $\mathcal{J}$(hU) bzw. $\mathcal{U}$(hJ) / $\mathcal{J}$(hJ) bzw. $\mathcal{U}$(hC) / $\mathcal{J}$(hC)).
- ***„Super-Super-Begriffe"*** (mehrere Arten)**:** Die „verpackten" Umfänge {C} / Inhalte {D} des •-Umfangs- / •-Inhaltsverbandes $\mathcal{U}$(<u>**j•**</u>) / $\mathcal{J}$(<u>**j•**</u>), sowie die entspre-

chenden „Verpackungen“ in den •-Umfangs- und –Inhaltsverbänden der in Kap.3.3.6.1 angegebenen Alternativen (d.s. die Verbände $\mathcal{U}$(<u>hU•</u>) / $\mathcal{J}$(hU•) bzw. $\mathcal{U}$(<u>hJ•</u>) / $\mathcal{J}$(<u>hJ•</u>) bzw. $\mathcal{U}$(<u>hC•</u>) / $\mathcal{J}$(<u>hC•</u>)).

Dabei tritt als strukturbildende Eigenschaft in jeder Stufe die des **vollständigen Verbandes** auf.

Die „Compound-Idee“ ist in konventionellen O-Definitionen der Informatiker noch nicht ausgenutzt worden. Statt dessen werden (ohne irgendein mathematisches Grundkonzept) „übergeordnete Allgemeinbegriffe“ (z.T. auch „*Categories*“ genannt) rein „intuitiv“ bzw. gemäß überalterten (philosophisch-ontologischen) Traditionen gebildet; sie sind daher ***nicht prozessierbar***, und das macht m.E. die Schwierigkeiten bei der programmtechnischen Realisierung konventioneller O-Definitionen aus.

3.3.7 Zur Erweiterbarkeit einer Ontologie auf FBA-Basis

Eine Ontologie sollte jederzeit ***erweiterbar*** sein, ohne dass ihre bisherige Grundstruktur allzu sehr revidiert werden muss. Eine Ontologieerweiterung lässt sich mit unserem FBA-Konzept leicht darstellen. Die Systeminterna der Ontologie auf FBA-Basis sind *allein* durch die Auswahl der Menge $\mathbf{REL_0}$ der binären „*praktisch relevanten*“ IN-Relationen (auf der offenen Menge **IN** der Instanzen) und der formalen F-Kontexte K_r = (IN, IN, r) ($r \in$ REL) bestimmt. Wir betrachten den Fall, dass man – unter Berücksichtigung der Def.7 aus Kap.3.1 und der *Kontexte-Vereinbarung (i)* aus Kap.3.2.1.2 – nur ***<u>einen</u>*** **F-Kontext $\mathbf{K_u}$ = (IN, IN, u) hinzunimmt** mit einer neuen IN-Relation **u**, die im bisherigen IN-Relationen-Halbverband REL nicht vorkommt, $u \notin$ REL. Die Änderungen der Ontologie (die „Deltas“ der Komponenten) stellen sich dann so dar:

Alt	**➔**	**Neu**	**Kommentar und Def. des „Delta“**
REL_0	➔ REL_0^+	$= REL_0 \cup \{u\}$	neue Menge der praktisch relevanten IN-Relationen,
REL	➔ REL^+	$= REL \cup \Delta REL$	neuer Inf-Halbverband der mathematisch relevanten IN-Relationen, mit $\mathbf{\Delta REL := \{u\} \cup \{u \cap r \mid r \in REL\}}$,
F(REL)	➔ $F(REL^+)$	$= F(REL) \cup \Delta F(REL)$	neue F-Begriffsmenge, mit $\mathbf{\Delta F(REL) := \bigcup_{s \in \Delta REL} \underline{B}(s)}$,
i	➔ **i**+	$= \mathbf{i} \cup \Delta\mathbf{i}$	neue Inzidenzrelation des F-Compound-Kontextes, mit $\mathbf{\Delta i := \{((A,B),u) \mid (A,B) \in F(REL^+)\}}$,
K_F	➔ K_F^+	$= (F(REL^+), REL^+, \mathbf{i}^+)$	neuer F-Compound-Kontext mit $\mathbf{F(REL) \subseteq F(REL^+), REL \subseteq REL^+}$, $\mathbf{i = i^+ \cap (F(REL) \times REL) \subseteq i^+}$
$\mathcal{U}$(REL)	➔ $\mathcal{U}(REL^+)$	$= \mathcal{U}(REL) \cup \Delta\mathcal{U}(REL)$	neue F-Begriffs-Umfangsmenge, mit $\mathbf{\Delta\mathcal{U}(REL) := \mathcal{U}(\Delta REL)}$,
$\mathcal{J}$(REL)	➔ $\mathcal{J}(REL^+)$	$= \mathcal{J}(REL) \cup \Delta\mathcal{J}(REL)$	neue F-Begriffs-Inhaltsmenge, mit $\mathbf{\Delta\mathcal{J}(REL) := \mathcal{J}(\Delta REL)}$,
$\mathcal{U}(\mathbf{i})$	➔ $\mathcal{U}(\mathbf{i}^+)$	$= \mathcal{U}(\mathbf{i}) \cup \Delta\mathcal{U}(\mathbf{i})$	neuer F-Comp.Umfangsverband, mit $\mathbf{\Delta\mathcal{U}(i) := \bigcup\{F^{\uparrow i+ \downarrow i+} \mid F \subseteq \Delta F(REL)\}}$,

$\mathcal{J}(\mathbf{i})$	➔ $\mathcal{J}(\mathbf{i}^{+})$	$= \mathcal{J}(\mathbf{i}) \cup \Delta\mathcal{J}(\mathbf{i})$	neuer F-Comp.Inhaltsverband, mit $\boldsymbol{\Delta\mathcal{J}(i) := \cup\{R^{\downarrow i+\uparrow i+} \mid R \subseteq \Delta REL\}}$,
C(REL)	➔ $C(REL^{+})$	$= C(REL) \cup \Delta C(REL)$	neue IN-Begriffsmenge, mit **ΔC(REL) := C(ΔREL),**
$\underline{REL}$	➔ $\underline{REL}^{+}$	$= \underline{REL} \cup \Delta\underline{REL}$	neuer C-Relationen-Verband, mit $\boldsymbol{\Delta\underline{REL} := \Delta\mathcal{U}(i)}$,
j	➔ **j**+	$= \mathbf{j} \cup \Delta\mathbf{j}$	neue Inzidenzrelation des C-Compound-Kontextes K_C, mit **Δj := ΔF(REL),**
$\mathcal{U}(\mathbf{j})$	➔ $\mathcal{U}(\mathbf{j}^{+})$	$= \mathcal{U}(\mathbf{j}) \cup \Delta\mathcal{U}(\mathbf{j})$	neuer C-Comp.Umfangsverband, mit $\boldsymbol{\Delta\mathcal{U}(j) := \cup\{C^{\uparrow j+\downarrow j+} \mid C \subseteq \Delta C(REL)\}}$,
$\mathcal{J}(\mathbf{j})$	➔ $\mathcal{J}(\mathbf{j}^{+})$	$= \mathcal{J}(\mathbf{i}) \cup \Delta\mathcal{J}(\mathbf{i})$	neuer C-Comp.Inhaltsverband, mit $\boldsymbol{\Delta\mathcal{J}(j) := \cup\{D^{\downarrow j+\uparrow j+} \mid D \subseteq \Delta C(REL\}}$,
LR	➔ LR^{+}	$= LR \cup \Delta LR$	neuer Lexikonteil der Relationensymbole, mit $\boldsymbol{\Delta LR := \{\underline{u\bullet}\} \cup \{\underline{u\bullet}\}^{\downarrow \underline{bez}_{LR}}}$,
LC	➔ LC^{+}	$= LC \cup \Delta LC$	neuer Lexikonteil der Begriffssymbole, mit $\boldsymbol{\Delta LC := C(\Delta REL) \cup C(\Delta REL)^{\downarrow \underline{bez}_{LC}}}$.

Die „Deltas“ der Komponenten – und damit die Erweiterung der Ontologie – sind, wie man sieht, übersichtlich und einfach zu handhaben und (mit *geeigneten(!)* Entwurfs-konzepten und Programmiersprachen) daher auch programmtechnisch leicht umsetzbar.[20]

Anmerkung zur „Verträglichkeit“ bei Ontologieerweiterung: Durch Hinzunahme einer neuen IN-Relation $u \notin REL$ entsteht aus dem alten F-Compound-Kontext K_F=(F(REL), REL, **i**) der erweiterte Kontext K_F^{+}:=($F(REL^{+})$, REL^{+}, $\mathbf{i}^{+}$). Der alte Kontext K_F ist ein „**Teilkontext**“ des neuen K_F^{+} im Sinne der Definition 44 in [1]/Kap.3.1, S.97f. Es wäre zu prüfen, wann K_F sogar „**verträglich**“ zu K_F^{+} ist im Sinne der Definition 45 in [1]/Kap.3.1, S.100, nämlich wann für jeden F-Compound (F^{+},R^{+}) von K_F^{+} gilt, dass ($F^{+} \cap F(REL)$, $R^{+} \cap REL$) ein F-Compound von K_F ist. Vermutlich wird K_F i.allg. zu K_F^{+} nicht „verträglich“ sein. Man wird aber die Ontologieerweiterung wohl „verträglich machen“ können, indem man einige (für das Erweiterungsziel „nicht schädliche“) Hilfsinstanzen als Hilfsgegenstände bzw. als Hilfsmerkmale hinzunimmt. Ob bzw. wie das zu machen ist, bleibt einer weiteren Note überlassen.

Anmerkung zur „Abgeschlossenheit“ bei Ontologieerweiterung: Nach Definition 50 in [1]/§3.3, S.112 heißt eine Relation $j \subseteq i$ „**abgeschlossen**“ im Kontext (G, M, i), wenn jeder f-Begriff von (G, M, j) auch f-Begriff von (G, M, i) ist. Die Ontologieerweiterung K_F =(F(REL), REL, **i**) ➔ K_F^{+} ($F(REL^{+})$, REL^{+}, $\mathbf{i}^{+}$) sei wie oben. Man sieht leicht ein, dass die alte Inzidenzrelation **i** im neuen C-Compound-Kontext K_F^{+} stets *abgeschlossen* ist. Dies ist ein nützlicher Hinweis für Ontologieerweiterungen; und es führt zu weiteren Vereinfachungen, wenn die alte mit der erweiterten Ontologie sogar *verträglich* ist. (Die entsprechenden Untersuchungen mögen einer weiteren Note überlassen bleiben.)

[20] Ich habe den Verdacht, dass die derzeit für die Umsetzung einer O-Definition benutzten Entwurfskonzepte und Programmiersprachen ***eben noch nicht*** voll dazu geeignet sind; denn ihnen liegt kein mathematisches Konzept zu Grunde. Es ist vermutlich sogar umgekehrt: konventionelle O-Definitionen (auch wenn sie ein „mathematisches Aussehen“ haben) orientieren sich nicht an konsistenten mathematischen Grundstrukturen, sondern an den ***vorhandenen*** (mangelhaften) Programmiersprachen. Und ein solcher Zustand ist natürlich höchst unbefriedigend: Er ***erzwingt*** quasi für seinen Überbau die Anlehnung an überalterte „ontologische“ Traditionen.

3.3.8 Anmerkung zur sogenannten „Instanziierung“

Den Übergang von einer C-Relation **R•**=D(R) zu einer ihrer IN-Relationen, r∈R, nennen wir eine „*Instanziierung*“. Entsprechend nennen wir den Übergang von einer O-Schema-Aussage A **R•** B (A,B∈C(REL), **R•**∈REL) zu einer ihrer Aussagen xry auf Instanzenebene (x,y∈IN, x∈A, y∈B, r∈R⊆REL) eine *„Instanziierung“*.

Beispiel für Instanziierung: Eine der C-Relationen sei D(R)= **R•**:= „...*liegt in*...“; bei Instanziierung heiße eine entsprechende IN-Relation r:= „...*liegt_in*...“. Der Umfangs-IN-Begriff `GroßSTADT` := {Darmstadt, Frankfurt, Nürnberg, Stuttgart, Köln, Berlin, Dresden,...} umfasse alle Großstädte Deutschlands mit mehr als 100.000 Ew., der Inhalts-IN-Begriff `LAND` := {Hessen, Baden-Württemberg, Bayern, Rheinland-Pfalz, Sachsen,...} umfasse alle Bundesländer Deutschlands. Eine mögliche Instanziierung der O-Schema-Aussage „`GroßSTADT` *liegt in* `LAND`“ ist dann die Aussage „Darmstadt *liegt_in* Hessen“.

3.3.9 Anmerkung zu „mehrwertigen“ Kontexten

Hier übertragen wir auf die Ontologie, was im FBA-Standardwerk [1]/§1.3, S.36ff zu sogenannten „mehrwertigen Kontexten“ gesagt wird, weil wir darauf in der Analyse des Artikels [12] zurückgreifen werden.

Bislang haben wir nur „einfache“ Kontexte betrachtet. Gegeben sei der „einfache“ C-Compound-Kontext
K_C= ($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), **j**) – mit der Inzidenzrelation **j** = F(REL)⊆$\mathcal{U}$(REL)×$\mathcal{J}$(REL).
Manchmal ist es angebracht, jedem Inhalt B∈$\mathcal{J}$(REL) noch eine ganze „Werteskala“ aus einem gewissen „**Wertebereich**“ W beizuordnen, d.h. man hat zu *jedem* IN-Begriff B∈$\mathcal{J}$(REL) eine Abbildung

f_B : $\mathcal{U}$(REL) →W – „**Werteskala**“ oder „Attribut“ zu B∈$\mathcal{J}$(REL).

(Sollte aus irgendeinem Grund für gewisse X∈$\mathcal{U}$(REL), B∈$\mathcal{J}$(REL) eine Wertzuweisung unnötig oder gar unsinnig erscheinen, so führe man einfach in W einen ***Dummywert*** „*no_attribute*“ ein und setze f_B(X):= *no_attribute*.)

Aus dem „einfachen“ Kontext K_C macht man damit einen sogenannten „mehrwertigen“ Kontext
K_W:=($\mathcal{U}$(REL), $\mathcal{J}$(REL), W, **t**),

die neue 3-stellige Inzidenzrelation **t** ⊆ $\mathcal{U}$(REL)×$\mathcal{J}$(REL)×W kann mit Hilfe der alten, **j**= F(REL)⊆$\mathcal{U}$(REL)×$\mathcal{J}$(REL), und den Abbildungen f_B (B∈$\mathcal{J}$(REL)) so definiert werden:

(A,B,w) ∈ **t** :⇔ [(A,B)∈**j** und f_B(A) =w] für A∈$\mathcal{U}$(REL), B∈$\mathcal{J}$(REL), w∈W,

wobei wir uns an die Äquivalenzen A**j**B ⇔ (A,B)∈F(REL) ⇔ ∃R⊆REL:(A,B)∈D(R) ⇔∃**R•**∈REL:A**R•**B für A,B∈ C(REL) zu erinnern haben. Im Standardwerk [1]/S.36 ist das alles zwar ein bisschen anders formuliert, aber meine Formulierung ist äquivalent dazu.

Den mehrwertigen Kontext K_W kann man wieder in einer Tabelle darstellen, bei der sowohl die linke Randspalte („Gegenstände“) als auch die Kopfzeile („Merkmale“) aus den Namen A, B, C, ...für die IN-Begriffe bestehen. Im Kreuzpunkt einer Zeile und Spalte, wo (A,B)∈**j** zutrifft, trägt man statt des ☒ den Wert f_B(A) ein; wo (A,B)∉**j** ausfällt, trägt man *nichts* ein (auch wenn dort f_B(A) definiert ist!).

K_W kann man nun wieder auf einen „**einfachen**“, aber im Merkmalkopf **erweiterten** Kontext K_e folgendermaßen zurückführen: Die „Gegenstände“ A∈$\mathcal{U}$(REL) der linken Gegenstandsspalte bleiben dieselben. In der Merkmalkopfzeile ersetzt man jedoch ***jedes*** „Merkmal“ B∈$\mathcal{J}$(REL) **durch die ganze Werteskala**
W_B := {f_B(X) | X∈C(REL)} = {w_1, w_2, ...}.
Die Reihenfolge der w_k in der Tabellen-Kopfzeile ist dabei in der Regel unwichtig. Die Kontexttabelle von K_e bekommt zu einem (X,B) dort ein Kreuz ☒, wo (X,B)∈B(r) für ein r∈REL *und* zugleich f_B(X) einen Wert aus der Werteskala W_B annimmt.

K_e ist nun wieder ein „einfacher“ Kontext. Zum Kontext K_e kann man dann wieder **C-Compounds** bilden, und zu K_e gehört wieder ein vollständiger C-Compond-Verband $\mathcal{B}$(**t**).

Der Übergang von K_W nach K_e bedeutet in unserer Terminologie, dass die neben den „IN-Begriffen“ eingeführten **„Attribute“** als eigenständige Ontologie-Objekte eigentlich ***„überflüssig“ sind: Man kann die „Attribute“ einfach ebenso als IN-Begriffe auffassen.*** Die Relationen, welche „Begriffe“ mit „Attributen“ verknüpfen, sind dann eben einfach wieder Elemente des neuen **REL**.

Auch diese Struktur-Sicht wird in den mir bekannten herkömmlichen Ontologiedefinitionen nicht ausgenutzt: „Attribute“ von Begriffen werden anders behandelt als die „Begriffe“ selbst, und das kompliziert die Struktur unnötig! In [12] beispielsweise zeigen sich bei entsprechender Interpretation nur „schüchterne Ansätze“ zur FBA-Sichtweise.

3.3.10 Ein Bezug zur „Vererbung“ in der objektorientierten Programmierung

Die Halbordnung ($\mathcal{U}$(REL), $\leq_U$) spiegelt sich programmtechnisch in der **OOP** (Objektorientierten Programmierung) bei der sog. ***„Vererbung“*** von „Attributen und Methoden“ wider **[** vgl. etwa die objektorientierte „*Unified Modeling Language*“ **UML**; zur Kurzeinführung siehe zum Beispiel [9]: http://de.wikipedia.org/wiki/Vererbung_%28Programmierung%29 **].**

Was wir hier „IN-Begriff“ / „Unter-IN-Begriff“ (bzw. „Umfang“ / „Unterumfang“) nennen, heißt in der OOP *class / subclass.* Im Vordergrund stehen in den Anwendungen meist Klassen (Mengen) von Instanzen, die als „**Gegenstände**“ (im intuitiven Sinn als „Dinge“) aufgefasst werden. Als „Begriffe“ nimmt man – gemäß FBA-Interpretation – also meist nur die **Umfänge** / Unter-Umfänge der Halbordnung ($\mathcal{U}$(REL), $\leq_U$): Ein Ober-IN-Begriff A∈$\mathcal{U}$(REL) „***vererbt***“ die Merkmale seines Inhalts B∈$\mathcal{J}$(REL) ((A,B) ein F-Begriff) auf all seine Unter-IN-Begriffe A’; und bei jedem (echten) Unter-IN-Begriff A’ (A’$<_U$A) können zusätzlich neue Merkmale („Attribute“ & „Methoden“) hinzukommen, die A nicht hat, so dass für die Merkmale des Unter-IN-Begriffs A’ gilt: B$<_J$B’. (A’,B’) ist nach FBA-Sprechweise dann ein Unter-F-Begriff von (A,B).

Das „Vererbungs-Schema“ könnte man aber auch ***dualisieren***, derart dass man von den „Attributen & Methoden“, d.h. von den Inhalten – also von der Halbordnung ($\mathcal{J}$(REL),$\leq_J$) – ausgeht und nach unten die Gegenstände des Umfangs A’ eines Ober-Inhalts B’ an alle seine Unter-Inhalte B (B$<_J$B’) „***vererbt***“. Bei jedem Unter-Inhalt B können neue Gegenstände hinzukommen, die B’ nicht hat, so dass A’$<_U$A gilt.

Diese Dualität im Sachverhalt wird aber in der objektorientierten Programmierung – und dementsprechend auch in einer konventionellen Ontologie-Definition – nie ausgenutzt. Der Grund für diese *Unsymmetrie* im Gebrauch ist, meine ich, kein technischer, sondern ein ***sprachlicher*** (und damit ein „philosophischer“)**:** Die einfachsten Sprachsätze bestehen aus „Subjekt“ und „Prädikat“. Das „Subjekt“ erscheint darin als das „wichtigere“ Element und bedeutet einen (konkreten oder abstrakten) „Gegenstand(sbegriff)“/ „Umfang“. Im Prädikat steckt ein „Merkmal(sbegriff)“ / „Inhalt“. Außerdem benennt man in der objektorientierten Programmierung nicht explizit, in welchem ***Kontext*** der Umfang zum Inhalt steht. In Konzepten der OOP wird meist nur ganz unspezifisch von einem verbalen Ausdruck der Form „A *is_a* B“ oder „A *has_a* B“ gesprochen, wobei „...*is_a*...“ und „...*has_a*...“ offensichtlich so etwas wie „Relationen“ sind. Das erscheint mir konzeptmäßig ***völlig unzureichend***, wenn *mehr als nur zwei* Relationen benötigt werden.

Klar, dass man bei dieser *Unsymmetrie* und *Nichtberücksichtigung* der Vielfalt von Relationen in Kontexten programmtechnisch eventuell in Schwierigkeiten kommt, wenn auf einmal dasselbe Objekt bzgl. der einen Relation als „Gegenstandsbegriff“, bzgl. einer anderen Relation aber als „Merkmalsbegriff“ gilt. Unsere Definition, **Def.11** für die IN-Begriffsmenge **C(REL)** vermeidet – wenigstens formal – dieses sprachhistorisch (bzw. philosophisch) bedingte Dilemma, indem ein X∈**C(REL)** sowohl als „Gegenstandsmenge“ (Umfang) als auch als „Merkmalsmenge“ (Inhalt) zu einem F-Begriff verwendet werden darf.

In meiner 19-jährigen industriellen Programmierpraxis (1984-2002) haben unsere Teams mit dem äußert starren OOP-Konzept nicht ohne Grund erhebliche Schwierigkeiten bei gewissen etwas anspruchsvolleren Entwicklungsprojekten gehabt (OOP führte meist zu einer übermäßig großen Anzahl von *classes* und zu einer miserablen „*performance*“), wenngleich den Kollegen der Grund dafür damals nicht recht bewusst war: In dieser meiner Note tritt er m.E. offen zu Tage.

3.4 Die Userschnittstelle der Ontologie

In einer Ontologie muss buchgeführt werden über die **umgangs- oder fachsprachlichen Ausdrücke**, die in der **Praxis** an Stelle der systeminternen, „normierten“ Namen von IN-Begriffen oder C-Relationen gebraucht werden. Wenn das nicht geschieht, ist die „Userschnittstelle“ des O-Systems unzureichend bedient.

Für die „Userschnittstelle“ (LEX, BEZ) **|** (IN, REL) sind das **Lexikon LEX**=LC∪LR **der sog. „Symbole“** (Bezeichner), sowie die **Bezeichnungsrelationen** $\underline{bez}_{LC}\subseteq$LC×C(REL), $\underline{bez}_{LR}\subseteq$LR×$\underline{\text{REL}}$ da. Die Userschnittstelle besteht also aus zwei **formalen Kontexten**

(LC, C(REL), $\underline{\text{bez}}_{LC}$) für den Zusammenhang zwischen den Begriffssymbolen aus LC und den normierten Namen der IN-Begriffe aus C(REL)
und

(LR, REL, bez_{LR}) für den Zusammenhang zwischen den Relationensymbolen aus LR und den normierten Namen der C-Relationen aus REL.

3.4.1 Die Userschnittstelle für die Begriffsnamen

Wir bringen das FBA-Konzept am Beispiel der User-Teilschnittstelle (LC, C(REL), bez_{LC}) nahe. Analoges gilt dann auch für (LR, REL, bez_{LR}).

Schreibweise: Sowohl die Symbole aus der Menge LC als auch die Elemente aus der Menge **C(REL)** notieren wir hier mit Kleinbuchstaben. Statt „C(REL)" schreiben wir einfach **C**. Beide Mengen, LC und **C**, fassen wir hier als **„Wortmengen"** auf, d.h. es ist hier formal unerheblich, dass ein $c \in$ **C** selbst eine Menge von Instanzen sei. Die Bezeichnungsrelation bez_{LC} notieren wir einfach als „bez".

Hinweis: Die normierten Termini für die IN-Begriffe sollten – wie schon ganz oben betont – auch in die Symbolmenge LC aufgenommen werden:

C⊆LC;

denn der mit den Systeminterna der Ontologie unvertraute User weiß (zunächst) nichts von der Term-normierung in **C**; und **LEX** wäre mit **C** $\not\subseteq$ LC unvollständig!

Wenn ein umgangs- oder fachsprachliches Symbol $x \in$ LC einen IN-Begriff $c \in$ **C** bezeichnet, schreiben wir „x *bez* c". Wir haben es hier zu tun mit dem **formalen Kontext** K_{bez} := (LC, **C**, bez).

Ein LC-Symbol kann mehrere IN-Begriffe bezeichnen, und ein IN-Begriff kann durch mehrere LC-Symbole bezeichnet werden. Wir nehmen daher die **Galoisverbindung** (↑, ↓) zwischen LC und **C,** die durch die Bezeichnungsrelation *bez* induziert wird:

$\uparrow$: Pot(LC) → Pot(**C**), def. durch: $A^{\uparrow} := \{c \in \mathbf{C} \mid \forall x \in A: x \ \mathit{bez} \ c\}$ für A⊆LC
$\downarrow$: Pot (**C**) → Pot(LC), def. durch: $B^{\downarrow} := \{x \in LC \mid \forall c \in B: x \ \mathit{bez} \ c\}$ für B⊆**C**

Für ein Symbol $x \in$ LC ist $\{x\}^{\uparrow}$ die Menge der Begriffe, die durch das Wort x bezeichnet werden. $\{x\}^{\uparrow}$ ist die Menge der **Homonyme** zum Symbol x.

Beispiel: x = „Bank"**. Homonyme**: $\{x\}^{\uparrow}$={Sitzbank, Geldbank, Genbank, Schlachtbank, ...}.

Für einen Begriff $c \in$ **C** ist $\{c\}^{\downarrow}$ die Menge der Symbole, die den Begriff c bezeichnen. $\{c\}^{\downarrow}$ ist die Menge der **Synonyme** von c.

Beispiel: c = „schwanger_sein"**. Synonyme**:
$\{c\}^{\downarrow}$ = {„schwanger sein", „ein Kind erwarten", „guter Hoffnung sein", „in den Wochen sein",..}

Ein „formaler Begriff" im Kontext (LC, **C**, *bez.*) ist hier ein Mengenpaar (A,B)∈ Pot(LC)×Pot(**C**), das die Bedingungen $\mathbf{A^{\uparrow}=B}$ **und** $\mathbf{B^{\downarrow}=A}$ erfüllt. Das Wort „f-Begriff" ist schon zu sehr überlastet. Wir nehmen einen anderen Namen dafür:

Def.12.LC-Abschnitt / LC-Kontext: Wir nennen ein Paar (A,B) (A⊆LC, B⊆**C**), das der Bedingung $\mathbf{A^{\uparrow}=B}$ **und** $\mathbf{B^{\downarrow}=A}$ genügt, einen **LC-Abschnitt**; der Kontext (LC, **C**, *bez*) heiße der **LC-Kontext**. Die Menge **B(*bez*)** aller LC-Abschnitte ist nach dem Hauptsatz der FBA ein **vollständiger Verband** (B(*bez*), $\leq_{LC}$)**,** wenn man die Halbordnung $\leq_{LC}$ durch (A,B) $\leq_{LC}$ (A',B') :⇔ A⊆A' , B'⊆B definiert für (A,B), (A',B')∈ B(*bez*). (**B**(*bez*), $\leq_{LC}$) heiße der **LC-Verband.** Gilt (A,B)$\leq_{LC}$(A',B'), so ist (A,B) ein **„Unter-LC-Abschnitt"** von (A',B').

Statt nur alphabetisch, könnte man das Lexikon in diesem Sinne ordnen; das würde die Suche nach Synonymen und Homonymen eventuell schneller machen.

Anmerkung: In [2] *(G. Pickert)* sind die Userschnittstellen zwar angesprochen aber nur unvollständig charakterisiert: Die dort erwähnten Funktionen **F** bzw. **G** beschreiben nur den „*Input*" aus dem Lexikon in die Systeminterna der Ontologie und sind jeweils mit der Abbildung ↑ zu identifizieren. Man hat in [2] den „*Output*", also die Abbildung ↓, vergessen zu erwähnen. In [12] *(Maedche / Zacharias)* werden die „Userschnittstellen" und damit die Galoisverbindung (↑,↓) gar nicht erwähnt.

3.4.2 Die „pädagogische Aufgabe“ des O-Systems an den Userschnittstellen

Die Userschnittstellen werden in der Praxis ***weit mehr zu leisten haben,*** als in [2], [12] angedeutet ist! Das wollen wir am Beispiel der User-Teilschnittstelle (LC, **C**, <u>bez</u>) kurz erläutern.

Das Problem ist ein **Namensproblem**. Wenn ein User mit Eingabe nur ***eines*** Schlagwortes a Auskunft über a verlangt, so sollte das O-System (in user-verständlicher Weise) mit Angabe des **LC-Abschnitts** ($\{a\}^{\uparrow\downarrow}$, $\{a\}^{\uparrow}$) im Fall $a \in LC$ bzw. mit ($\{a\}^{\downarrow}$, $\{a\}^{\downarrow\uparrow}$) im Fall nur $a \in \mathbf{C}$ antworten. Dadurch werden dem User alle Synonyme und Homonyme mitgeteilt, die mit dem Schlagwort a in der angefragten Ontologie zusammenhängen.

Man kann aber vom noch nicht trainierten User nicht von Anfang an verlangen, dass er stets bei seinen Anfragen an das O-System das bisher angerissene „FBA-Konzept“ im Kopf haben müsste. Er wird nämlich z.B. nicht im Kopf haben, was im Lexikon **LEX** alles verzeichnet steht, geschweige denn, was als ***normierte Namen*** für die Elemente von **C** und von <u>**REL**</u> in den Systeminterna der Ontologie benutzt wird.

Statt einer „Begriffs“-Bezeichung ($a \in LC$) könnte der User z.B. nur einen **Instanzennamen** x eingeben, und Auskunft über ihn verlangen, wobei ihm evtll. gar nicht klar ist, ob der Name x im Lexikonteil LC vorgesehen ist oder nicht. Dann sollte das O-System in der Lage sein, herauszufinden, zu welchen Schlagworten (Symbolen) $a \in LC$ dieser Name x gehört. Als Antwort müsste dann das O-System (in user-verständlicher Weise) einen ganzen **LC-Abschnitt** (A,B) angeben, wo x entweder mit einem der Symbole des „Umfangs“ A oder mit einem der Begriffe des „Inhalts“ B etwas zu tun hat.

Bei so einer „Anfangsauskunft“ sollte das O-System darauf hinweisen, welche in der Auskunft vorkommenden Namen als ***normierten Namen*** ($a \in \mathbf{C}$) der Ontologie gelten, so dass der User sich mit der Zeit an die *normierten Namen* gewöhnt und bei den nächsten Anfragen an das System möglichst nur noch diese benutzt.

Dann würden die o.a. erwähnten Anfangsauskünfte mit der Zeit mehr und mehr unnötig, und der User könnte gleich gezielter eine Instanziierungs-Auskunft mit einer relationalen Frage (*query*), z.B. der Form „?x: x **r b**“ oder „?y: **a r** y“, einholen.

Die *Namensnormierung* in den Systeminterna einer Ontologie kann – bei entsprechend intelligent implementierter Befähigung des O-Systems an den ***User-Teilschnittstellen*** (LC, **C**(REL), $\underline{bez}_{LC}$), (LR, <u>REL</u>, $\underline{bez}_{LR}$) – *langfristig* dazu beitragen, dass die User sich an die Namensnormierungen gewöhnen, und mit der Zeit in der Tat einheitlichere Begriffsnamen in einem Fach- oder Wissensgebiet benutzen. Das ist ja eines der Ziele einer Ontologie.

Das ist m.E. die **„pädagogische“ Bedeutung** der Userschnittstelle einer Ontologie.[21]

4 Zurückführung der O-Definitionen in [2] und [12] auf FBA

Wir zitieren im Folgenden die O-Definitionen aus [2] und [12] und vergleichen sie mit den auf FBA basierenden Definitionen in Kap.3 dieser Note. Wir zeigen, dass die O-Definitionen aus [2] und [12] ***voll auf die O-Definition nach FBA zurückführbar sind***.

Beim Vergleich versehen wir Terme aus den Zitaten, falls notwendig, mit den Indizes $..._{[2]}$ bzw. $..._{[12]}$; zum Beispiel referieren wir auf die in [2] angeführte Begriffsmenge **C** mit „$\mathbf{C}_{[2]}$“, um sie von der Bezeichnung „C(REL)“ für die in Kap.3.3 definierte IN-Begriffsmenge zunächst zu unterscheiden.

[21] In der Ontologie „Wikipedia“ wird das ja schon z.T. in einfacher Form vorgemacht.

4.1 Zurückführung der O-Definition in [2] auf FBA

4.1.1 Das Zitat aus [2]

In [2] (*G. Pickert*) wird folgende Ontologie-Definition vorgestellt (und anschließend von praktischer Seite her untersucht).

Zitat aus [2]/Kap.3.**:**

(Das Zitat ist wörtlich wiedergegeben – **Ungereimtheiten oder Tippfehler** des Originals sind hier **rot** gekennzeichnet.)

„**3. Abstraktes Modell einer Ontologie**. Definition: Eine Ontologie ist ein Tupel **O:=(L, C, R, F, G, H, A)**, dessen Komponenten wie folgt definiert sind:

***Lexikon L*:** Das Lexikon enthält eine Menge von Symbolen (lexical entries) für Begriffe, LC, und eine Menge von Symbolen für Relationen, LR. Ihre Vereinigung ist das Lexikon L :=LC ∪ LR.

***Menge C von Begriffen*:** Über jedes c∈C existiert wenigstens eine Aussage in der Ontologie, durch die es in die Ontologie eingebettet wird.

***Menge R zweistelliger Relationen*:** R bezeichnet eine Menge zweistelliger Relationen, wobei jeweils Definitionsbereich (*domain*) und Wertebereich (*range*) (CD, CR) spezifiziert wird mit CD, CR ∈ C. Zusätzlich werden die Funktionen d und r eingeführt. Diese liefern, angewandt auf eine Relation r∈R, die entsprechenden Definitions- und Wertebereichsbegriffe CD und CR. Hierbei steht d für *domain* und r für *range*, d.h. die Funktionen beschreiben entsprechend Definitions- und Wertebereich.

Zwei ***Abbildungsfunktionen F, G*** mit F: $2^{LC} \to 2^{C}$ und G: $2^{Lt} \to 2^{R}$. F und G verknüpfen Symbole $\{l_1, l_2,...,l_n\} \subset \boldsymbol{L}$ mit den zugehörigen Begriffen und Relationen in der gegebenen Ontologie. Ein Symbol kann auf mehrere Begriffe oder Relationen verweisen; umgekehrt kann auf einen Begriff oder Relation von mehreren Symbolen verwiesen werden. Bemerkung: Da es eine $n \to m$ Abbildung zwischen Lexikon und Begriffen / Relationen gibt, sind ***F*** und ***G*** auf Mengen definiert.

Menge A von Ontologie-Axiomen, sowie die

Taxonomie H: Begriffe sind durch eine irrreflexive, azyklische und transitive Relation H, $H \subset C \times C$, taxonomisch miteinander verbunden. H(C_i,C_j) bedeutet, dass C_i ein Suchbegriff von C_j ist.**“**

4.1.2 Zusammenfassendes vorab

Offensichtlich ist in [2] ***keine vollständige*** O-Definition vorgestellt, sondern nur das, was hier ein **„O-Schema“** genannt wurde, und was – etwa in graphischer Konzeptdarstellung – üblicherweise als der *„obere Teil“* einer Ontologiestruktur erscheint. Die **O-Instanziierung** (*„unterer Teil“*) wird dagegen in [2] nicht erwähnt. Vielleicht will sie der Autor in der O-Komponente $\mathbf{A_{[2]}}$ der sog. „Axiome“ versteckt wissen?

4.1.3 Zur Menge $A_{[2]}$ der sog. „Axiome“

Vielleicht handelt es sich bei den Elementen von $\mathbf{A_{[2]}}$ um die Aussagen (Beschreibungen) zu jedem Begriff, die im Zitatteil „***Menge C von Begriffen***“ erwähnt sind? Darüber wird in [2] nichts weiter aussagt. Informatiker sagten mir, die sog. „Axiome“ seien „*Integritätsbedingungen*“. Solche „Integritätsbedingungen“ werden etwa in der Form angegeben, wie sie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel für eine sog. „Integritätsbedingung”:

„**IF** Person *works_in* Project **THEN** Person *is_member_of* Company“.

Mathematische Interpretation: `Person`, `Project`, `Company` seien Instanzen-Teilmengen; `<Person>`, `<Project>`, `<Company>` seien „sprechende Namen“ für Instanzenvariablen (und von den Mengen zu unterscheiden!), und

r := „... *works_in* ...“, **s** := „... *is_member_of* ...“:

seien Namen für binäre Relationen mit dom(**r**)=dom(**s**)=`Person`, range(**r**)=`Project`, range(**s**)=`Company`, so dass die o.a. „Integritätsbedingung“ etwas genauer lautet:

„**FOR ALL** `<Person>`∈`Person`, `<Project>`∈`Project`, `<Company>`∈`Company`**:**

IF r(`<Person>`,`<Project>`) **THEN s**(`<Person>`,`<Company>`)

Die o.a. „Integritätsbedingung“ definiert dann lediglich eine weitere Relation **t** aus **r** und **s** durch

t(`<Project>`, `<Company>`) **:**⇔ ∀x∈`Person`: **r**(x, `<Project>`) ⇒ **s**(x, `<Company>`),
mit dom(**t**):=`Project`, range(**t**):=`Company`. – Welches strukturierende Gesamtkonzept hinter den sog. „Integritätsbedingungen" steckt, und ob diese Aussagen programmtechnisch prozessierbar sein sollen, geht aus [2] nicht hervor. – Möglicherweise steckt *gar kein* Konzept dahinter, und die Angaben sind gar nicht prozessierbar (??). --- In unserem FBA-Konzept entsprächen die „Axiome" $\mathbf{A}_{[2]}$ einfach einer Menge von ***Definitionen***, mit denen aus einer Relationen-Anfangsmenge „$\mathbf{REL}_{00}$" (hier z.B.: den **r**, **s, ...**) die Menge $\mathbf{REL}_0$ der **praktisch relevaten IN-Relationen** (hier z.B. die **r, s, t, ...**) aufgebaut werden. Ist $\mathbf{REL}_0$ fertig, so müsste dann daraus die Menge **REL** der **mathematisch relevanten IN-Relationen** und schließlich die IN-Begriffsmenge **C(REL)**, sowie die Menge $\underline{\mathbf{REL}}$ der **C-Relationen** auf C(REL) (hier z.B. die: $\underline{R}$•, $\underline{S}$•, $\underline{T}$•, ...) *algorithmisch erzeugt* werden.

– Nun zu den weiteren O-Komponenten in [2].

4.1.4 Zu $\mathbf{L}_{[2]}$, $\mathbf{LC}_{[2]}$ und $\mathbf{LR}_{[2]}$, sowie $\mathbf{F}_{[2]}$ und $\mathbf{G}_{[2]}$

$\mathbf{L}_{[2]}$ ist die bei uns mit LEX bezeichnete Namensmenge, das „Lexikon". $LC_{[2]}$ und $LR_{[2]}$ sind deren Teilmengen, die auch wir mit LC und LR bezeichnen: $LC_{[2]}$ bzw. $LR_{[2]}$ bestehen aus den (umgangs- oder fachsprachlichen) Symbolen, die für „Begriffe" bzw. für „Relationen" stehen. Die Normierungsfunktionen $\mathbf{F}_{[2]}$: $Pot(LC_{[2]}) \rightarrow Pot(\mathbf{C}_{[2]})$ bzw. $\mathbf{G}_{[2]}$: $Pot(LR_{[2]}) \rightarrow Pot(\mathbf{R}_{[2]})$ besorgen den Übergang von den LC-Symbolen zu den normierten Begriffsnamen (Menge $\mathbf{C}_{[2]}$) bzw. von den LR-Symbolen zu den normierten Relationennamen (Menge $\mathbf{R}_{[2]}$). $\mathbf{F}_{[2]}$, $\mathbf{G}_{[2]}$ regeln sozusagen den ***Input***, der von außen in die Systeminterna ($\mathbf{C}_{[2]}$, $\mathbf{R}_{[2]}$) der Ontologie kommt. Hier zeigt sich bereits eine ***Unsymmetrie*** (Unvollständigkeit) des O-Schemas von [2]: *Man hat den **Output** vergessen:* Eine Useranfrage sollte „mit denselben Worten" beantwortet werden, wie sie der User bei seinem *Input* gebraucht hat, und nicht mit systeminternen Termini, die der User eventuell nicht versteht (– uraltes Sprachproblem seit Bestehen der Informatik! – Und das Problem selbst ist natürlich noch viel älter als die Informatik: „Fragt man Fachidioten, so antworten sie fachidiotisch").

Dual zur Abbildung **F** bzw. **G** müsste im O-Schema noch eine Abbildung **F***: $Pot(\mathbf{C}_{[2]}) \rightarrow Pot(LC_{[2]})$ bzw. **G***: $Pot(R_{[2]}) \rightarrow Pot(LR_{[2]})$ für den *Output* hinzukommen.[22] Selbstverständlich entspricht dann dem Paar (**F,F***) die *Galoisverbindung* ($\uparrow_{\underline{bez}_{LC}}$, $\downarrow_{\underline{bez}_{LC}}$) für die Userschnittstelle (LC, C(REL), $\underline{bez}_{LC}$) [vgl. Kap.3.4.1] und dem Paar (**G,G***) die Galoisverbindung ($\uparrow_{\underline{bez}_{LR}}$, $\downarrow_{\underline{bez}_{LR}}$) für die Userschnittstelle (LR, $\underline{REL}$, $\underline{bez}_{LR}$).

Damit ist das Stück ($\mathbf{L}_{[2]} = LC_{[2]} \cup LR_{[2]}$, $\mathbf{F}_{[2]}$, $\mathbf{G}_{[2]}$) der O-Definition [2] auf die „Userschnittstellen" des Kap.3.4 zurückgeführt.

4.1.5 Zu $\mathbf{C}_{[2]}$

Zur Menge $\mathbf{C}_{[2]}$ der „Begriffe" wird in [2] lediglich angemerkt:

> (α) **„***Über jedes c∈**C** existiert wenigstens eine Aussage in der Ontologie, durch die es in die Ontologie eingebettet wird."*

Das deutet darauf hin, dass jeder Begriff einerseits extensiv als Zusammenfassung von „Dingen" aufgefasst wird, andererseits aber „beschrieben" werden soll. – Ja, durch was denn? – Doch wohl durch „Prädikate" oder „Attribute", die man ja auch „Merkmale" nennen kann. Jedem Ding-Begriff soll durch eine solche „Beschreibung" offenbar so etwas wie ein „Inhalt" zugerechnet werden. Dieser „Inhalt" scheint jedoch

---

[22] Die Normierungsabbildung **F**: $Pot(LC) \rightarrow Pot(\mathbf{C})$ kann man (für $X \subseteq LC$) definieren durch $\mathbf{F}(X) := \{y \in \mathbf{C} \mid \forall x \in X: x\ \underline{bez}\ y\}$ und bezieht sie dadurch klar auf die Bezeichnungsrelation *bez*. (*bez* ⊆ LC×**C**). Definiert man nun daraus die Abbildung **F***: $Pot(\mathbf{C}) \rightarrow Pot(LC)$ durch $\mathbf{F^*}(Y) := \bigcup \mathbf{F}^{-1}(Y)$ (für $Y \subseteq \mathbf{C}$), so ist **F*** ebenfalls klar auf dieselbe Bezeichnungsrelation *bez* bezogen, und das Paar (**F,F***) stellt die durch *bez* induzierte *Galoisverbindung* (↑*bez*, ↓*bez*) zwischen LC und **C** dar. Entsprechendes gilt für die Normierungsabbildung **G**: $Pot(LR) \rightarrow Pot(\mathbf{R})$. All das wird aber in [2] nicht erwähnt.

in der „Ontologie" von [2] nicht weiter formalisiert zu sein, kann also programmtechnisch ***gar nicht prozessierbar*** sein! Die beschreibenden Prädikate / Attribute bleiben sozusagen programmtechnisch ***„in der Luft hängen".*** Es ist in [2] kein Zusammenhang ersichtlich zwischen der „Beschreibung" eines $c \in \mathbf{C}_{[2]}$ und einer Relation $r \in \mathbf{R}_{[2]}$, die c mit einem anderen c' verbinden mag.

Da bietet es sich wie von selbst an, die Begriffsmenge $\mathbf{C}_{[2]}$ mit unserer IN-Begriffsmenge C(REL) zu identifizieren, zumal in [2] neben „Begriffen" $c \in \mathbf{C}_{[2]}$ eben ***keine*** „Attribute" (von Begriffen) erwähnt werden.

4.1.6 Zu $\mathbf{R}_{[2]}$

Mit $\mathbf{R}_{[2]}$ ist eine Menge *2-stelliger* Relationen auf der *Begriffsmenge* $\mathbf{C}_{[2]}$ gemeint (auch wenn das aus dem Text [2] nur ungenau hervorgeht; für ein $r \in \mathbf{R}_{[2]}$ sollen CD:=dom(r) und CR:=range(r) zu $\mathbf{C}_{[2]}$ gehören, wobei in [2] fälschlicherweise „CD, CR $\in$ C" statt richtig „CD, CR $\subseteq$ C" geschrieben ist).

$\mathbf{R}_{[2]}$ ist zunächst nicht zu verwechseln mit der in dieser Note definierten IN-Relationenmenge REL. Die Relationen von $\mathbf{R}_{[2]}$ sollen vielmehr Relationen auf der *Begriffsmenge* $\mathbf{C}_{[2]}$ sein (und nicht auf einer Instanzenmenge). Setzen wir $\mathbf{C}_{[2]}$:= C(REL) (wozu aus [2] kein Hinderungsgrund zu ersehen ist), so ist klar, dass $\mathbf{R}_{[2]}$ nur unser Verband **REL** der C-Relationen (Kap.3.3.4/Def.13) sein kann, wenn man vom FBA-Konzept ausgeht. Eine Relation **r** $\in \mathbf{R}_{[2]}$ verbindet dann ein $c_1 \in \mathbf{C}_{[2]}$ („Umfang") mit *einem* $c_2 \in \mathbf{C}_{[2]}$ („Inhalt") eines f-Begriffs zu einem Paar $(c_1,c_2) \in$ **r**. („F-Begriff"). Der Hinweis (α) in [2] (siehe oben) würde damit ***überflüssig***, bzw. er wäre zu einer ***prozessierbaren*** Komponente der Ontologie zu machen dadurch, dass die „Beschreibung" eines C-Begriffs c_1 nichts anderes ist als der C-Begriff c_2 und eine Relation **r** , durch welche das zu beschreibende c_1 mit dem „beschreibenden" c_2 verbunden ist.

4.1.7 Zur „Taxonomie" $\mathbf{H}_{[2]}$

Mit der „Taxonomie" **H** ist in [2] eine *strikte Halbordnung* auf der Begriffsmenge $\mathbf{C}_{[2]}$ gemeint. Für $c_i,c_j \in \mathbf{C}_{[2]}$ soll „$\mathbf{H}(c_i,c_j)$" bedeuten, dass c_i Subbegriff (Unterbegriff) von c_j sei, wobei in [2] witzigerweise „Suchbegriff" statt „Subbegriff" geschrieben ist. Ob der Autor sich was dabei gedacht hat, oder ob das nur ein Tippfehler ist, weiß ich nicht. [23]

Da in [2] nicht weiter erläutert ist, wie die „Taxonomie" **H** mit den anderen O-Komponenten zusammenhängt, kann man ohne weiteres ihre nicht-strikte Form „x**H**y *oder* x=y" mit der natürlichen Halbordnung $\leq_C$ auf der IN-Begriffsmenge C(REL) identifizieren.

Damit ist die O-Definition in [2] auf das „O-Schema" [Kap.3.3] und auf die „Userschnittstelle" [Kap.3.4] zurückgeführt. Zugleich ist offengelegt, dass das Konzept der „Systeminterna" ($\mathbf{C}_{[2]}$, $\mathbf{R}_{[2]}$) mathematisch gesehen in [2] noch ziemlich konfus dargestellt ist, und damit den desolaten Zustand wiedergibt, in dem sich das Konzept befindet, das Informatiker eine „Ontologie" nennen.

[23] Die Bezeichnung „*Suchbegriff*" könnte dann Sinn machen, wenn man ***zwei Arten*** von „Suchen" unterscheidet:
σ_u := „Suchen nach unten" – man gibt einen „allgemeineren" Begriff c_j ein und will als Suchergebnis alle „spezielleren" Unterbegriffe c'_i, c''_i, ..., welche im Sinne der Halbordnung **H** ***direkte untere Nachbarn*** von c_j sind.
σ^o := „Suchen nach oben" – man gibt einen „spezielleren" Begriff c_i ein und will als Suchergebnis alle „allgemeineren" Oberbegriffe c'_j, c''_j, ..., welche im Sinne der Halbordnung **H** ***direkte obere Nachbarn*** von c_i sind.

4.2 Zurückführung der O-Definitionen in [12] auf FBA

Das eigentliche Anliegen der Arbeit – *„Clustering Ontology-based Metadata in the Semantic Web"* – , steht hier nicht zur Debatte; ich skizziere es in der Fußnote. [24]

4.2.1 Die Zitate aus [12]

In [12] (*A. Maedche & V. Zacharias*) wird folgende Ontologie-Definition vorgestellt.

(Die Zitate sind wörtlich wiedergegeben – **Ungereimtheiten bzw. Tippfehler** des Originals sind hier **rot** gekennzeichnet):

Zitat-1:

"Definition 1 (Ontology Structure). *An ontology structure is a 6-tuple* $\mathbf{O := \{ C, P, A, H^C, prop, att \}}$, *consisting of two disjoint sets* **C** *and* **P** *whose elements are called* ***concepts*** *and* ***relation identifiers****, respectively, a* ***concept hierarchy*** $\mathbf{H^C}$. $\mathbf{H^C}$ *is a directed, transitive relation,* $\mathbf{H^C \subseteq C \times C}$, *which is also called* ***concept taxonomy****.* $H(c_1, c_2)$ *means that* c_1 *is a* ***sub-concept*** *of* c_2. *A function* ***prop:*** $\mathbf{P \to C \times C}$ *that relates concepts non-taxonomically. The function dom:* $\mathbf{P \to C}$ *with dom(p):=* $\Pi_1(rel(p))$ *gives the domain of p, and range:* $\mathbf{P \to C}$ *with range(p):=* $\Pi_2(rel(p))$ *give its range. For prop(p)=*(c_1, c_2)*one may also write p*(c_1, c_2)*. A specific kind of* ***relations*** *are attributes* ***A****. The function* ***att:*** $\mathbf{A \to C}$ *relates concepts with literal values (this means* ***range(a)****:= STRING)*"

Zitat-2:

"Definition 2 (Metadata Structure). *A metadata structure is a 6-tupel* $\mathbf{MD:=\{ O, I, L, inst, instr, instl \}}$ *that consists of an ontology* **O***, a set* **I** *whose elements are called* ***instance identifiers*** *(correspondingly* **C, P** *and* **I** *are disjoint), a set* **L** *of* ***literal values****, a function* ***inst:*** $\mathbf{C} \longrightarrow 2^{\mathbf{I}}$ *called* ***concept instantiation*** *(For* ***inst(c)= i****, one may also write c(i)) , and a function* ***instr:*** $\mathbf{P} \longrightarrow 2^{\mathbf{I \times I}}$ *called* ***relation instantiation*** *(For* ***inst****(p)=*$\mathbf{\{i_1, i_2\}}$ *one may also write* $\mathbf{p(i_1, i_2)}$*). The* ***attribute instantiation*** *is described via the function* ***instl****:* $\mathbf{P} \longrightarrow 2^{\mathbf{I \times L}}$ *relates instances with literal values.*"

4.2.2 Zusammenfassendes vorab

Offensichtlich ist in [12] eine etwas *vollständigere* O-Definition vorgestellt als in [2]: Das, was in unserer Note ein **„O-Schema"** genannt worden ist, und was – etwa in graphischer Darstellung – üblicherweise als der *„obere Teil"* einer O-Definition erscheint, ist in **Zitat-1** definiert und heißt in [12] ***Ontology Structure***. Die **O-Instanzi-ierung** (*„unterer Teil"* einer O-Definition) ist in **Zitat-2** definiert und wird in [12] ***Metadata Structure*** genannt. (In anderen O-Entwürfen, die ich gelesen habe, wird gerade der *obere* Teil einer O-Definition als „*Meta*..." bezeichnet. Bezüglich dieses Terminus scheint wohl noch keine einheitliche Gebrauchsweise bei Informatikern üblich zu sein).

---

[24] Dieses „*Clustering* " kann übrigens ohne weiteres auf das Konzept der *„oberen (oder unteren) Schranken"* in einer endlichen Halbordnung (oder „Taxonomie") zurückgeführt werden, indem man z.B. zu zwei Elementen a, b der Halbordnung die Mengen OS(a), OS(b) der oberen Schranken auszählt und $|OS(a) \cap OS(b)| \;/\; |OS(a) \cup OS(b)|$ zu einem „Ähnlichkeitsmaß" erklärt. (Man hätte auch die unteren Schranken dazu nehmen können.) Damit ist in kurzen Worten der Inhalt der Abhandlung [12] im Wesentlichen skizziert. Die Abhandlung fällt nur deshalb länger aus, weil man „Begriffe" und „Attribute" ganz unterschiedlich behandelt. Hätte man eine O-Definition nach FBA zugrundegelegt, hätte das „*Clustering*" wohl auf nur *einer* Textseite Platz gehabt.
Statt dieses „Ähnlichkeitsmaßes" würde ich besser den „*Verwandtschaftsgrad*" („*Distanz*") nehmen, der darin besteht, dass man im Graphen der Halbordnung für zwei Elemente a, b einfach die **minimale Anzahl** $\boldsymbol{\gamma(a,b)}$ **der Pfadschritte** zwischen a und b zusammenzählt (egal ob man dabei „nach oben" oder „nach unten" gehen muss). Es gibt i.allg. einen oder mehrere Pfade zwischen a und b oder gar keinen. Im Fall eines endlichen Verbandes wäre der „Verwandtschaftsgrad" unabhängig davon, wo die EINS bzw. die NULL des Verbandes liegt, was beim o.a. „Ähnlichkeitsmaß" nicht der Fall ist. Ist a=b, so $\gamma(a,b)=0$; ist a oberer oder unterer Nachbar von b, so $\gamma(a,b)=1$; sind z.B. a, b unvergleichbar, so muss man einen Pfad über deren Supremum oder Infimum nehmen (falls existent), und $\gamma(a,b)$ wird >1; gibt es keinen Pfad zwischen a und b (das ist bei einer Halbordnung möglich, die kein Verband ist), so würde ich $\gamma(a,b)$:= u („unendlich") setzen. Also: je kleiner $\gamma(a,b)$, desto verwandter sind a, b.

Zusätzlich kommt in [12] („oben“) neben der ***Begriffsmenge*** noch eine Menge von ***Attribut****namen* und („unten“) neben der Menge der ***Instanzen****namen* noch eine Menge von ***Attribut****werten* ins Spiel.

Was in den Definitionen von [12] fehlt, oder höchstens nur rudimentär (ähnlich wie in [2]) angedacht zu sein scheint, ist das, was ich in Kap.3.4 die „*Userschnittstelle*“, (LEX, BEZ) | (IN, REL), genannt habe. Die Autoren beschäftigen sich in [12] eben nur mit gewissen Messmethoden der „Ähnlichkeit“ in den *Systeminterna* einer Ontologie.

Anmerkung: Folgendes benutzen wir bei der Analyse von [12]: Ist f: X→Y eine – nicht notwendig bijektive, nicht notwendig surjektive – Abbildung der Menge X in eine Menge Y, so ist es üblich, für die Menge aller *Urbilder* $x \in X$ die auf ein bestimmtes $b \in Y$ abgebildet werden, zu schreiben: $f^{-1}(b) := \{x \in X \mid f(x)=y\}$. „$f^{-1}(b)$“ bezeichnet also eine *Teilmenge* von *X*. Hat insbesondere $b \in Y$ kein Urbild, so ist $f^{-1}(b) = \emptyset$.

4.2.3 Zum Zitat-1

Im Zitat-1 wird das **O-Schema** definiert als das 6-Tupel **O := (C, P, A, H^C^, *prop*, *att*).** [Tupel schreibt man in der Mathematik nicht in {...} sondern in (...), weil „{...}“ für die Mengennotation reserviert ist; – das nur nebenbei].

$\mathbf{C}_{[12]}$ ist in [2] die Menge der „Begriffe“. $\mathbf{P}_{[12]}$ ist eine Menge von Relationen***namen****.* Die Abbildung *prop:* $\mathbf{P} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ bildet jeden Relationennamen auf ein Begriffspaar (c_1,c_2) ab. Für ein $p \in \mathbf{P}$ besagt die Gleichung $prop(p) = (c_1,c_2)$, dass das Paar (c_1,c_2) „in der Relation p steht“; für diese Aussage schreiben die Autoren auch „$p(c_1,c_2)$“. Da über *prop* nichts weiter ausgesagt ist (d.h. ob *prop* injektiv oder surketiv sei oder nicht), schließe ich, dass für gegebenes Paar $(c_1,c_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ die Menge $prop^{-1}(c_1,c_2) := \{p \in \mathbf{P} \mid prop(p) = (c_1,c_2)\}$ alle Bezeichner für eine Relation umfasst, in der das Begriffspaar steht; diese Menge kann leer oder 1-elementig oder mehelementig sein, d.h., die gemeinte Relation hat eventuell keinen oder einen oder mehrere Bezeichner $p_1, p_2, \ldots \in \mathbf{P}$. Die zum Namen $p \in \mathbf{P}$ gehörige 2-stellige Relation auf **C** bezeichnen die Autoren mit *rel*(p), also: $rel(p) := \{(x,y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \mid (x,y) = prop(p)\}$ mit einem Vorbereich $dom(p) := \Pi_1(rel(p)) := \{x \in \mathbf{C} \mid \exists y \in \mathbf{C}: p(x,y)\}$ und einem Nachbereich $range(p) := \Pi_2(rel(p)) := \{y \in \mathbf{C} \mid \exists x \in \mathbf{C}: p(x,y)\}$.

Warum die Relationen mit Hilfe der Abbildung *prop* als Relationen***namen*** eingeführt werden, die Begriffe (Begriffsnamen) aber nicht in analoger Weise, bleibt ***schleierhaft*** in [12]. Das zeigt nur, dass man trotz der umständlichen Einführung der Relationen wohl *keineswegs* an die „Userschnittstelle“ [vgl. Kap.3.4] der O-Systeminterna (**C, P**) zu einem systemexternen „Lexikon“ gedacht zu haben scheint (wie das bei [2] wenigstens „zur Hälfte“ angedacht ist)**.**

Auf der Begriffsmenge $\mathbf{C}_{[12]}$ wird eine strikte Halbordnung $\mathbf{H}^C$ („*concept hierarchy*“ / „*concept taxonomy*“) angenommen, ohne dass ein struktureller Zusammenhang mit den anderen Komponenten der Ontologie hergestellt wird. $\mathbf{H}^C$ fällt sozusagen „vom Himmel“. Setze ich $x \le_H y :\Leftrightarrow$ „$\mathbf{H}^C(x,y)$ oder $x=y$“ für $x,y \in \mathbf{C}_{[12]}$, so bin ich daher frei, $\le_H$ mit der (nicht-strikten) Halbordnung $\le_C$ auf der IN-Begriffsmenge zu identifizieren, sofern ich $\mathbf{C}_{[12]}$ mit unserer IN-Begriffsmenge C(REL) identifiziere.

Merkwürdigerweise wollen die Autoren neben der Begriffsmenge $\mathbf{C}_{[12]}$ noch eine Menge $\mathbf{A}_{[12]}$ von „***Attributen***“ haben. Ein Attribut wird in [12] einem Begriff durch die Abbildung *att*: $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ zugeordnet, die Gleichung att(a) =c kann man lesen als „*Der Begriff c hat das Attribut a*“. Bei gegebenem $c \in \mathbf{C}$ umfasst die Menge $att^{-1}(c) := \{a \in A \mid att(a)=c\}$ dann alle Attribute, die dem Begriff c zugesprochen werden; eventuell kann *att* $^{-1}$(c) auch leer sein, das hieße, dem Begriff c würde dann kein Attribut zugesprochen.

Die Autoren nennen Attribute „besondere Relationen“ („*specific relations*“). Das ist *sprachlich* bedingt und kommt wohl daher, dass, wenn man die Gleichung *att*(a)=c als Aussage „a(c)“ schreibt, das a als Aussageform a: **C** $\rightarrow$\{true, false\} oder als „1-stellige Relation“ auf $\mathbf{C}_{[12]}$ aufgefasst werden kann. In diesem Sinne ist wohl auch die Bemerkung „*this means **range(a)**:= STRING*“ zu verstehen: Der Wertebereich der Aussageform a wäre dann range(a) := $\{x\in \mathbf{C} \mid a(x) = \text{true}\}$, und „***range(a)**:= STRING*“ würde nur heißen, dass die Begriffe $c\in\mathbf{C}$ mit a(c)=true vom Format `STRING`, also *Namen*, sind (für alle $a\in\mathbf{A}$ und für alle $c\in\mathbf{C}$). Warum eine solche Trivialität so umständlich und kryptisch ausgedrückt wird, bleibt schleierhaft. Es zeigt mir nur, dass die Autoren mit unseren seit langem standardisierten mathematischen Sprechwiesen offenbar nicht so ganz vertraut sind.

Ähnlich wie bei [2] ergibt sich aber die Frage, wie **C**, **A** und die Relationen(namen)-menge **P** miteinander zusammenhängen sollen. Drückt „c ***e*** a“ die Aussageform „*c hat das Attribut a*“ aus, so kann ich im O-Schema neben c auch a als „Begriff“ auffassen, und ***e*** := „...*hat das Attribut* ...“ ist dann einer der Relationennamen von **P; *e*** muss nur explizit auf ein $p\in\mathbf{P}$ bezogen werden! Das würde heißen: **C** umfasst sowohl „Dingbegriffe“ als auch „Attributbegriffe“. Die im Zitat-1 erwähnten 1-stelligen Relationen a, also die „Attribute“, würden damit als eigenständige Objekte der Ontologie ***überflüssig***, und man könnte **A** einfach als eine gewisse Teilmenge von **C** auffassen. – Schauen wir im nächsten Abschnitt, was das Zitat-2 dazu sagt.

4.2.4 Zum Zitat-2

Im Zitat-2 aus [12] wird die **O-Instanziierung** definiert als das 6-Tupel
MD := (O, I, L, *inst*, *instr*, *instl*) (**O** wie oben im Zitat-1).
Die Abbildung *inst* : **C**$\rightarrow$Pot(**I**) besorgt die Begriffsinstanziierung; sie ordnet jedem Begriff $c\in\mathbf{C}$ eine Teilmenge von Instanzen zu. Die Elemente der Instanzenmenge $\mathbf{I}_{[12]}$ nennen die Autoren Instanzen*namen* – „*instance identifiers*“. Zu gegebener Instanzenmenge $X\subseteq\mathbf{I}$ umfasst die Menge *inst* $^{-1}$(X) :=$\{c\in\mathbf{C} \mid \text{inst}(c)=X\}$ dann alle Begriffe, welche zur Instanzenmenge X instanziiert werden können; ggf. gibt es zu bestimmtem X auch gar keinen Begriff; darüber aber (ob *inst* surjektiv oder injektiv sein soll) ist in [12] nichts weiter ausgesagt. Für die Instanziierung eines Begriffs $c\in\mathbf{C}$ schreiben die Autoren *inst*(c)=i; darin müsste i aber eine ***Teilmenge*** und *kein* Element von $\mathbf{I}_{[12]}$ sein (missverständliche Schreibweise im Zitat-2!). Die Aussage „*inst*(c)=i“, ($i\subseteq\mathbf{I}_{[12]}$), bezeichnet dann den Umfang des Begriffs $c\in\mathbf{C}$, sie wird mit „c(i)“ notiert, man kann das lesen als „i ist der Umfang des Begriffs c“.
Die Abbildung *instr* : **P**$\rightarrow$Pot(**I**$\times$**I**) besorgt die Relationeninstanziierung; sie ordnet jedem Relationsnamen $p\in\mathbf{P}$ eine Teilmenge aus Instanzenpaaren zu. Die dafür verwendeten Schreibweisen „*inst*(p)=$\{i_1, i_2\}$“ und „p(i_1, i_2)“ sind jedoch ***völlig unsinnig und fehlerhaft***: Im ersten Ausdruck links des **=** muss es „*instr*(p)“ (und nicht „*inst*(p)“) heißen; das „$\{i_1,i_2\}$“ rechts des „**=**“ ist total daneben, weil man offenbar „Paarmenge“ mit „Mengenpaar“ verwechselt hat und außerdem wohl nicht weiß, wann Tupelklammern (...) und wann Mengenklammern \{...\} zu verwenden sind. Sollen mit i_1, i_2 *Teilmengen* von $\mathbf{I}_{[12]}$ gemeint sein, so muss es heißen: ***instr*(p) = $\mathbf{i_1}\times\mathbf{i_2}$** ; und diese Aus-

sage müsste mit $\mathbf{p(i_1{\times}i_2)}$ notiert werden; sie soll ja aussagen, dass der Relationenname p als die Relation $i_1{\times}i_2$ instanziiert wird, wobei $i_1{\times}i_2 \subseteq \mathbf{I}{\times}\mathbf{I}$ ist.[25]

Bei gegebener Relation $i_1{\times}i_2 \subseteq \mathbf{I}{\times}\mathbf{I}$ (bei uns „IN-Relation“ genannt) umfasst die Menge $instr^{-1}(i_1{\times}i_2) := \{p \in \mathbf{P} \mid instr(p) = i_1{\times}i_2\}$ alle Bezeichner $p \in \mathbf{P}$ welche zur IN-Relation $i_1{\times}i_2$ instanziiert werden, für gewisses $i_1{\times}i_2$ kann $instr^{-1}(i_1{\times}i_2)$ auch *leer* sein. Ist $instr^{-1}(i_1{\times}i_2)$ mehrelementig, so heißt das einfach, dass die IN-Relation $i_1{\times}i_2$ mehrere Bezeichner $p_1, p_2,... \in \mathbf{P}$ hat. Darüber ist aber in [12] nichts weiter ausgesagt.

Wären mit i_1, i_2 aber nicht Teilmengen, sondern Elemente von $\mathbf{I}_{[12]}$ gemeint – das ist aus den unsinnigen Notationen des Zitats-2 durchaus herauszulesen – , so wäre die Verwirrung in [12] vollständig!!

Schließlich wird im Zitat-2 neben der Instanzenmenge **I** noch eine Menge **L** von sog. „*literal values*“ erwähnt. **L** soll eine Menge von „Attributwerten“ sein, die mit den Attributen $a \in \mathbf{A}$ folgendermaßen zusammenhängen: Die Abbildung $instl : \mathbf{A} \rightarrow \mathrm{Pot}(\mathbf{I}{\times}\mathbf{L})$ (im Zitat-2 ist fälschlicherweise „$instl : \mathbf{P} \rightarrow \mathrm{Pot}(\mathbf{I}{\times}\mathbf{L})$“ statt „$instl : \mathbf{A} \rightarrow \mathrm{Pot}(\mathbf{I}{\times}\mathbf{L})$“ notiert!) besorgt die Instanziierung der „Attribute“: jedem Attribut $a \in \mathbf{A}$ wird durch *instl* eine Teilmenge von $\mathbf{I}{\times}\mathbf{L}$ zugeordnet. „Attribute“ a werden durch Paarmengen $i{\times}\lambda$ mit $i \subseteq \mathbf{I}$ und $\lambda \subseteq L$ instanziiert, d.h. es ist $instl(a) = i{\times}\lambda \subseteq \mathbf{I}{\times}\mathbf{L}$. Zu gegebenem $i{\times}\lambda$ kann die Urbildmenge $instl^{-1}(i{\times}\lambda) := \{a \in \mathbf{A} \mid instl(a) = i{\times}\lambda\}$ ggf. leer oder 1-elementig sein oder auch aus mehreren Bezeichnern $a_1, a_2, ... \in \mathbf{A}$ bestehen. Darüber ist in [12] nichts weiter ausgesagt. Die Instanziierung $i{\times}\lambda$ eines $a \in \mathbf{A}$ kann auch als eine *Relation* auf dem Mengenpaar (**I, L**) aufgefasst werden! Warum man eigentlich **L** neben **I** einführt und z.B. **L** nicht einfach als eine gewisse Teilmenge der Instanzenmenge **I** auffasst, auch darüber ist in [12] nichts weiter ausgesagt! Setzt man nämlich $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{I}$, so wären die Relationen $i{\times}\lambda$ nur gewisse „IN-Relationen“ unserer Menge REL.

Mit dem FBA-Konzept könnte sich aber möglicherweise eine vernünftige Interpretation für die Unterscheidung zwischen Instanzenmenge **I** und der Menge **L** der *„literal values“* folgendermaßen ergeben [vgl. dazu [1]/ S.36ff, sowie hier, Kap.3.3.9] :

Identifiziert man $\mathbf{C}_{[12]}$ mit C(REL), $\mathbf{P}_{[12]}$ mit <u>REL</u>, $\mathbf{L}_{[12]}$ mit W und fasst man $\mathbf{A}_{[12]}$ als Teilmenge von $\mathbf{C}_{[12]}$ auf, so stellt sich die gesamte in [12] definierte Ontologie dar als ein aus dem „einfachen“ C-Compound-Kontext $K_C = (\mathbf{C}_{[12]}, \mathbf{C}_{[12]}, \mathbf{j})$, $\mathbf{j} = F(REL)$ [vgl. Kap.3.3.9] entstehender „***mehrwertiger***“ C-Compound-Kontext

$$K_L = (\mathbf{C}_{[12]}, \mathbf{C}_{[12]}, \mathbf{L}_{[12]}, \mathbf{t}),$$

wobei die 3-stellige Relation **t** definiert ist durch

$$(g,m,w) \in \mathbf{t} \;:\Leftrightarrow\; [(g,m) \in \mathbf{j} \;\mathit{und}\; f_m(g)=w\,] \quad \text{für } g,m \in \mathbf{C}_{[12]}, \; w \in \mathbf{L}_{[12]}$$

Hat ein gewisser Gegenstands-IN-Begriff g_0 bei einem Merkmal-IN-Begriff m gar kein „Attribut“, so kann man ja dafür einen „Dummywert“ in **L**, etwa mit Namen „*no_attribute*“, einführen und schreiben $f_m(g_0)$ = *no_attribute*.

Damit ist auch die O-Definition von [12] – nach Klärung einiger Ungereimtheiten in der Notation von [12] – voll auf die FBA-basierte O-Definition von Kap.3.1 zurückgeführt.

---

[25] Jedoch ist die Schreibweise „p(...)“ bereits in Zitat-1 verbraucht für die Aussage $p(c_1,c_2)$, die besagen soll, dass das *Begriffspaar* (c_1,c_2) in der Relation p steht. (Das ist eine weitere Schlamperei in [12]. Doppelverwendung von formalen Notierungen sollte man, wenn gewünscht, aber ausdrücklich erläutern! Wir haben z.B. in Kap.2.2.3 die Doppelverwendung eines Zeichens „r“ für „Relation“ – einerseits für eine *Teilmenge* eines Mengenpaars G×M, andererseits für die *Aussage* „x**r**y“ – ausdrücklich erläutert.)

4.3 Vergleichstabelle [2] / [12] / FBA

In der folgenden Tabelle stellen wir noch einmal übersichtlich die Komponenten der Ontologie-Definitionen aus [2] bzw. [12] dem in dieser Note entwickelten Konzept gegenüber und weisen auf *Mängel* in [2] und [12] hin (rot gekennzeichnet). Diese Mängel waren die ***Motivation*** für die Erstellung dieser Note.

Tab.4: Vergleichstabelle [2] / [12] / FBA

Komponente	**bei *G. Pickert* [2]**	**bei *Maedche / Zacharias* [12]**	**in meinem FBA-Konzept**
Definitionszeilen (bei [2], [12] etwas umgestellt)	„Abstraktes Modell einer Ontologie“ **O** := (**C, H, R**, **L**, F, G; A)	*“Ontology Structure”:* **O** := (**C, H^C, P, A**, *prop*, *att*) *“Metadata Structure”:* **MD** := (**O, I, L,** *inst*, *instr*, *instl*)	**O** := (**IN, REL, LEX, BEZ**) alle anderen Komponenten sind aus diesen ***abgeleitet***. (Insbes. „Begriffe“ u. Halbordnungen)
Systeminterna:	**C, H, R** -- A (?)	**C, H^C, P, A**	**IN, REL**
Begriffe	Menge **C** von Begriffen. – „fällt vom Himmel“? – auf was basiert ein „Begriff“ mathematisch?	Menge **C** von Begriffen. - „fällt vom Himmel“? - Zusammenhang mit den „Attributen“?	**C(REL) =** Menge von „IN-Begriffen“. ***Abgeleitet*** *aus* **F(REL)** = Menge von „F-Begriffen“.
Attribute (zu Begriffen)	- (kommt nicht vor)	Menge **A** von Attributen (*„a specific kind of relations are attributes A“*)	**- unnötig.** „Attribute“ werden als IN-Begriffe gehandhabt
Halbordnung auf der Menge der Begriffe	**H**⊆**C**×**C** „***Taxonomie***“ – – kein Zusammenhang von **H** mit d. Mg. **R** d. Relationen ersichtlich!	**H^C** ⊆**C**×**C** „***Taxonomy***“ – kein Zusammenhang von **H^C** mit den „Relationen“ (**P**) ersichtlich!	Halbordnung $\leq_C$ auf C(REL). ***Abgeleitet*** *aus* der natürl. Halbordnung $\leq_F$ auf **F(REL)**.
2-stellige Relationen auf der Menge der Begriffe	Menge **R** 2-stelliger Relationen auf **C**	*rel*: **P**→Pot(**C**×**C**), also: *rel*(**P**) = Menge der Relationen auf **C**	Menge **<u>REL</u>** 2-stelliger „C-Relationen“ auf C(REL). ***Abgeleitet*** *aus der Grundmenge* REL.
Halbordnung auf d. Menge der Relationen (zw. Begriffen)	- (kommt nicht vor)	- (kommt nicht vor)	Natürl. Halbordnung $\leq_R$ auf <u>REL</u>: **<u>r•</u>**$\leq_R$**<u>s</u>** gdw. **<u>r•</u>** Teilverband von **<u>s•</u>** ist
Instanzen	- (kommt nicht vor) nur „O-Schema“	Menge **I** von *„instance identifiers“*	*Offene* ***Grundmenge*** **IN** von „Instanzen(namen)“
Attributwerte (zu Instanzen)	- (kommt nicht vor)	Menge **L** von sog. *„literal values“.* Bei Instanziierung werden Mengen v. Paaren (x,y) (x∈**I**, y∈**L**) gebildet.	- zunächst **unnötig:** „Attributwerte“ werden als „Instanzen“ aufgefasst. – (Attributwerte ggf. relevant bei sog. „mehrwertigen Kontexten“).
2-stellige Relationen auf d. Menge der Instanzen	- (kommt nicht vor) in [2] wird nur das „O-Schema“ diskutiert	- (entstehen durch Instanziierung. – Irreführende Notationen!)	***Grundmenge****:* **REL** von 2-stell. Relationen auf **IN**

Komponente	**bei** **G. Pickert [2]**	**bei *Maedche / Zacharias* [12]**	**in meinem FBA-Konzept**
Halbordnung auf d. Menge der Relationen (zw.Instanzen)	- (kommt nicht vor) in [2] wird nur das „O-Schema" diskutiert	- (kommt nicht vor)	Natürl. Halbordnung $\leq_{REL}$ auf d. Grundmenge REL.
Instanziierung	- (kommt nicht vor) in [2] wird nur das „O-Schema" diskutiert	*inst*: **C**→Pot(**I**) *instr*: **P**→Pot(**I**×**I**) *instl*: **A**→Pot(**I**×**L**) - Z.T. Irreführende Notationen / Tippfehler !	[vgl. Kap.3.3.7]
Gesamtkonzept für die Systeminterna	**- ?**	**- ?**	**(IN, REL), (C(REL), REL) als je *ein* „Compound-Kontext" darstellbar.**
Userschnittstelle:	L=LC∪LR, F, G	- *(?)*	(LEX, BEZ) | (IN, REL)
Lexikon (Menge von Bezeichnern aus der Umgangs- oder Fachsprache)	Menge **L** =LC∪LR (Lexikon) von sog. „Symbolen"	- (nicht erwähnt)	***Grundmenge***: **LEX** von sog. „Symbolen"(„Schlagwörter" aus Fach-/ Umgangssprache)
Bezeichner für Begriffe	Menge LC von Begriffs-Symbolen, LC⊆**L**	- (nicht erwähnt)	Menge LC von Begriffs-Symbolen, LC⊆**LEX**
Bezeichner für Relationen	Menge LR von Relationssymbolen, LR⊆**L**	Eventuell: Menge **P** der Relationsbezeichner *(„relation identifiers")*	Menge LR von Relationssymbolen, LR⊆**LEX**
Bezeichner für Attribute (zu Begriffen)	- (kommt nicht vor)	Eventual: Menge **A** von „Attributen" zu Begriffen; *(„a specific kind of relations are attributes **A**")*	**- unnötig.** Bezeichner für „Attribute" sind Elemente des Lexikonteils LC.
Bezeichnungsrelationen an der Userschnittstelle	**F**: Pot(LC)→Pot(**C**) **G**: Pot(LR)→Pot(**R**). - die „Userschnittstelle" ist nur „**halb**" ausgebildet! Es fehlt die Angabe von F*, G*.	- (nicht erwähnt). Eventuell brauchbar: *prop*: **P→C×C**, *att*:**A →C**, falls die p∈**P** u. die a∈**A** als Bezeichner gedeutet werden. Damit aber nur „**halb**" ausgebildet!	***Grundmenge***: **BEZ** = {bez_{LC}, bez_{LR}} von 2 Bezeichnungsrelationen**:** $bez_{LC} \subseteq$ LC×C(REL), $bez_{LR} \subseteq$ LR×<u>REL</u> . Die Userschnittstelle darstellbar durch 2 Kontexte (LC, C, bez_{LC}), (LR, <u>REL</u>, bez_{LR}).

5 Schlussbemerkung

Die Note [2] *(G. Pickert)* erhebt im *Abstract* den Anspruch,
„das Durcheinander von Konzepten und Terminologien zu reduzieren oder besser zu eliminieren und durch eine einheitliche, allen verständliche Terminologie mit den entsprechenden Konzepten zu ersetzen."

Beide Papiere, [2] und besonders [12], enthalten jedoch sowohl formale als auch orthographische Ungereimtheiten. Sie geben daher selbst recht gut den heutigen ***desolaten Gesamtzustand*** von dem wieder, was Informatiker eine „Ontologie-Definition" nennen.

Da das „*ontology engineering*" den Anspruch erhebt, Archivierung, Ausbau, Weiterverarbeitung, Verbreitung und Bereitstellung von Wissensgebieten *automatisieren* zu wollen, sollte es, bevor es den „*Kampf mit der Umgangssprache*“ aufnimmt, sich um eine einwandfreie *mathematische Grundlage* bemühen, so dass die in einer O-Definition auftretenden Komponenten im Prinzip alle ***prozessierbar*** (im programmtechnichen Sinne) werden. Die Konzepte der **Formalen Begriffsanalyse (FBA)** bieten dazu seit langem geeignete Mittel an. In dieser Note habe ich einen ersten Vorschlag zur Umsetzung der FBA-Hilfsmittel für eine mathematisch einwandfreie O-Definition gemacht.

Von der Wahrnehmung, geschweige der Umsetzung, dieser Mittel scheint das „*ontology engineering*“ derzeit aber noch weit entfernt zu sein. Der Grund ist für mich klar: Trotz fortgeschrittener Technologie im IT-Bereich hat das „*ontology engineering*“ das zwanghafte „*Substanzdenken*“ mittelalterlicher Metaphysik und Ontologie-Traditionen noch nicht überwunden.

Für mich jedenfalls ist mit der vorliegenden Note die lange – teils fruchtlose – Diskussion in unserem Ontologie-Arbeitskreis der Hochschule Darmstadt um die Frage „was ist eine Ontologie“ vom *mathematischen* Standpunkt aus erst einmal erledigt. Verfeinerungen, sowie der ***„Kampf mit der Umgangssprache“*** können nun auf fundierter mathematischer Grundlage – und etwas unabhängiger von überalterten Ontologie-Traditionen – angefangen werden.

6 Literatur

Die Nummern der in dieser Note besonders benutzten Referenzen sind **fett** gedruckt. Die Reihenfolge ist nicht alphabetisch, sondern sie gibt in etwa die zeitliche Reihenfolge wieder, in der die zitierten Arbeiten erstmalig für die vorliegende Note herangezogen wurden.

[1] **B. Ganter / R. Wille: „Formale Begriffsanalyse“ (FBA);** Springer 1996.
[Die am meisten benutzte Referenz]

[2] G. Pickert: „Einführung in Ontologien“, Humbold-Universität Berlin, Feb. 2011.
http://www.dbis.informatik.hu-berlin.de/dbisold/lehre/WS0203/SemWeb/artikel/2/Pickert_Ontologien_final.pdf

[3] W. Bartussek, B. Humm, A. Reibold, T. Zeh (Ontologie-Arbeitsgruppe der Hochschule Darmstadt): „Zur Definition von ‚Ontologie’ in den Informationswissenschaften“, Oktober 2010 / Mai 2011, Hochschule Darmstadt (h_da).

[4] Autorenkollektiv der Ontologie-Arbeitsgruppe der Hochschule Darmstadt (h_da): „Was ist eigentlich Ontologie“, *draft* Dez.2011 / *final* Jan.2012.

[5] C. Lübbert: „Ontologieschema versus FBA“ (Teil 1), v2, Darmstadt, 22.12.2011

[6] T. Zeh: „Darstellung von Texten in den drei Formalismen Power Context Families (PCF), Relational Data System (RDS) und Entity Relational System (ERS) anhand des Fallbeispiels „Biographie von Albert Einstein“, Hochschule Darmstadt, 13.10.2010.

[7] K. E. Wolff: „Relational Semantic Systems, Power Context Families, and Concept Graphs, Hochschule Darmstadt, 2009, http://www.fbmn.fh-darmstadt.de/home/wolff

[8] K. E. Wolff: „Relational Scaling in Relational Semantic Systems”, Hochschule Darmstadt, 2009, http://www.fbmn.fh-darmstadt.de/home/wolff

[9] Wikipedia: „Vererbung (Programmierung)“, Version 20.11.2011

[10] C. Lübbert: „Ontologieschema versus FBA“ (Teil 2), v1, Darmstadt, 13.01.2012

[11] C. Lübbert: „Ableitung von C aus R“, v1, (Ergänzung zu [10]), Darmstadt, 19.01.2012

[12] A. Maedche & V. Zacharias: „Clustering Ontology-based Metadata in the Semantic Web”, FZI Research Center for Information Technologies at the University of Karlsruhe, Research Group WIM, 2002/2003 (?)

[13] Nicola Guarino: „Formal Ontology, Conceptual Analysis and Knowledge Representation”, 1995 (?)

[14] John F.Sowa: “KR Ontology”, http://www.jfsowa.com/ontology/ , *last modified*: Nov.2010

[15] C. Lübbert: „O-Schema & Instanziierung von Maedche/Zacharias“, – eine Analyse, v2, Darmstadt, 23.02.2012

[16] M. Kreuzer / S. Kühling: „Logik für Informatiker“. Vlg. Pearson Studium, 2006.

[17] C. Lübbert: „Mehrwertige Logiken“, V11, Dez.2011, www.cl-diesunddas.de

[18] E. Husserl: „Logische Untersuchungen 2“, Vlg. M. Niemeyer, Halle, 1901.

[19] R. Ingarden: „Der Streit um die Existenz der Welt“, Bd.I (Existentialontologie), Bd. II/1 (Formalontologie 1), Bd.II/2 (Formalontologie 2). Vlg. M. Niemeyer, 1964-1965.

[20] C. Lübbert: „Nachlese zur Vortragsreihe 2009 von Frau V. Schlüter über Roman Ingarden“. Vortrag vor der Ontologie-Arbeitsgruppe der Hochschule Darmstadt, 6.5.2011. www.cl-diesunddas.de

[21] C. Lübbert: „Analyse-1 von Ingardens Existentioalontologie“, V2.6, Darmstadt, 22.09.2011. www.cl-diesunddas.de

[22] C. Lübbert: „Die Unterlassungen von *Roman Ingarden* bei der Einführung seiner 4 Existential-Parameter A, B, C, D in [RI-I, §12-§15]“ (Kurzfassung der Analyse-1 von [21] für Nicht-Mathematiker), Darmstadt, 25.10.2011. www.cl-diesunddas.de

[23] N. Hartmann: „Zur Grundlegung der Ontologie“. 1948

[24] D. C. Dennett: „Spielarten des Geistes“. Vlg. Bertelsmann, 1966, 1969

[25] Stanford Encyclopedia of Philosophy: „Mereology“, 2003 / 2009. http://plato.stanford.edu/entries/mereology/

[26] Stanford Encyclopedia of Philosophy: “States of Affaires”, März 2012. http://plato.stanford.edu/entries/states-of-affairs/

[28] R. Wille: „Conceptual Structures of Multicontexts“, FB Mathematik, TU Darmstadt, 1996.

[29] H. Herre (et.al.): „General Formal Ontology – Part 1, V1.0“, Univ. Leipzig, 2006 www.onto-med.de

[30] W.G. Stock: „Begriffe und semantische Relationen in der Wissensrepräsentation“, Abteilung Informationswissenschaft, Heinrich-Heine Univ. Düsseldorf, 2009. http://www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/fileadmin/Redaktion/Institute/Informationswissenschaft/1260277157iwp2009-8_.pdf

[31] R. E. Kent: „IFF Foundation Ontology“, (IFF [informationflow framework] / KIF ontology / namespaces / IFF category theory / …), Version July 2001

[32] Wikipedia: “Famimilienähnlichkeit” (nach *L. Wittgenstein)*; wikipedia, last modified: Mai 2012, http://de.wikipedia.org/wiki/Familien%C3%A4hnlichkeit

7 Versionskontrolle

Datum	Vers.	Maßnahme / Bemerkung
14.3.2012	V1.0:	Beginn der Arbeit
29.3.2012	V2.0	Vgl. mit [2] begonnen; Umstellungen in Kap.4.3
22.4.2012	V3.1	Noch zu überarbeitende Textstellen mit „&&&“ gekennzeichnet. Kapitel- und Formelnummern stimmen noch nicht!
27.4.2012	V3.2	Der Entwurf muss durch noch mehr Beispiele verständlicher gemacht werden! Vgl. mit [12] fertig.
07.5.2012	V3.3	Version an TZ+KEW+PZ geschickt.
09.5.2012	V3.4	Übersichtstabile – Vgl. [2], [12] mit O-Def.n.FBA – fertig
15.5.2012	V3.5	Tippfehlerkorrenkturen (V3.3, TZ+KEW) eingebracht. Version an KEW geschickt.
21.5.2012	V3.6	Einige Bezeichnungen geändert! Inhaltliche Vorschläge von TZ (zu V3.3) bis auf 1 eingearbeitet. Literaturliste ergänzt; Referenzen angepasst. 2 Korrekturen von PZ v.18.+19.5.12 eingebracht. Insges. noch ca. 2 „&&&“ übrig.
22.5.2012	V3.6	Kapitel.- u. FormelNr.-Referenzen korrigiert. Korrekturen am „Logik“-Kapitel aufgr. v. Anmerkungen von PZ korrigiert + ergänzt. („Logik“-Kap. kann bei Kurzfassung weggelassen werden). **Beispiele** müssen noch weiter ergänzt werden!
27.5.2012	V3.7	Hinweis auf die „pädagogische Aufgabe“ der Userschnittstelle einer Ontologie zugefügt. Version V3.7 verschickt an TZ, PZ, KEW, BH, AR, MR, VS, ET, RW, PB, SH, TS. (Die geplante Kurzfassung f.d. 45-Min.-Vortrag am 14.7.12 sollte inkl. Bilder nicht mehr als 20-30 Folienseiten haben. Folienseiten auf Word statt auf Powerpoint weg.d. math. Zeichen!!)
28.5.2012	V3.8	Weitere Tippfehler korrigiert, insbesondere in Kap.3.2.6.2 u. 4.2.3. Eine „Vortragsversion“ V4.0f mit großer Schrift davon abgeleitet (separate Datei); diese muss noch auf ca. 20-30 „Folien“ gekürzt werden!!.
23.6.2012	V3.8	Weitere Tippfehler korrigiert und ein paar textliche Ergänzungen eingefügt.
06.07.2012	V3.8.	Aus dieser Version die erste Vortrags-Folienversion V4.1f erstellt.
14.07.2012	**V4.4f**	Dies ist die endgültige Vortrags-Folienversion. Vortrag gehalten am 14.7.12. **V4.4f am 14.7.12 „an alle“ verschickt.**
25.07.2012		V4.4f zusammen mit der Note über „Kontinuum (Dez.2011) als Papier an Wille per Post geschickt.
08-10.08.12	V3.9	Die Volle Textversion V3.xx soll – neben der Folien-Kurz-Version V4.4f weitergeführt werden. Umstellungen: - Literatur ganz nach hinten, - Bereinigung von Kontexten als „Anhang“ nach hinten vor Schlussbemerkung (&&& muss noch gekürzt werden!), - „Logik“ ganz gestrichen Ergänzungen+Kürzungen: - Weitere mit einem F-Kontext (G,M,r) assoziierte Verbände. - Eingebracht: $\boldsymbol{U}$- und $\boldsymbol{J}$-Hüllensystem, $\boldsymbol{U}$-$\boldsymbol{J}$-Kontext (•-Kontext). - Zus.hang zw. F-Compound-Kontext und C-Compound-Kontext verbessert. - Philos.-Infomat. Vorspann: &&& kürzen u. Formulierung aus Vortragsfolien V4.4f übernehmen! - Verbesserte Bilder: aus V4.4.f übernommen. Formelapparat: - &&& Allg.: Mehr Text als Formeln!!! - &&& Allg. Formelnummerierung kürzen! Ggf. Numerierung nach Kap.ordnen! - &&& einige Formeln weglassen od. in Text einschließen!
21.08.12	V3.10	Einige Sätze zu F(REL) u. „F-Compounds“ hinzugefügt, Text zu „C-Compounds“ daher stark gekürzt.

29.08.12	V3.10	Phil.-infromat. Vorspann gekürzt (unter Verw. d.Textes von V4.4f). Einige neue Sätze in Kap."C-Compound-Kontext" zugefügt (&&& noch nicht fertig!). &&& Es sind noch ein paar gelöschte Abbildungen wieder einzufügen! &&& Formel-Referenznummern wieder korrigieren!! Lit.Verz. ergänzt. Anhang „Bereinigung" getrichen.
30.08.12	V3.10	Vortrag & Diskussion im BA-Seminar, FB Math. TU-Darmstadt.
06.09.12	V3.10	Die O-Def. korrigiert: Die „Dummy-Instanz d" nun ***vor*** REL_0 eingeführt, so dass es nicht aussieht, als schränke man REL_0 nachträglich ein. Damit ist es auch möglich REL*:= REL∪{triv} gleich als vollst. Verband einzuführen; REL jedoch bleibt ein Inf-Halbverband. Die „Vereinbarung (i)" bezieht sich nun nur noch auf die Normierung $\mathbf{K_r := (IN, IN, r)}$ der Kontexte. Mehrere Merkdiagramme (Tab.1, 2, 3) zur „Begriffsstufung" eingeführt. Kap."C-Compound-Kontext" stark korrigiert: In der Def von $\leq_C$ war noch eine Ungereimtheit (bei der Reflexivität), die nun beseitigt ist. Noch ein paar Abbildungen aus V4.4f übernommen und neue hinzugefügt. Abstract (in Engl.) zugefügt. Nochmal Tippfehlerkorektur durchgeführt. Formel-Referenznummern korrigiert.
13.09.12	V3.10	Alternativen zu „C-Compounds" hinzugefügt, indem statt der Inzidenzrelation **j** die Halbordnung hC:= $\mathbf{\leq_C}$ genommen wird. Entsprechend: Alternativen zu F-Compound hinzugefügt. „Erweiterbarkeit einer Ontologie auf FBA-Basis" hinzugefügt. Nochmal: Tippfehlerkorrektur.
14.09.12	V.3.11	C-Compounds nochmal überarbeitet. Erläuterung zu den „Axiomen" in [2] verbessert. Anmerkung über „aufgeweichte" Begriffsbildung zugefügt. – Wenn keine weiteren Fehler entdeckt werden, scheint V3.11 nun einigermaßen stabil zu sein. **V3.11 „an alle" (im ONTO-Arbeitskreis) verschickt**.
26.09.12	V3.12	Korrekturen/Ergänzungen zu „Verträglichkeit" und „Abgeschlossenheit" bei Ontologieerwieterung [Kap.3.3.7]. Hinzufügung der Kontexttabelle beim Gegenbeispiel (und Korrektur des Beispiel-Begriffsgraphen), welches zeigt, dass F(REL) i.allg. ***kein*** Verband ist [Kap.3.2.2/Abb.10]. Anm. zum „Verwandtschaftsgrad" [Kap.4.2.2/Fußn.23] etwas korrigiert. Kleinere Textänderungen. Inhaltsverzeichnis neu generiert. Anmerkung zu den sog. „Integritätsbedigungen" (einer konventionellen Ontologie) verbessert.
12.10.12	V3.13	Das Thema „*Durchschnittsverband*" eliminiert (ein „Beweis" war schlicht falsch!!). $\underline{D}$(R):= [Durchschnitt aller $\underline{B}$(s) mit s∈R] wird nun einfach „Verbandsdurchschnitt" genannt. $\underline{D}$(R) ist i.allg. nur dann ein Verband, wenn R={r} (u. somit $\underline{D}$(R)=$\underline{B}$(r)) ist! Statt dessen ein paar Ausblicke auf weitere Strukturen gegeben (aber nicht vertieft). Das Beispiel dafür, dass F(REL) i.allg. *kein* Verband ist, durch ein bessere Bsp. ersetzt, wo u.a. auch klarer wird, dass $\underline{D}$(r,s):= $\underline{B}$(r)∩$\underline{B}$(s) *nicht* gleich $\underline{B}$(r∩s) und $\underline{D}$(r,s) *kein* Teilverband von $\underline{B}$(r∩s) ist. Zu diesem Beispiel imnächsten Kap. auch den F-Kompound-Kontext u. den F-Compound-Verband als Beispiel für ein K_F hinzugefügt (Abb.14).