Dr. Christoph Lübbert
Viktoriastr. 36, 64293 Darmstadt
Tel.: 06151-42 22 98
christoph.luebbert@t-online.de
www.cl-diesunddas.de

"LOGIK"
- ist das Sprache oder Philosophie oder Mathematik oder ...?

Version: V5.4 (Draft), 29.04.2014

© Dr. Christoph Lübbert

Seminar Akademie 55-plus Darmstadt, 2013

© 2013 Copyright C.Lübbert: Verwendung elektronischer Auszüge nicht ohne Genehmigung des Autors!

Inhaltsübersicht

1 Vorbemerkung 3
2 Geschichtliches zum Thema "Logik" 6
3 Syllogistik – die alte "Begriffslogik" 18
4 Anfänge der modernen formalen Logik 30
5 Aussagenlogik 36
6 Prädikatenlogik 100
7 Formale Begriffsanalyse 142
8 Nicht-klassische Logiken 162
9 Schlussbemerkung 233
10 Literaturverzeichnis 235

1 Vorbemerkung

Ich bin von Hause aus Mathematiker. Ich hoffe, Ihr seid keine. In diesem Seminar will ich Euch letztendlich die moderne "mathematische Logik" etwas näher bringen. Bitte stört Euch nicht zu sehr an den Formeln; – ohne die geht’s leider nicht.
Die mathematische Logik ist nicht vom Himmel gefallen. Sie hat einen fast zweieinhalb Jahrtausende langen historischen Hintergrund. Den will ich zunächst kurz umreißen.

Dabei möchte ich klarstellen, dass die heute benutzte (mathematische) Logik keineswegs wie ein "Naturgesetz" aufzufassen sei, sondern sie ist ***sprach-*** und ***kulturabhängig*** entstanden.

– Zur Einstimmung zwei Zitate, die auf den Konflikt zwischen der natürlichen Sprache und dem *abstrahierenden* Verstand abzielen.

Zitat aus „Sprache und Logik“, 1913, [FM_1913], des österreichischen Schriftstellers und Philosophen ***Fritz Mauthner:***

*Die Logik stellt, wie die Grammatik, allgemeine Regeln auf. Die Grammatik der **eigenen** Sprache lehrt nicht, wie man sprechen **soll** oder wird, sondern nur, wie man spricht oder **gesprochen hat,** wofür sich eben nur der Grammatiker interessiert. Die Grammatik einer **fremden** Sprache erfährt man ebenfalls am besten durch die Übung; **immerhin kann die Grammatik einer fremden Sprache nützlich sein, wenn sie von der Grammatik der eigenen abweicht.***

*Die Logik lehrt nun ebenso, nicht wie man denken soll oder wird, sondern nur wie man denkt oder gedacht hat, was doch nur den Logiker interessiert. Nützlich kann uns nur eine Logik der **Fremden** werden. Wir selbst sind bei unserer eigenen Denktätigkeit umso weiter von der Anwendung der Logik entfernt, je sachlicher wir uns an die Denkaufgabe halten. Und ich möchte behaupten, dass die berühmten **Denkfehler**, die Sophismen und Paralogismen, **niemals von Nichtlogikern gemacht worden wären.***

Fritz Mauthner
1849 – 1923

Denn das natürliche Gehirn denkt gar nicht ungegenständlich, wendet gar keine Regeln an, sondern urteilt und schließt vielleicht sogar genau so instinktiv wie das Tier. ***Erst der redende Mensch dachte "logisch".*** *Es ist fast lustig, dass* ***Logik*** *vom* ***logos*** *stammt, der doch* ***nicht*** *im Anfang war.*

Zitat aus den *Cambridger* Vorlesungen (1930-35) [LW_1930-35] des österreichischen Logikers und Philosophen ***Ludwig Wittgenstein:***

Philosophie ist der Versuch, sich von einer bestimmten Art von Verwirrung zu befreien. Diese „philosophische“ Verwirrung betrifft den ***Verstand****, nicht den Instinkt. Philosophische Rätsel sind ohne Bedeutung für unser Alltagsleben, sie sind Rätsel der* ***Sprache****. Instinktiv gebrauchen wir die Sprache richtig, doch für den Verstand ist dieser Gebrauch ein Rätsel.*

Ludwig Wittgenstein
1889 – 1951

2 Geschichtliches zum Thema "Logik"

2.1 Wortherkunft

• Das Wort "**Logik**" kommmt vom altgriechischen λογικη τεχνη (*logike techne*) = "vernünftige Vorgehensweise" / "Denkkunst".

• Zugrunde liegt ihm das Wort λογος **(*logos*).** Es hatte bei den antiken Griechen viele Bedeutungen, u.a.: "Wort", "Rede", "Darlegung", "Abhandlung", "Spruch", "Gebot", "Geltung", "Rechnung", "Gesetzmäßigkeit", "Ordnung", "Bedeutung", "Denkkraft", "Vernunft" u.v.a.m.

• Denselben Sprachstamm hat das altgriechische Verb λεγειν

(*legein*); (urspr. griech. Bedeutungen: "lesen", "zählen", "(die Wahrheit) sagen", "dazu rechnen", "erklären", "behaupten" u.v.a.m.); lat.: *legere*; ital: *leggere*; span.: leer.

2.2 Was uns die Wortherkunft sagt

• Die Wortherkunft sagt bereits aus, dass man schon im antiken Griechenland **Sprache und Denken** als eine **untrennbare Einheit** empfand, mit welcher man – besonders, wenn es "mit Vernunft" erfolgte – eben den ***"Logos"*** – *"die Ordnung der Welt"* – wiederzugeben glaubte. Heute würden wir vorsichtiger sagen: *"die Ordnung der Welt", so wie sie vom* ***vernunftbegabten sprechenden / denkenden Menschen ab einer gewissen Entwicklungs- und Kulturstufe*** *erlebt wird"; d.h. "Logos" ist die* ***menschlich wahrgenommene*** *"Ordnung der Welt"*.

• Philosophie äußert sich stets nur ***sprachlich*** über uns und unsere Spekulatoinen über die Ordnung der Welt. Der griechische "Logos" ist daher ein philosophischer Begriff.

Somit war (westliche) "Logik" von der Antike bis in die Neuzeit stets ein Thema von **Sprache** *und* **Philosophie** gleichermaßen.

• Da die *Mathematik* in der Antike bis ebenfalls zu Beginn der Neuzeit nur als ein Teilgebiet der Philosophie galt, ist unsere Frage im Seminartitel bereits beantwortet:

Logik ist, geschichtlich gesehen, ein Thema von Sprache, Philosophie und Mathematik gleichermaßen.

• Der *große* ***Unterschied*** zu anderen, älteren Kulturen wie der am Nil und im Zweistromland (Ägypten, Sumer, Babylon, Persien, …) war der, dass bei den Griechen "**Logos**" und damit Sprache, Philosophie und Wissenschaft nicht mehr ausschließlich in den Händen der Priesterschaft und der Herrschenden lag, sondern sozusagen "***Allgemeingut***"

einer gebildeten Oberschicht wurde. Die **λογικη τεχνη – die Rede- und Denkunst –** wurde ein wichtiges Instrument für die Kommunikation in der aufkeimenden "***Demo-kratie"***.

2.3 Aristoteles und die Folgen

- Seit der griechischen Antike, (Parmenides, Sokrates, Platon, Aristoteles: 5. - 4. Jh. vC) bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts nC beschäftigte man sich bei dem, was man im Westen später "Logik" nannte, fast ausschließlich mit der Klärung von ***Begriffen*** und ihren Beziehungen untereinander,

wobei das deutsche Wort "***Begriff***" erst ziemlich spät aufkam, und lange gestritten wurde, was ein *'Begriff'* eigentlich sei. [Mittel-/frühochdeutsch: *begrif / begrifunge* (also herkommend vom manuellen "greifen" / "begreifen"); griech. auch: κατηγορια (Anklage, später Aussage, Eigenschaft); lateinisch-scholastisch u.a.: *predicamen* (Aussage, Eigenschaft), speziell auch *universale* (Allgemeinbegriff); engl.: "*concept"* oder *"category"*]

- "Logik" war noch kein Spezialgebiet der Mathematik.

- Man kann sagen: Logik diente in "altertümlicher" Weise einer sehr einfachen, noch verschwommenen Art von "**Sprachanalyse**".

- Besonders **Aristoteles** befreite die antike *logike techne* von vielen metaphysischen oder religiösen oder platonischen oder pythagoräischen oder vorsokratischen Spekulationen über den "Ursprung der Welt".

Aristoteles war der große ***Sprachklärer*** seiner Zeit. Mit ihm entstanden die Grundlagen für eine "**Wissenschaftssprache**". Diese Sprachgrundlagen durchziehen auch heute noch fast alle westlichen Wissenschaften – auch wenn es die unübersehbare Flut heutiger Fachtermini damals noch nicht gab.

Aristoteles
(384-322 vC)

- In Byzanz und im frühen europäisch-christlichen Mittelalter waren die von Aristoteles geschaffenen Sprachgrundlagen in Vergessenheit geraten.
- Sie wurden von ***arabischen Gelehrten*** – seit Beginn ihrer geistigen Auseinandersetzung mit der eroberten alten nahöstlichen und römisch-mediterranen Kulturwelt – ab etwa dem 8.-9. Jh. nC wiederentdeckt und kamen, besonders über das *islamische Spanien*, erst ab etwa dem 11.Jh. nC ins christliche Mitteleuropa.

Dort dienten sie allerdings hauptsächlich der sprachlich-philosophischen Untermauerung der **christlichen Theologie und Dogmatik**.

2.4 Dinge, Eigenschaften, Form, Materie

• Bei den antiken Griechen - und besonders bei *Aristoteles* - bemerkt man das erste Mal in der westlichen Kulturgeschichte deutlich die *äußerst explizite Wahrnehmung des* "**Individuums**".

• "Individuen" waren natürlich in erster Linie die einzelnen Menschen (allerdings erst einmal nur die "Freien" und weniger die "Sklaven"!)

• Diese "Individualisierung" übertrug man auch auf Tiere und Sachen: Das **"Ding"-Konzept** (belebte / unbelebte Dinge) spielte eine immer größere Rolle. Einzeldinge – wie z.B. den Menschen *Sokrates* – nannte Aristoteles "**Substanzen**". Das "Ding / Substanz" Konzept wurde bald auch auf "abstrakte" gedankliche Einheiten übertragen.

- Ja, es wurde erstmalig ***bewusst in <u>Einheiten</u> und Gruppen von Einheiten gedacht*** (Menschen, Tiere, Pflanzen, Steine, Luft, Feuer, Wasser, Zahlen, Töne, und schließlich auch: "der Staat", "das Schöne", "das Gute", "das Recht", "die Ordnung", …); und man bemühte sich, diese "Einheiten" genauer zu bestimmen durch "Eigenschaften" – also Merkmale, die so einer Einheit "zu eigen sind" ("rund", "groß", "aus Holz", "schön", "bewegt", "in Ruhe",….)
- Manchmal kam man mit dem "Ding/Eigenschaften"-Konzept ins Schleudern: Ist "aus Holz" auch ein "Ding" oder nur eine "Eigenschaft"? -- "Ist das Schöne selbst schön?" -- "Ist Gerechtigkeit selbst gerecht"? (Solche für uns seltsam anmutenden Fragen wirft u.a. Platon auf.)
- Die meisten Griechen waren stark ***<u>visuell</u>*** veranlagt. Nie zuvor wurde in der ***Bildenden Kunst*** der individuelle menschliche Körper in derart vollendeter Weise gesehen und dargestellt.

• Aristoteles postulierte: Jedes "Ding" sollte eine "**From**" ("Gestalt" - ειδος - *eidos* = *Aussehen*) haben und aus einer "**Materie**" (einem "Stoff" - ‘υλη - *hyl*e) bestehen. Bei Dingen wie Schwertern, Häusern, Statuen, Muscheln oder Bäumen schien das klar.

• Dieses Aristotelische Form/Materie-Prinzip (*Hylemorphismus*) versuchte man später sogar auf weniger "greifbare" oder gar auf abstrakte Denkeinheiten zu übertagen, was zu weitschweifigen philosophischen Streitereien führte.

- "Was ist die Form von Luft, was ihre Materie?" oder gar:
- "Was ist die Form einer Idee, hat sie Materie?"
- "Hat die 'Seele' nur Form oder auch Materie?"

• Jedenfalls bestand mit dem Aristotelischen Ansatz die Welt aus "**Dingen**" – bzw. abstrakter (als Denkeinheiten): aus "***Begriffen***".

• Die "Dinge"-Vorstellung ging so weit, dass Aristoteles das Form/ Materie-Prinzip dazu verwendete, selbst den *Entstehens- und Vergehensprozess* der "Dinge" damit zu "erklären": Ein Ding entsteht, indem Materie eine neu hinzukommende Form annimmt. So entsteht (so Aristoteles) z.B. eine Bronzestatue, indem eine Bronzemasse eine entsprechende Form annimmt. Die fertige Statue besteht *aus* Bronze, die Bronze liegt der Statue als Materie zugrunde. Wird die Statue zerstört, so nimmt die Materie (die Bronze) eine neue Form an und wird damit zu anderen "Dingen".

• Dabei fällt auf, dass sowohl die vielfältigen Entstehens- und Vergehens-***Prozesse*** als auch die ***Relationen*** zum (menschlichen) Erschaffer – etwa einer der Statue – bzw. den ***Betrachtern*** der Statue, welche ihre ***Bedeutung als Statue*** (also als fertiges, "existierendes Ding") erst ausmachen, gar nicht besonders betont

wurden; sie wurden in zwei ***Begriffen*** versteckt: der "**Form**" und der "**Materie**": Materie ist formbar und repräsentiert das "Werden", in ihr steckt die ***Möglichkeit***, ein Ding zu werden. Die aristotelische "Form" löste das ab, was Platon früher "**Idee**" nannte. Materie + Form zusammen ergeben das fertige „Ding“.

• Ich nenne das etwas scherzhaft: die westlich-antike "***Backsteinmentalität***", die da meint: Alles, was es gibt, sei eine Ansammlung von 'Dingen' ("Backsteinen"). Sie gipfelte in einem besonderen Zweig der Metaphysik, der seit ca. 350 Jahren (*Christian Wolff*) mit dem Wort **"Ontologie"** belegt wird (= Lehre vom "Sein" und den "Substanzen" -- "*Lehre von allem, was es gibt*", wie Ontologen sagen).

• Diese "Backsteinmentalität" bildete sich im **Westen** viel stärker aus als in fernöstlichen Kulturen! Sie beherrscht auch heute noch das westliche Denken! -- Das "*Sein*" war im Westen wichtiger als das "*Werden*" / "*Vergehen*". Die ***Dynamik*** der Welt und besonders ihr Verhältnis zum Menschen trat demgegenüber in den Hintergrund. In der von Aristoteles beeinflussten westlichen Philosophie (und Naturwissenschaft) betrachtete man die "Dinge" als naturgegeben (oder als von einem Gott geschaffen). Der Mensch kann sie (die "Dinge") mit seinen Sinnesorganen – oder mit den sie erweiternden Hilfsmitteln – an-

geblich "*wahrnehmen"*. (Nur vor diesem historischen Hintergrund bekommt die ***Kant***-sche Frage nach *"den Dingen an sich"* und die Bezweiflung ihrer Wahrnehmbarkeit ihren Sinn.)

Bis in die jüngste Zeit wurde in der klassischen "**Ontologie**" (abgesehen vielleicht von schüchternen Ansätzen in der Phänomenologie *Edmund Husserls* [1859-1938]) nie die alternative Perspektive ausdiskutiert, dass man ***das gesamte "Dinge/Eigenschaften" Konzept*** auch als ein Phänomen des westlich-aristotelisch geprägten *menschlichen Bewusstseins* auffassen kann (auch der sog. "Idealismus" des 19.Jh., insbesondere der von *Hegel*, hat das nie richtig fertig gebracht!). Mein motivierendes Schlagwort dazu***:***

• ***"Für Regenwürmer gibt es keine 'Dinge', denn sie haben kein geeignetes Gehirn, in dem sich dieses Konzept entwickeln könnte – und sie überleben trotzdem sehr gut"***.

• Sogar in der (im Westen erfundenen) **Quantenphysik** des 20.Jh, die ja ein revolutionärer (Rechen-)Ansatz ist, der sich vom alten "Dinge"-Konzept und vom Form/Materie-Prinzip weit entfernt hat***, ist das "Wording" immer noch Aristotelisch:*** Man drückt jeden Wechselwirkungsprozess zwischen sogenannten "Elementarteilchen" selbst durch sogenannte "**Elementarteilchen**" (also als "Dinge"!) aus.

3 Syllogistik – die alte "Begriffslogik"

• Die fast ausschließliche Beschäftigung mit der Klärung von "***Begriffen***" führte dazu, dass man nur einen ***winzigen Ausschnitt*** aus der Vielfalt der Ausdrucksmöglichkeiten der natürlichen Sprache herausnahm, um "die arme Welt der Dinge" zu beschreiben.

• Sprachlich gesehen beschäftigte man sich fast nur noch mit ***Substantiven*** (= Worte, die eine "*Substanz*" ausdrücken sollen), die Adjektive, Verben, die Präpositonen und all die vielen anderen Sprachelemente, welche die natürliche Sprache zur Kommunikation von uns untereinander und über die Welt zur Verfügung stellt, schienen zweitrangig. Wenn möglich "*versubstantivierte*" man sie alle (hart → das Harte / die Härte; schön → das Schöne / die Schönheit; laufen → das Laufen / der Lauf; was? → die Washeit(!), …)

Von der Vielfalt der Verben, (die ja meist etwas ***Prozesshaftes*** ausdrücken können!) blieb als einziges nur das Hilfsverb "**ist**" (sein) bei Formulierungen zur Beschreibung "der Welt" übrig.

– Und man versubstantivierte auch noch dieses Hilfsverb zum Substantiv "das **Sein**" und glaubte, damit den Inbegegriff für die "**Substanzen**" der Welt gefunden zu haben. Urheber dieser extremen Idee war ***Parmenides*** [ca. 520-460 vC] aus der süditalienischen Stadt *Elea.* Von ihm wurden *Platon*, und damit indirekt auch sein Schüler *Aristoteles*, beeinflusst.

„Aussagen“ waren nur noch Aussagen über "Dinge", in der Form **"X ist Y" / "X sind Y"** (Beispiel: "Pferde sind Tiere").

Aus diesem Ansatz entstand die philosophische Teildisziplin der Metaphysik, die man erst später (etwa seit *Christian Wolff*, 1679-1754) "**Ontologie**" (von gr. το ον - *to on* -"das Sein") nannte.

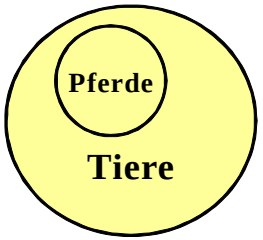
• Es galt, nun diese "Dinge-Welt" zu verstehen. Das meinte man hinzukriegen, indem man die "Dinge" **ordnete, kategorisierte**. Diese Ordnung empfand man als eben den "**Logos**", als "die Ordnung der Welt".

• Wie eine natürliche Sprache das schon seit eh und je macht, konnte man die meisten realen "Dinge" ("Individuen") in Gruppen zusammenfassen: Jedes individuelle Pferd ist eben ein Pferd. Alle Pferde zusammen bilden eine "**Art**" (lat.: *species*). Jede Art gehört einer umfassenderen Gruppe von Individuen an, man nannte sie eine "**Gattung**" (lat.: *genus*). Zum Beispiel gehört die Art "*Pferd*" der Gattung "*Tier*" an, oder etwas genauer: der Gattung "Säugetier" (einer Untergattung der Gattung "Tier"). Andererseits kann die Art "*Pferd*" in Unterarten, zum Beispiel "Reitpferd" und "Wildpferd" unterteilt werden. Usw, usf. … . (All das noch nicht im biologischen Sinne!)

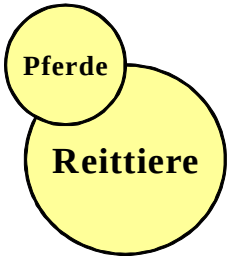
• Die Gruppennamen "Pferd", "Reitpferd", "Wildpferd", "Tier" usw. waren die ***Begriffe***, um die es ging, und in die eine ***Ordnung*** gebracht werden sollte. Zum Herausfinden einer solchen Begriffsordnung dienten 4 Elementarformen von sog. "**Urteilen**" (Aussageformen) und die sogenannten "**Syllogismen**" mit denen man von zwei Urteilen (den **Prämissen**) auf ein drittes Urteil (die **Konklusion**) schloss.

Anmerkung: Genau diesem Schema folgen auch heute [seit etwa den 1960-er Jahren] die sogenannten ínformatischen "Ontologien": Das Rückgrad jeder "*Ontology*" bildet eine "**Taxonomie**" (hierarschische Ordnung) der ***Begriffe***, mit denen man das Wissen in einem Fachgebiet (z.B. Medizin, Biologie, Rechtswesen) ordnen will. Das nächste Bild veranschaulicht, was man über das Verhältnis zweier Begriffe aussagen kann.

Syllogistik – die alte "Begriffslogik"

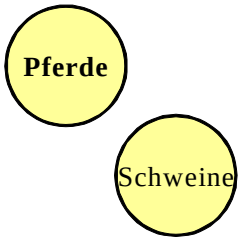


(A) Pferde sind Tiere



(I) Einige Pferde sind Reittiere

(O) Einige Pferde sind keine Reittiere



(E) Pferde sind keine Schweine

Die veranschaulichende Darstellung mit Kreisscheiben stammt erst aus späterer Zeit: Von *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716), *Leonhard Euler* (1717-1783) und *John Venn* (1834-1923). → **"Venn-Diagramme"** benutzt man heute im Mathematikunterricht an Schulen, um Mengenverhältnisse zu visualisieren.

- Nach Aristoteles ergeben sich 4 **Aussage-** oder **Urteilsformen**, die man sich über die Vokalbuchstaben **(A), (E), (I), (O)** merkt**:**

(A)	**(alle) X sind Y**	allgemein bejahendes Urteil	svw.: jedes X ist ein Y
(E)	**kein X ist (ein) Y**	allgemein verneinendes Urteil	svw.: (alle) X sind keine Y
(I)	**einige X sind Y**	partikulär bejahendes Urteil	
(O)	**einige X sind keine Y**	partikulär verneinendes Urteil.	

Fasst man "Pferd" als Name für die Gesamtheit aller einzelnen Pferde auf, so bezeichnet das Wort "Perd" eine bestimmte **Klasse** (**Menge**) von Dingen (die Pferde).
Allgemeiner: Fasst man X (bzw.Y) als Gesamtheit aller Individuen auf, welche wegen gemeinsamer Eigenschaften als zusammengehörig betrachtet werden, sind also X (bzw. Y) **Klassen** (**Mengen**) von Einzeldingen, so übersetzen sich die vier elementaren Urteilsformen folgendermaßen in die moderne Sprache der (mathematischen) **Mengenlehre**:

(A)	**(alle) X sind Y**	→ X ist Teilklasse der Klasse Y →	$X \subseteq Y$
(E)	**kein X ist** (ein) **Y**	→ Der Durchschnitt von X und Y ist leer →	$X \cap Y = \emptyset$
(I)	**einige X sind Y**	→ Der Durchschnitt von X u. Y ist nicht leer →	$X \cap Y \neq \emptyset$
(O)	**einige X sind keine Y**	→ X ist nicht Teilklasse von Y →	$X \not\subseteq Y$

• In der Form (A) -- "alle X sind Y" oder "X $\subseteq$ Y" -- heißt X ein "**Unterbegriff**" von Y und Y ein "**Oberbegriff**" von X. Die aristotelische Logik, die "**Syllogistik**" (gr.: συλλογισμος - *syllogismos – das „Zusammenrechnen“*), besteht nun darin, dass man aus zwei Urteilen – den "**Prämissen**" (Voraussetzungen) – auf ein drittes Urteil – die "**Konklusion**" – schließt. Das notiert man üblicherweise so:

Prämisse 1
<u>Prämisse 2</u>
Konklusion

In den 4 Urteilsformen (A), (E), (I), (O) wird X das "*Subjekt*" und Y das "*Prädikat*" genannt. Von den *Subjekten* wurde vorausgesetzt, dass sie keine "leeren" Begriffe seien, d.h. dass X, als Klasse (Menge) aufgefasst, auf wenigstens ein "existierendes Ding" verweise: $X \neq \emptyset$. Man sagte dazu *"Es gibt X" od. "X existert".* – Was "existieren" bedeuten sollte, ***blieb dabei aber im Nebel!*** Die Forderung nach "Existenz" der "Dinge" birgt eine ***sprachliche Aporie*** in sich, die in der philosophischen Ontologie (Lehre vom "Sein") bis heute diskutiert wird. ***In der Mathematik ist diese Frage heute längst geklärt.***

- Ein paar Beispiele für Syllogismen:

Syllogis-mustyp	allgemeine Form	Mengen-darstellung	Beispiel
(A) (A) (A)	alle X sind Y alle Z sind X alle Z sind Y	$X \subseteq Y$ $Z \subseteq X$ $Z \subseteq Y$	alle Reitferde sind Pferde *Susi* ist ein Reitpferd *Susi* ist ein Pferd Susi: 1-elementige Menge: "Individuum"
(A) (I) (I)	alle X sind Y einige Z sind X einige Z sind Y	$X \subseteq Y$ $Z \cap X \neq \emptyset$ $Z \cap Y \neq \emptyset$	alle Reittiere sind gezähmt einige Pferde sind Reittiere einige Pferde sind gezähmt
(A) (E) (E)	alle X sind Y Z sind keine Y Z sind keine X	$X \subseteq Y$ $Z \cap Y = \emptyset$ $Z \cap X = \emptyset$	Jedes Quadrat ist ein Rechteck Kreise sind keine Rechtecke Kreise sind keine Quadrate
(A) (A) (I)	alle X sind Y alle Y sind Z einige Z sind X	$X \subseteq Y$ $Y \subseteq Z$ $Z \cap X \neq \emptyset$	alle Quadrate sind Rechtecke alle Rechtecke sind Vierecke Einige Vierecke sind Quadrate

Syllogistik – die alte "Begriffslogik"

Syllogis-mustyp	allgemeine Form	Mengen-darstellung	Beispiel
(E) (I) (O)	X sind keine Y einige Z sind Y einige Z sind keine X	$X \cap Y = \emptyset$ $Z \cap Y \neq \emptyset$ $Z \not\subseteq X$	Dreiecke sind keine Quadrate einige Vielecke sind Quadrate einige Vielecke sind keine Dreiecke
(O) (A) (O)	einige X sind keine Y alle Z sind Y einge Z sind keine X	$X \not\subseteq Y$ $Z \subseteq Y$ $Z \not\subseteq X$	einige Pferde sind nicht gezähmt alle Reittiere sind gezähmt einige Pferde sind keine Reittiere
(E) (A) (O)	X sind keine Y alle Y sind Z einige X sind keine Z	$X \cap Y = \emptyset$ $Y \subseteq Z$ $X \not\subseteq Z$	Christen sind keine Muslime alle Muslime glauben an Allah einige Christen glauben nicht an Allah
(E) (A) (E)	X sind keine Y alle Z sind Y Z sind keine X	$X \cap Y = \emptyset$ $Z \subseteq Y$ $Z \cap X = \emptyset$	Christen sind keine Muslime alle Sunniten sind Muslime Sunniten sind keine Christen

• Die aufgelisteten Syllogismen sind alle allgemeingültig. (D.h.: ***wenn*** man ***voraussetzt***, dass die beiden Prämissen stimmen, dann stimmt notwendigerweise auch die Konklusion.) Das sieht man sofort, wenn man die ***Venn-Diagramme*** malt.

• **Wieviele Syllogismustypen gibt es?** – Dazu brauchen wir ein bisschen "Kombinatorik":

(a) In jedem Syllogismus kommen insgesamt nur genau **3 verschiedene nicht-leere Begriffe** vor; wir hatten sie als X, Y, Z notiert. In der 1. Prämisse stehen nur die ersten beiden Begriffe X, Y.

Das Subjekt, über das etwas in der *Konklusion* ausgesagt wird, sei Z. Z darf nur in der 2. Prämisse vorkommen. Das ergibt 4 mögliche Figuren für die Syllogismen.

	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4
Prämisse 1	X … Y	Y … X	X … Y	Y … X
Prämisse 2	Z … Y	Z … X	X … Z	X … Z
Konklusion	Z … X	Z … Y	Z … Y	Z … Y

(b) Ein Syllogismus ist formal ein **Tripel (_1, _2 | _3).** An jeder der drei Stellen darf man eine der 4 Urteilsformen (A), (E), (I), (O) verwenden. Das ergibt **4x4x4=64** Möglichkeiten. In jeder ist eine der 4 Figuren aus (a) möglich. Insgesamt erhält man also **64x4 =256** mögliche Syllogismen.

(c) Man rechnet aus, dass davon aber nur **24** Syllogismen **allgemeingültig** sind.

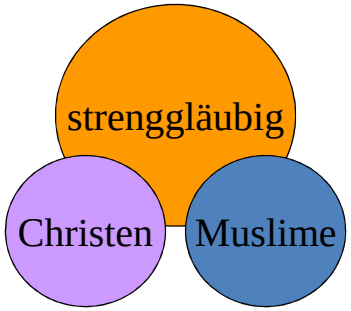
Anmerkung: Man sieht, es gibt nur wenige **allgemeingültige** Syllogismustypen unter vielen möglichen. Schon *Sokrates* und *Platon* hatten sich darüber aufgeregt, dass die "Sophisten" alle möglichen Schlüsse anwendeten, die gar nicht alle logisch zulässig sind.

- Wir geben abschließend noch ein Beispiel für einen Syllogismus, der ***nicht*** allgemeingültig (also logisch unzulässig) ist:

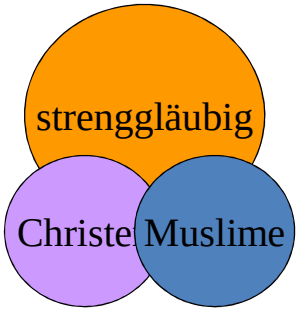
(O)	einige X sind nicht Y	$X \not\subseteq Y$	einige Christen sind nicht strenggläubig
(I)	einige Z sind Y	$Y \cap Z \neq \emptyset$	einige Muslime sind strenggläubig
(I)	einige X sind Z	$X \cap Z \neq \emptyset$	einige Christen sind Muslime

Zur Erläuterung: Wenn ich weiß, dass einige Christen der Bibel und den christlichen Dogmen nicht streng folgen, und dass einige Muslime dem Quran streng folgen, kann ich ***allein daraus*** formal keineswegs schließen, dass einige Christen Muslime seien. Bei Annahe der Güligkeit der beiden Prämissen kann es sein, dass einige Christen sich auch als Muslime bezeichnen, oder auch gar keine; $X \cap Y \neq \emptyset$ oder $X \cap Y = \emptyset$; vgl. das folgende Bild.

Nicht allgemein gültiger Syllogismus OII



Hier:
Christen sind
keine Muslime



Hier:
einige Christen
sind Muslime

4 Anfänge der modernen formalen Logik

Bedeutende Leistungen auf dem Gebiet der formalen Logik in der früheren europäischen Neuzeit erbrachte der deutsche Mathematiker und Universalgelehrte ***Gottfried Wilhelm Leibniz***.

Er hatte zwar Nachfolger (u.a. *Jakob I. Bernoulli, Gottfried Ploucquet, Lambert, Bolzano*), da jedoch die meisten seiner logischen Schriften erst lange nach seinem Tod veröffentlicht wurden, blieb er vorerst ohne großen Einfluss auf die Geschichte der Logik. Zu erwähnen ist v.a. sein früher Versuch, die Logik mittels einer ***eigens konstruierten logischen Sprache*** weiterzubringen, in der statt "wirklicher Begriffe" (was das auch sei!) und Aussagen ***Variablen*** verwendet werden.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Die folgenden Absätze, bis S.33, sind aus [Wiki_GL] übernommen.

Generell lässt sich in der früheren neuzeitlichen Philosophie ein gewisses Desinteresse für formale Logik erkennen (bei Descartes, Spinoza, Locke, Hume, Kant, Hegel, usw.).

Trotz anders lautender Ansichten hat Kant allerdings nichts gegen formale (er sagt allgemeine) Logik einzuwenden, er geht mit seiner "transzendentalen Logik" lediglich über sie hinaus. Die – von ihm auch unterrichtete – überlieferte formale Logik seiner Zeit fließt auch an vielen Stellen in seine Kritik der reinen Vernunft ein.

Erst Mitte des 19. Jh. findet die formale Logik wieder breitere Beachtung, zunächst vor allem in England. Richtungsweisend ist hier ***George Boole*** mit dem kürzeren Traktat „The Mathematical Analysis of Logic“ (1847) und seinem späteren Hauptwerk „Laws of Thought“ (1854). Booles Idee ist es, Logik als einen mathematischen Kalkül aufzufassen, der auf die Werte 1 ("wahr") und 0 ("falsch") beschränkt ist.

George Boole 1815-1864

Auf Klassensymbolen können so algebraische Operationen – ähnlich wie Addition, Multiplikation bei Zahlen – ausgeführt werden. Auf diese Weise entwickelt Boole ein vollständiges System der einstelligen Prädikatenlogik, welches die Syllogistik als Subsystem enthält. Zeitgleich mit Boole veröffentlicht ***Augustus De Morgan*** sein Werk „Formal Logic“ 1847. De Morgan interessiert sich hier u.a. für eine Verallgemeinerung der Syllogistik auf Aussagen der Form „Die meisten A sind B“.

Ein weiterer Logiker in England ist ***John Venn,*** der sein Buch „Symbolic Logic“ mit den berühmten Venn-Diagrammen 1881 veröffentlicht. An der logischen Forschung sind außerdem in Amerika ***Charles Sanders Peirce*** und in Deutschland ***Ernst Schröder*** beteiligt.

• Der **eigentliche Durchbruch zur modernen** Logik gelingt jedoch dem Deutschen Logiker, Mathematiker und Philosophen ***Gottlob Frege,*** der wohl als der neben Aristoteles bedeutendste Logiker überhaupt angesehen werden muss. In seiner ***‚Begriffsschrift‘*** (1879) stellt er zum ersten Mal eine volle Prädikatenlogik zweiter Stufe vor.

Außerdem entwickelt er hier die Idee einer **formalen Sprache** und darauf aufbauend die Idee des **formalen Beweises**, in dem nach Freges Worten nichts „dem Errathen überlassen“ bleibt. Gerade diese Ideen bilden eine ganz wesentliche theoretische Grundlage für die Entwicklung der modernen Computertechnik und Informatik.

Freges Werk wird allerdings von seinen Zeitgenossen zunächst kaum wahrgenommen. Dies mag u.a. an seiner sehr schwer zu lesenden logischen Notation liegen. Es lag aber auch daran, dass viele damals noch maßgebenden deutschen Philosophen (u.a. *Fichte*, *Schelling*, *Hegel*, auch *Schopenhauer* – und deren Anhänger) sich wenig für formale Logik interessiert hatten, sondern diese als ein nur für Mathematik und ein paar „Einzelwissenschaften“ geeignetes Werkzeug hielten.

In den beiden 1893 und 1903 erschienenen Bänden der „Grundgesetze der Arithmetik“ versucht Frege, die gesamte Mathematik in einer Art Mengentheorie zu axiomatisieren.

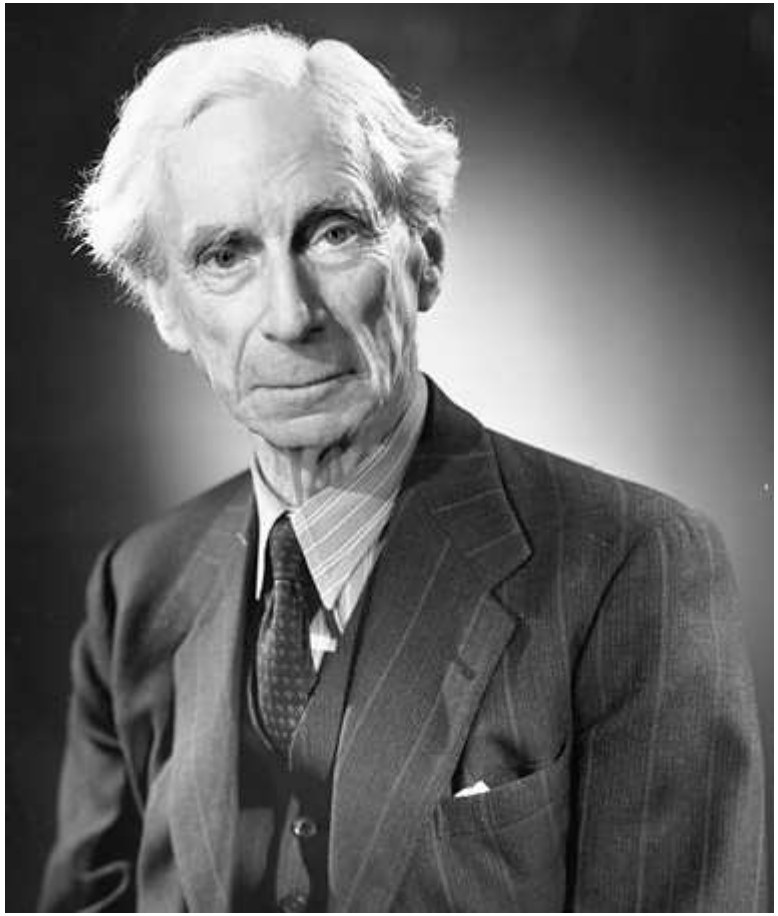
Dieses System enthält jedoch einen Widerspruch – die sog. ***Russellsche Antinomie*** – wie Frege in einem berühmt gewordenen Brief von ***Bertrand Russell*** aus dem Jahr 1902 erfahren muss.

Gottlob Frege (1848-1925)

Anm. CL: Die **Russelsche Antinomie** in leicht verständlicher Form ist bekannt als der "Barbier von Sevilla": (B) ***Der ‚Barbier von Sevilla' ist ein Mann aus Sevilla. Er rasiert alle Männer aus Sevilla, die sich nicht selbst rasieren.***

Frage: Rasiert der Barbier von Sevilla sich selbst? Scheinbar kann man diese Frage einfach entweder mit "ja" (stimmt) oder mit "nein" (stimmt nicht) beantworten. Aber:

- Wenn man sie mit "ja" beantwortet, folgt: Er rasiert sich selbst; da er aber nur alle Männer rasiert, die sich *nicht* selbst rasieren, gehört er also gemäß (B) zu diesen, rasiert sich also nicht selbst. → ***Widerspruch!***
- Wenn man die Frage mit "nein" beantwortet, gehört der Barbier zu denjenigen Männern von Sevilla, die sich *nicht* selbst rasieren, gemäß (B) rasiert er sich also selbst. → ***Widerspruch!***



Bertrand Russel 1872-1970

Die Aussage (B) führt also zu einem Widerspruch, egal, ob man annimmt, ob sie "wahr" oder ob sie "falsch" sei. (B) kann also offensichtlich gar keine zulässige ***Aussage*** sein!

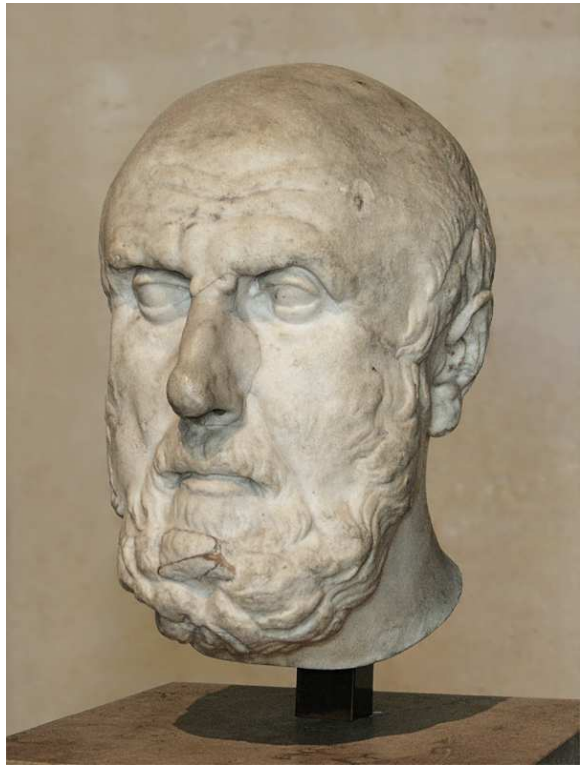
Russell selbst bleibt es vorbehalten, zusammen mit ***Alfred North Whitehead*** in den *Principia Mathematica* (1910) die erste widerspruchsfreie mengentheoretische Grundlegung der Mathematik vorzulegen. Die Autoren würdigen *Frege* im Vorwort, ihm verdankten sie das meiste in „logisch-analytischen Fragen“. Im Gegensatz zu Freges Werk werden die Principia Mathematica ein durchschlagender Erfolg. Einen Grund hierfür kann man u.a. in der von Russell/Whitehead verwendeten Notation sehen, die zu weiten Teilen heute noch üblich ist. Anstöße zu dieser Notation lieferte ***Giuseppe Peano***, ein weiterer bedeutender Logiker des ausgehenden 19. Jahrhunderts, den Russell im Jahre 1900 bei einem Kongress kennenlernte. Neben seinen Gedanken zur logischen Notation ist Peano vor allem für seine Axiomatisierung der Zahlentheorie (die sogenannten Peano-Axiome) bekannt (siehe S.117).

5 Aussagenlogik

5.1 Vorbemerkung

• In der Aussagenlogik stehen nicht mehr einzelne Substantive im Vordergrund, die "Individuen" oder "Begriffe" bezeichnen wie in der aristotelischen Logik, sondern **ganze Sätze.**

Anfänge der Aussagenlogik findet man bereits in der **Stoa** beim griechischen Philosophen ***Chrysippos*** (281/76 - 208/4 v.C.) aus ***Soloi in Kilikien*** (im 13.-14.Jh. n.C. Armenisches Königreich,Taurus-Gebirge; heute: südl. Türkei, angrenzend an Syriens Nordwesten).



Chrysippos von Soloi
(281/76 - 208/4 vC)

• Der einfachste Satztyp in einer natürlichen (z.B. einer indo-europäischen oder einer semitischen) Sprache besteht aus einem Subjekt und einem Prädikat, z.B.: "*Peter schläft"* – der Personenname '*Peter'* ist das Subjekt, das Verb '*schläft'* ist das Prädikat. Sätze oder Satzgruppen dienen der ***Kommunikation***. D.h. sie sind meist nur in einem *Dialog* sinnvoll, an dem mindestens zwei menschliche Partner beteiligt sind. "Verstehen" tut der sprachfähige Mensch "Sätze" stets nur in einem sogenannten **KONTEXT** (damit meine ich einen eventuell ***gar nicht verbal vorliegenden*** Situations- oder Sachzusammenhang).

• Es gibt viele Arten von "Sätzen", die eventuell auch "verstümmelt" sind (z.B. fehlendes Verb), und die meist nur in einem ***Situationskontext*** verständlich sind. Die wichtigsten Satzarten sind:

- **Fragesätze:**
  * *"Schläft Peter?"* (Antwort: "*ja*" oder "*nein*" oder "*weiß nicht*" oder "*vielleicht*").

* *"Welche Brotarten verkaufen Sie?"* (Antwort: <eine Aufzählung der in der Bäckerei angebotenen Brotarten> oder *"ich weiß es nicht"* oder <eine Gegenfrage: *"Was möchten Sie"*>).
* *"Wie wird das Wetter morgen?"* (Antwort: <eine Voraussage über das morgige Wetter> oder *"ich weiß es nicht"* oder *"blöde Frage!"*, …).
* *"Was ist ein Tier?"* (Antwort: <eine längere -- eventuell unbefriedigende -- Bestimmung des Begriffs "Tier"> oder *"blöde Frage!"*, …).
* *"Wieviel Uhr ist es?"* (Antwort: <Angabe der Uhrzeit> oder *"Ich weiß nicht",* …).
* *"Wo liegt Darmstadt?"* (Antwort: <eine Ortsangabe für Darmstadt> oder *"Ich weiß nicht",* oder Gegenfrage: *"Was? Das weißt du nicht?",* …).

- **Ausrufe- oder Befindlichkeitssätze:**
  * *"Oh, welch ein schöner Tag ist heute!"* (Antwort: <eventuell keine> oder <eine Zustimmung> oder <…>).
  * *"Ich liebe Dich!"* (Antwort: <eventuell gar keine verbale> oder <eine Handlung>).
  * *"Ich fühle mich nicht wohl"* (Antwort: eventuell keine> oder <Ausdruck der Besorgnis / des Mitgefühls>).

- **Befehls- oder Wunsch-Sätze:**
  * *"Bitte gib mir das Fahrrad zurück!"* (Antwort: evtl. <"*ja*" (Bereitschaft, dem Befehl zu

folgen) oder <"*nein*" (Zurückweisung des Wunsches)> oder <Handlung>).
* *"Man konstruiere das Viereck folgendermaßen: …"* (Antwort: <eine gedankliche oder manuelle Handlung, die nur im vorliegenden KONTEXT ausführbar ist!>).
* *"Bei Antrag … ist der Familienstand anzugeben"* (Antwort eventuell: <schriftliche Ausfüllung eines Formulars>).

- **Modalsätze / geschachtelte Modalsätze:**

* *"Peter glaubt, dass <Sachverhalt>".*
* "Peter fragt, ob <Sachverhalt>".
* *"Peter hofft, dass <Wunsch oder möglicher Sachverhalt>".*
* *"Peter sieht, dass <visueller Sachverhalt>".*
* *"Peter will, dass <Wunsch>".*
* *"Peter meint, dass Paul will, dass <Wunsch>"* (geschachtelter Modalsatz).

- **Behauptungssätze:**

* *"Die Amsel sitzt auf dem Baum"* (*die Amsel* / *der Baum*: je ein bestimmtes Induviduum, das nur in einem [evtll. gar nicht verbal vorliegenden] KONTEXT identifizierbar ist.).
* *"Peter hat die Tasse Tee ausgetrunken".* (hier gilt Ähnliches wie im ersten Beispiel).
* *"drei plus fünfzehn sind achtzehn"* (wer nur bis fünf [Finger einer Hand] zählen kann,

dem sagt das nichts!).
* *"Wenn heute Montag ist, ist morgen Dienstag"* (man muss die Wochentage kennen!)
* *"Gaius Julius Cäsar besaß einen Dolch von genau 33,5 cm Länge"* (wer kann das heute noch feststellen?! – Auch der nicht, dem die Person G.J. Cäsar historisch bekannt ist).

• Nur die letzte Gruppe von Satzarten – die Klasse der **Behauptungssätze** – ist in der *Aussagenlogik* relevant; und darunter auch nur solche Sätze, von denen "man" (also die Kommunikationspartner) in einem vorliegenden **KONTEXT** (Sinn- / Situationszusammenhang / Wissensbereich) ***im Prinzip eindeutig feststellen*** kann, ob sie ***entweder zutreffen oder ob sie nicht zutreffen.*** Man beurteilt ("bewertet") sie dann entweder mit "**wahr**" oder mit "**falsch**" – d.s. die beiden sogenannten "**Wahrheitswerte**" der klassischen Logik. Solche Behauptungssätze beinhalten einen ***Sachverhalt***. Sie werden "**<u>Aussagen</u>**" genannt.

• **Beachte:** Die auf S.34 erwähnte Russelsche Antinomie des *"Barbier von Sevilla"* ist nach dieser Definition ***gar keine zulässige "Aussage"***, obwohl sie wie eine solche aussieht! Auch die Behauptung über G.J. Cäsar ist eigentlich keine "Aussage", weil es ***praktisch*** nicht möglich ist, sie eindeutig mit "*wahr*" oder "*falsch*" zu bewerten.

• Ja/Nein-Fragen könnte man wie „Aussagen“ behandeln, falls der Fragesachverhalt als Aussage und die Antwort (ja / nein) als (wahr / falsch) gilt. Aber Fragen die mit „was“, „wie“, „wann“, „wo“, „wieviel“, „warum“ usw… beginnen, sind keine Aussagen, weil die Antwort kein „ja“ / „nein“, sondern die Angabe eines Sachverhalts erfordert. Ebenso sind Ausrufesätze, Befehls-, Wunsch- oder Modalsätze keine Aussagen. Zum Beispiel: Wenn jemand den Satz *"Peter glaubt, dass die Erde eine Scheibe sei"* mit *"stimmt nicht!"* beurteilte, würde er sich höchstwahrscheinlich auf den Sachverhalt, dass die Erde eine Scheibe sei, beziehen, aber nicht auf die Feststellung *"Peter glaubt, dass …"*; und das wäre sprachlich ***unkorrekt***. Peters Glaubens-Feststellung kann man jedoch nicht nachprüfen, wenn man nicht *Peter* selbst ist: Sie ist *Peters* ganz persönliche Einstellung und kein Sachverhalt.

• Man sieht: Mit der Beschränkung auf **Aussagen** hat man wieder nur einen ***winzigen Ausschnitt*** aus der Vielfalt der Ausdrucks-

möglichkeiten einer natürlichen Sprache ausgewählt. Die "Aussagenlogik" deckt zwar einen etwas "reicheren" Bereich ab als nur den der Individuen- und Begriffsnamen (wie in der alten Begriffslogik), dennoch ist das wieder nur ein sehr kleiner Sprach-Teilbereich.

5.2 Grundzüge der Aussagenlogik

In der Aussagenlogik geht man von "einfachsten" Aussagen aus, deren innere Struktur *formal nicht weiter* untersucht oder zerlegt wird. Diese heißen "**Elementaraussagen**" (oder auch "Atome").

• ***Welche*** Sätze in einem Wissensbereich als "*Elementaraussagen*" gelten sollen, bleibt zunächst offen; manchmal ist auch gar nicht eindeutig feststellbar, welche Sätze das sein sollen; die Wahl von „Elementaraussagen“ ist dann ***Vereinbarungssache*** und hängt vom KONTEXT ab, sowie von gewissen „Schwerpunkten“, die man in ihm hervorheben will.

Aus den (gewählten) Elementaraussagen setzt man weitere Aussagen zusammen mit Hilfe von Verbindungswörtchen wie "*nicht*",

"*und*", "*oder*" (sowie ggf. weiteren Verbindungswörtchen, diese alle werden in der deutschen Grammatik als „Konjunktionen“ bezeichnet).

Beispiel: Die Aussagen A:= *"Peter geht aus dem Haus"*, B:= *"Peter hat seinen Hund bei sich"* seien als Elementaraussagen akzeptiert. Aus ihnen kann man folgende zusammengesetzte Aussagen bilden:

nicht-A := *"Peter geht **nicht** aus dem Haus".*
(A und B) := *"Peter geht aus dem Haus **und** hat seinen Hund bei sich".*
(A oder B) := *"Peter geht aus dem Haus **oder** er hat seinen Hund bei sich".*

- **Normierung** der Verbindungswörtchen "***nicht***", "***und***", "***oder***":

* Das Wörtchen "***nicht***" wird in der Aussagenlogik so gebraucht: Wenn A „wahr“ ist, ist nicht-A „falsch“; wenn A „falsch“ ist, ist nicht-A „wahr“.
* Das Verbindungswörtchen "***und***" wird so gebraucht: (A und B) ist genau dann "wahr", wenn ***beide*** Teilaussagen A, B „wahr“ sind, andernfalls – wenn also mindestens eine der Aussagen A, B „falsch“ ist – ist (A und B) „falsch“. Bei gegebenen Teilaussagen A, B sollen (A und B) sowie (B und A) stets dengleichen Wahrheitswert haben.

* Das Verbindungswörtchen "***oder***" wird so gebraucht: (A oder B) ist genau dann „falsch“, wenn ***beide*** Aussagen A, B „falsch“ sind; andernfalls – wenn also wenigstens eine der Aussagen A, B „wahr“ ist – ist (A oder B) „wahr“. Das "*oder*" wird also nicht wie *"entweder … oder …"* gebraucht, sondern wie das sogenanntte "***inklusive***" *Oder*. Bei gegebenen Teilaussagen A, B sollen (A oder B) sowie (B oder A) stets den gleichen Wahrheitswert haben.

Diese Verbindungswörtchen (nach *Duden* sog. "*Konjunktionen*") nennt man in der Aussagenlogik "**Junktoren**". Man verwendet noch zwei weitere Junktoren (davon später).

Das nun folgende Prinzip schränkt den Bereich der Aussagenlogik weiter ein:

- "**Extensionalitätsprinzip**" **der Aussagenlogik:** *Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage X soll eindeutig bestimmt sein durch*
  (a) *die Wahrheitswerte der in X vorkommenden Elementaraus-*

sagen, sowie
***(b)** die Art der in X vorkommenden Junktoren.*

Geht man vom Extensionalitätprinzip aus und lässt für Aussagen nur die beiden Wahrheitswerte "*wahr*" und "*falsch*" zu, so lässt sich die Aussgenlogik in einfacher Weise formalisieren.

Anmerkung: Mit dem *Extensinalitäsprinzip* wird u.a. auch ein anderer Gebrauch des Verbindungswörtchens "*und*" ***ausgeschlossen***, bei dem es auf die *Reihenfolge* oder *Kausalbeziehung* der Teilsätze ankommt. Betrachte A:= "Peter wird krank *und* nimmt Tabletten ein"; B:= "Peter nimmt Tabletten ein *und* wird krank". Die unterschiedliche Reihenfolge der Teilsätze in A bzw. B drückt hier eine unterschiedliche Kausalbeziehung aus. Kausalbeziehungen aber sind ***kein*** Thema der formalen Logik!

5.3 Formalisierung der Aussagenlogik

Die Formalisierung der Aussagenlogik besteht in einer gewissen ***Algebraisierung***, deren Anfänge auf *George Boole* (1815-1864)

zurückgehen: Man will sowohl mit den Aussagen als auch mit den Wahrheitswerten "***rechnen***" können, ähnlich wie mit Zahlen.

Wir stellen hier die heute allgemein übliche Algebraisierung vor (sie weicht von der, die *George Boule* eingeführt hatte, etwas ab)**.**

Bezeichnen wir die Wahrheitswerte "*wahr*" bzw. "*falsch*" kürzer mit den Symbolen **1** bzw. **0** und schreiben $\beta(X)$ für den Wahrheitswert einer Aussage X, so ist β eine Abbildung (Funktion), welche jeder Aussage ihren Wahrheitswert zuordnet, dieser ist genau eines der beiden Elemente der Menge **B**:={1, 0}. Für die schon eingeführten Junktoren (Verbindungswörtchen) verwendet man folgende Kurzeichen:

$\neg$ für "***nicht***", $\wedge$ für "***und***", $\vee$ für "***oder***".

Diese Kürzel sollen sicherstellen, dass die sprachlichen Konjunktionen "*nicht*", "*und*", "*oder*" nur im Sinne der oben angegebenen ***Normierung*** zu benutzen sind.

• Das ***Extensionalitätsprinzip*** der Aussagenlogik gestattet nun, *nur auf dem Bewertungsbereich **B** = {1, 0} zu "rechnen"*, wenn man an Stelle der ***Negation*** $\neg$ einen 1-stelligen Operator * auf **B** einführt, so dass für jede Aussage X gilt: $\beta(\neg X) = (\beta(X))^*$.
Analog führt man an Stelle des ***und***-Junktors $\wedge$ einen 2-stelligen Operator • und an Stelle

des ***oder***-Junktors $\vee$ einen 2-stelligen Operator + auf **B** ein, so dass für je zwei beliebige Aussagen X, Y gilt: $\beta(X \wedge Y) = \beta(X) \bullet \beta(Y)$, $\beta(X \vee Y) = \beta(X) + \beta(Y)$.

Gemäß der ***Normierung*** auf S.43 sind dann die Operatoren *, •, + durch folgende Wertetabellen bestimmt:

$x := \beta(X)$	$x^* = \beta(\neg X)$
1	0
0	1

$x := \beta(X)$	$y := \beta(Y)$	$x \bullet y = \beta(X \wedge Y)$	$x + y = \beta(X \vee Y)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Beachte, dass die Symbole 0, 1 etwas anderes bedeuten als die ersten beiden natürlichen Zahlen, und dass die Operatoren +, • etwas anderes sind als die Addition bzw. Multiplikation von Zahlen!
-- Der Mathematiker fragt nun, ob das "logische Rechnen" im mathematschen Sinne "vollständig" ist, d.h. er fragt nach ***allen*** 1-stelligen und 2-stelligen Operatoren, die auf dem Bewertungsbereich **B** = {1, 0} möglich sind, und versucht, sie für die Aussagenlogik zu interpretieren. Es ergibt sich etwas verblüffend Einfaches. Dazu benötigen wir wieder ein bisschen "Kombinatorik".

• Wieviele 1-stellige Operatoren gibt es auf **B** = {1, 0}?

Es gibt **2^2=4** 1-stellige Operatoren auf einer 2-elementigen Menge. Wir notieren sie als n_1, n_2, n_3, n_4. Sie sind durch die folgende Wertetabelle bestimmt.

Tab.0:

x	$n_1(x)$	$n_2(x)$	$n_3(x)$	$n_4(x)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Offensichtlich ist $n_3(x) = x^*$; n_3 ist also der Verneinungsoperator * (siehe oben). Für ihn gilt bei zweimaliger Anwendung $x^{**} = x = n_2(x)$, und das ist die "identische Abbildung". n_2

bringt also ***nichts Neues***. n_1 und n_4 sind für eine "Verneinung" ***ungeeignet***, denn sie sind "*konstante*" Abbildungen. Für die Aussagenlogik bleibt also von den vier 1-stelligen Operatoren nur $\mathbf{n_3}$ übrig, und das ist der oben eingeführte Verneinungsoperator *, der dem aussagelogischen Negations-Junktor ¬ (Verbindungswörtchen "*nicht*") entspricht.

• Wieviele 2-stellige Operatoren gibt es auf **B** = {1, 0}?

Zweistellige Operatoren f(x,y) gibt es auf einer 2-elementigen Menge genau $\mathbf{4^2 = 16}$; wir notieren sie als $f_1,\ldots,f_{16}$. Sie sind durch die folgenden Wertetabellen bestimmt.

Tab.1:

x	y	$f_1(x,y)$	$f_2(x,y)$	$f_3(x,y)$	$f_4(x,y)$	$f_5(x,y)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1

Tab.2:

x	y	$f_6(x,y)$	$f_7(x,y)$	$f_8(x,y)$	$f_9(x,y)$	$f_{10}(x,y)$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0

Tab.3:

x	y	$f_{11}(x,y)$	$f_{12}(x,y)$	$f_{13}(x,y)$	$f_{14}(x,y)$	$f_{15}(x,y)$	$f_{16}(x,y)$
1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Die Anzahl der für die zweiwertige Logik *relevanten* zweistelligen Operatoren kann man ebenfalls stark reduzieren:

a) Beginnen wir mit **Tab.3.** Man liest ab, dass für beliebige Wahrheitswerte x, y $\in$ **B** gilt: $f_{11}(x,y)=\underline{1}$, $f_{12}(x,y)=\underline{0}$, $f_{13}(x,y)=x$, $f_{14}(x,y)=y$, und mit Hilfe des schon bekannten Verneinungsoperators * : $f_{15}(x,y)=x^*$, $f_{16}(x,y)=y^*$. D.h: f_{11} und f_{12} sind konstante Funktionen; f_{13} und f_{15} hängen gar nicht von y ab, und f_{14}, f_{16} hängen gar nicht von x ab. Alle sechs Funktionen der 3.Tabelle sind daher als logische Grundoperatoren ***ungeeignet***.

b) In **Tab.2** erkennen wir bei Vergleich mit Tab.1 für beliebige Wahrheitswerte x, y $\in$ **B**: $f_6(x,y)=[f_1(x,y)]^*$, $f_7(x,y)=[f_2(x,y)]^*$, $f_8(x,y)=[f_3(x,y)]^*$, $f_9(x,y)=[f_4(x,y)]^*$, $f_{10}(x,y)=[f_5(x,y)]^*$**;** d.h. mit Hilfe des schon bekannten Negationsoperators * könn f_6 bis f_{10} durch f_1 bis f_5 ausgedrückt werden, bringen also nichts Neues.

c) Bleiben also nur die ersten fünf Funktionen f_1 bis f_5 aus **Tab.1** für die Aussagenlogik zu interpretieren übrig: Bei Vergleich mit der **Normierung** auf S.43 ermittelt man für beliebige Wahrheitswerte x, y $\in$ **B**:

$$f_1(x,y) = x\bullet y,\quad f_2(x,y) = x+y,\quad f_3(x,y) = x^*+y,\quad f_4(x,y) = x+y^*,\quad f_5(x,y) = (x^*+y)\bullet(y^*+x).$$

d.h. f_1 entspicht dem Operator $\bullet$ für den *und*-Junktor $\wedge$, f_2 dem Operator + für den *oder*-Junktor $\vee$, und die restlichen Funktinen f_3, f_4, f_5 ergeben sich als Kombinationen aus *, +, $\bullet$. f_4 kann man weglassen, denn $f_4(x,y) = f_3(y,x)$ für alle x,y. Für f_3, f_5 führt man üblicherweise folgende Kürzel ein:

$$f_3(x,y) := x\rightarrow y,\qquad f_5(x,y) := x\leftrightarrow y.$$

Den Funktionen →, ↔ auf dem Wertebereich **B**={1, 0} entsprechen im Bereich der ***Aussagen*** die ***Junktoren*** ⇒ und ⇔, d.h. für beliebige Aussagen X, Y setzt man:

$$\beta(X \Rightarrow Y) = \beta(X) \rightarrow \beta(Y) = f_3(\beta(X),\beta(Y)), \quad \beta(X \Leftrightarrow Y) = \beta(X) \leftrightarrow \beta(Y) = f_5(\beta(X),\beta(Y))$$

<u>Anmerkung zu "⇒":</u> Sprachlich wird die Formel **X⇒Y** meist gelesen als ***"wenn X, dann Y"*** oder ***"aus X folgt Y"***; den Junktor ⇒ bezeichnet man daher als "**Implikations-Junktor**" (Folgerungsjunktor). Vereinbarungsgemäß ist "X⇒Y" wieder eine **Aussage**, die aus den Aussagen X, Y zusammengesetz ist. Manche Philosophen oder Sprachanalytiker sind nicht recht zufrieden mit der Lesart *"wenn … dann …"* oder der Lesart *"aus … folgt …"* für den Junktor "⇒". Alternative Lesarten für "X⇒Y" sind: *"X ist eine **hinreichende Bedingung** für Y" ("**immer wenn** X gilt, gilt auch Y")* oder gleichwertig: *"Y ist eine **notwendige Bedingung** für X"* ("***nur wenn*** *Y gilt, gilt auch X*"). Das Unbehagen wird auch dadurch genährt, dass wenn X ***falsch*** ist (β(X)=<u>0</u>), die Aussage X⇒Y ***wahr*** sein soll, egal ob Y *wahr* oder *falsch* ist (gemäß der f_4-Spalte in Tab.1). Aber so benutzt man die Redewendung *"wenn X, dann Y"* in der Umgangssprache ***nicht***: Bei dieser Redewendung geht man stillschweigend davon aus, dass die Voraussetzung X "richtig" (oder zumindest "möglich") sei. Dass die zusammengesetzte Aussage X⇒Y stets als "*wahr*" gelten soll, wenn die Prämisse X "*falsch*" ist, egal ob die Konklusion Y wahr oder falsch ist, wird aus der ***Mathematik*** begründet mit dem lateinischen Spruch ***"ex falso quodlibet sequitur"***

(aus Falschem folgt Beliebiges). Beispiel: Setze ich beim Rechnen mit den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, … die falsche Voraussetzung "15=16", so kann ich *bei ansonsten korrekter Anwendung der Addition und Subtraktion* daraus folgern, dass 0=1 sei, und allgemeiner, dass zwei beliebige natürliche Zahlen m, n gleich seien, m=n (was natürlich genau so "Unsinn" ist wie "15=16"). Aus einer falschen Voraussetzung X haben wir also – bei ***korrekter*** Anwendung der Implikation „⇒“ – eine falsche Konklusion Y geschlossen; daher – so der Mathematiker – gilt die Aussage X⇒Y als "*wahr*", wenn X „*falsch*“ ist, unabhängig davon, ob Y "*wahr*" oder "*falsch*" sei.

Anmerkung zu "⇔": Sprachlich wird die Formel X⇔Y meist gelesen als ***"X genau dann, wenn Y"*** oder *"X dann und nur dann, wenn Y"* oder *"X ist notwendig und hinreichend für Y"*. Ist x bzw. y der Wahrheitswert der Aussage X bzw. Y, so bedeutet "X⇔Y" dasselbe wie x↔y, und das ist dasselbe wie x=y (die Wahrheitswerte von X und Y sind gleich – wie man aus Tab.1 ersieht). Wenn "X⇔Y" zutrifft, sagt man daher auch *"X ist logisch gleichwertig zu Y".* Die Aussage "X⇔Y" ist genau dann „*falsch*“, wenn die Wahrheitswerte der Aussagen X, Y nicht übereinstimmen.

• Insgesamt reichen für die ***zwei-wertige Aussagenlogik*** folgende Junktoren auf dem Bereich der Aussagen und entsprechende Operationen auf dem Bewertungsereich **B** = {1, 0} = {*wahr*, *falsch*} aus: ➔

Junktor	Haupt-Lesart	Operation auf **B={1, 0}**
$\neg$	"*nicht*"	*
$\wedge$	"*und*"	•
$\vee$	"*oder*" (inklusiv)	+
$\Rightarrow$	"*wenn… dann*"	→
$\Leftrightarrow$	"*genau dann… wenn*"	$\leftrightarrow$

Mit Hilfe der Operatoren *, •, +, →, $\leftrightarrow$ kann man – wie gezeigt – ***alle*** vier 1-stelligen Funktionen n_1 bis n_4 und ***alle*** sechzehn 2-stelligen Funktionen f_1 bis f_{16} auf **B**={1, 0} erzeugen. Diese Operatoren nennt man daher eine **vollständige Funktionsbasis** für den Bewertungsbereich **B**={1, 0}.

Es reichen sogar schon die ***zwei*** Operatoren *, • als vollständige Funktionsbasis auf **B** aus! Das sieht man aus folgenden Gleichungen, die für alle Wahrheitswerte x,y∈ **B** gelten:

x+y	= (x* • y*)*	(Erzeugung von "+" mit Hilfe von * und •),
x→y	= (x • y*)*	(Erzeugung von "→" mit Hilfe von * und •)
x↔y	= (x • y*)•(y • x*)	(Erzeugung von "↔" mit Hilfe von * und •)

Analog zeigt man, dass auch die zwei Operatoren *, + und ebenso *,→ je eine **vollständige Funktionsbasis** auf **B** bilden. Schließlich hat der US-amerikanische Logiker *Henry Morice* ***Sheffer*** (1882-1964) gezeigt, dass bereits nur ***eine einzige*** Funktion auf **B** ausreicht, um eine **vollständige Funktionsbasis** auf **B** zu bilden, der sog. **"Sheffersche Strich"**. Es ist die Funktion f_6 in der obigen **Tab.2** (auf Seite 47). Sie ist mit Hilfe der Operatoren * , • bzw. mit *, + ausdrückbar durch x | y := f_6(x,y) = (x • y)* = x* + y*, deswegen heißt sie in der Informatik auch NAND (von «NOT AND», wegen : x|y = NOT(x AND y)).

Beispielsweise drückt sich * mit Hilfe von | so aus: x* = x|x. Und • bzw. + drücken sich *nur* mit | so aus: x•y= (x|y)|(x|y), x+y= **[**((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))**] | [**((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))**]**.

Das sieht ziemlich unübersichtlich aus! In der umgangssprachl. Praxis der zweiwertigen Aussagenlogik spielen zwar die Funktionsbasen *, • bzw. *, + bzw. *,→ eine Rolle, nicht jedoch die Sheffersche Basis "|", weil sie zu weit weg ist von der natürlichen Sprache: Für

die entsprechende Aussageformel X NAND Y := $\neg$(X $\wedge$ Y) findet sich eben *kein einfacherer* sprachlicher, aussagenlogisch brauchbarer Ausdruck, als eben nur *"nicht-(X und Y)"* [oder auch: *„nicht-X oder nicht-Y“*]. Unsere Sprache hat kein kurzes Konjunktionswörtchen für "NAND".

• Warum ist die moderne Aussagenlogik nur ***zweiwertig***?

Bei manchen ***Behauptungen*** empfindet man es als "künstlich", ja manchmal als absurd, sie nur mit "*wahr*" (1) oder mit "*falsch*" (0) bewerten zu dürfen. Oft bietet sich zumindest eine ***dritte*** Bewertung an, etwa: "*vielleicht*" oder "*ich weiß nicht*" oder "*unbestimmt*" oder "*undefiniert*" oder *"zwar möglich, aber nicht machbar"* oder "*irrelevant*" oder "*tut nichts zur Sache*" oder *"das kommt auf den Kontext an"* usw.

Die Beschränkung auf nur ***zwei*** Werte "*wahr*" (1) / "*falsch*" (0) ist meiner Ansicht nach zum einen ***historisch und kulturell*** bedingt und kommt von der auf S. 16 erwähnten aristotelischen *"Backsteinmentalität"* – dem "Dinge"-Konzept: ein "Ding" wird zu einem bestimmten Zeitpunkt und bezüglich eines bestimmten Ortes entweder als "*da*" oder als "*nicht da*" aufgefasst. „*Ein bisschen da*“ oder „*sowohl da als auch nicht da*“ oder „*weder da noch nicht da*“ akzeptiert die westlich-aristotelische Backsteinmentalität nicht! In ***indischen*** Philosophien und Logiken sind solche Auffassungen jedoch ***Gang und Gäbe!***

Zum anderen ist sie sicher ***mathematisch und sprachlich*** bedingt: Läßt man statt nur 2 Bewertungen ***dreie*** zu, sagen wir 0 (etwa: "*falsch*") , i (etwa: "*unbestimmt*"), 1 (etwa: "*wahr*"), so steigt die Anzahl der möglichen 1-stelligen Operationen auf dem Bewertungsbereich $\mathbf{B}_3$:= {1, i, 0} von 4 auf $\mathbf{3^3=27}$, die Anzahl der möglichen 2-stelligen von 16 auf $\mathbf{3^9 = 19.683}$ Operationen!

Das übersteigt bei weitem den Sprachschatz, der für eine sprachlich-intuitiv interpretierbare "Logik" zu Verfügung steht! (Zu "Mehrwertigen Logiken" → später.)

Es scheint mir also, dass die Einschränkung auf die Zweiwertigkeit der Logik kultur- und sprachbedingt ist. Sie erscheint uns *(westlichen Menschen)* ***nur deswegen wie ein „Naturgesetz“, weil wir es seit Aristoteles nicht anders gelernt haben und unsere Umwelt eben meist nur im Sinne der aristotelischen, objektorientierten „Backsteinmentalität“ perzipieren.***

Im *indischen Kulturraum* zum Beispiel ist diese grundsätzliche „ja-nein-Denke“ längst nicht so scharf ausgebildet. Z.B. begegnet man dort einer Logik mit **4 Bewertungen** (sanskrit: ***catuskoti***), die oft folgendermaßen zitiert werden:

„das eine“, „das andere“, „beides“, „keines von beiden“.

Das sollen in der Tat „Bewertungen“ sein, die aber *nicht direkt* auf unser „wahr“ / „falsch“ zurückgeführt werden können. Wie man eine solche 4-wertige Logik mit unserer 2-wertigen Logik sinnvoll vergleichen könnte (nämlich mit Hilfe von Paarbildung), schildere ich später im Kapitel „Mehrwertige Logiken“.

5.4 Kalkül der 2-wertigen Aussagenlogik

In unserem Computer-Zeitalter, wo "Logik" zu etwas "exakt Berechenbarem" gemacht werden soll, wo man also die Grundlage für ***Logik-Programme*** schaffen will, genügt die eben (Kap.5.3) eingeführte "Formalisierung" der Aussagenlogik noch nicht. Computerprogramme können nur mit festgelegten **Zeichen** umgehen und daraus (nach vorgegebenen Regeln) **endliche Zeichenreihen** bilden. Man legt daher einen sogenannten "**Kalkül**" für die zweiwertige Aussagenlogik fest. Die Kalkül-Idee stammt bereits von ***G.W. Leibniz***, also 250 Jahre vor dem Computerzeitalter, und wurde von ***G. Boole*** wieder aufgenommen.

Bei einem Kalkül trennt man streng zwei Definitionsbereiche:

- Das "**Syntax-Schema**", in dem der Umgang mit "Aussagesymbolen" definiert wird.

- Das "**Semantik-Schema**", in dem die algebraische Struktur des "Bewertungsbereichs" definiert, und formal festgelegt wird, was eine "Interpretation" oder "Deutung" der Aussagesymbole sein soll.

Bei den Definitionen bedient man sich der "***rekursiven Methode***", welche eine Eigenschaft der *natürlichen Zahlen*, die sog. "***mathematische Induktion***", umsetzt.

Zur Darstellung dieser beiden Schemata bedienen wir uns der "***naiven Mengenlehre***".

5.4.1 Syntax-Schema der Aussagenlogik

Unter einem "Alphabet" verstehen wir eine ***endliche*** Zeichenmenge. Das Alphabet **AlphA** der Aussagenlogik besteht aus

(1) einer (eventuell großen aber in der Praxis durchaus als ***endlich*** voraussetzbaren) Menge **E** von wohl unterscheidbaren Zeichen, die wir ***Elementaraussagezeichen,*** kurz "**EA-Zeichen**", nennen, und die wir mit a, b, c, … notieren;

(2) der Menge **J** = {$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$} der logischen **Junktorenzeichen**;

(3) den Klammern), (, die als Trennzeichen dienen und stets *paarweise* auftreten.

Keine weiteren Zeichen. Alphabet der Aussagenlogik: **AlphA = E** $\cup$ **J** $\cup$ **{**), (**}.**

Die Zeichen dieses Alphabets seinen eindeutig codiert, insbesondere seien die Mengen **E, J, {**), (**}** untereinander paarweise fremd. D.h. zum Beispiel, dass das Zeichen "$\wedge$" nicht zugleich als Junktor und als EA-Zeichen verwendet werden darf.

- Aus dem Alphabet **AlphA** wird ein ***formaler Sprachvorrat***, d.h. eine künstliche "Schrift-Sprache" ***rekursiv*** definiert; das ist eine Menge **P**, deren Elemente wir "**Aussagesymbole**" nennen. Jedes Aussagesymbol ist eine, nach folgenden Regeln zu bildende ***endliche*** Zeichenreihe:

Def. "Aussagesymbole" (rekursive Definition)**:**

(1) Jedes EA-Zeichen sei ein "Aussagesymbol": $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{P}$.

(2) Ist X ein Aussagesymbol, so soll auch $\neg X$ ein Aussagesymbol sein. D.h.: Wenn $X \in \mathbf{P}$ dann auch $\neg X \in \mathbf{P}$.

(3) Sind X, Y Aussagesymbole, so sollen auch $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \Rightarrow Y)$, $(X \Leftrightarrow Y)$ Aussagesymbole sein. D.h. wenn $\varphi \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ und $X, Y \in \mathbf{P}$, dann auch $(X \varphi Y) \in \mathbf{P}$.

Keine weiteren Arten von Zeichenreihen für Aussagesymbole.

Anmerkungen

1: Die Klammern **)**, **(** in Def.(3) sind wichtig, sie treten immer paarweise auf in der Reihenfolge (…). Sie besagen z.B. dass im Ausdruck $((X \wedge Y) \Rightarrow Z)$ zuerst $A:=(X \wedge Y)$ gebildet wird und dann $(A \Rightarrow Z)$. Bei Def.(2) braucht man *keine* Klammern als Trennzeichen.

2: Aus EA-Zeichen *zusammengesetzte* Aussagesymbole notieren wir mit Großbuchstaben X, Y, A, … Diese sind nicht die Zeichenreihen selbst, sondern sie *benennen* sie nur.

3: Das Syntax-Schema ist nichts anderes als "inhaltsleeres Hantieren" mit Zeichen und Zeichenreihen nach den o.a. Regeln – also das, was ein Computer "kann".

4: Def.(1) in der obigen *rekursivien* Definition entspricht der Anfangsaussage der "mathematischen Induktion" (für n=0). Die Def.(2), (3) entsprechen der allgemeinen Aussage der mathematischen Induktion (dem. sog. "Schluss von n auf n+1"). Zum Beispiel wird in Def.(2) angenommen, dass X schon als ein Aussagesymbol konstruiert worden ist.

5: Die mit den Regeln (1), (2), (3) aus EA-Zeichen konstruierten Aussagesymbole sind zwar alle ***eindliche*** Zeichenreihen, die aus der Menge **E** konstruierte Menge **P** aller Aussagesymbole ist jedoch ***abzählbar-unendlich***, d.h. sie hat dieselbe Mächtigkeit wie die Menge der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, … -- und das ***unabhängig*** davon, ob man **E** als endliche oder als abzählbar-unendliche Menge voraussetzt.

6: Man könnte auf den Gedanken kommen, die o.a. definitorischen Regeln *unendlich* oft anzuwenden, beispielsweise auf eine abzählbar-*unendliche* Aussagesymbolmenge $\Sigma:=$

$\{X_1, X_2, X_3, \mathbf{...}\}$, -- so ähnlich wie man auf der Menge der reellen Zahlen unendliche Summen bildet. Zum Beispiel könnte man definieren:

$$\text{UND}(\Sigma) := (X1 \wedge (X2 \wedge (X3 \wedge (\ldots)\ldots))) \text{ oder } \text{ODER}(\Sigma) := (X1 \vee (X2 \vee (X3 \vee (\ldots)\ldots)))$$

Das tut man aber in der Aussagenlogik nicht. Die Bildung der eben definierten "Pseudo-Junktoren" UND(..), ODER(..) wird zwar manchmal als Abkürzung bei ***endlichen*** Aussagesymbol-Mengen Σ benutzt und ist dann aussagenlogisch auch zulässig. Bei unendlichen Aussagesymbolmengen führt sie aber aus der Menge **P** aller Aussagesymbole hinaus. UND(Σ), ODER(Σ) sind bei einer *unendlichen* Menge Σ *unendliche* Zeichenreihen, also ***keine*** Aussagesymbole mehr. Wir kommen im nächsten Kapitel darauf zurück.

5.4.2 Semantik-Schema der Aussagenlogik

Im Semantik-Schema formalisieren wir folgendes Vorgehen: Aus dem *abzählbar-unendlichen* Sprachvorrat **P** wird immer nur eine ***endliche*** Teilmenge von Aussagesymbolen herausgegriffen, diese werden durch eine „passende“ Abbildung in einer Anwendung „ge-

deutet“ / „interpretiert“, wobei den zu deuteten Aussagesymbolen je ein Wahrheitswert $\underline{0}$ („falsch“) oder $\underline{1}$ („wahr“) zugeordnet wird.

Sei Σ eine ***endliche*** Menge von Aussagesmbolen, $E(\Sigma)$ die Menge der in Σ vorkommenden EA-Zeichen. Formal fasst man eine "Deutung" von Σ auf als ein Tripel $(\delta, \beta^\circ, \gamma)$ von **Abbildungen**. Die Abbildung δ: $E(\Sigma) \rightarrow T$ ordnet jedem EA-Zeichen $a \in E(\Sigma)$ genau eine Elementaraussage $\delta(a)$ aus einer "Theorie" T (einem "Wissengebiet" / "Anwendungsgebiet") zu. Die Abbildung β°: $E(\Sigma) \rightarrow \mathbf{B}$ ordnet jedem EA-Zeichen $a \in E(\Sigma)$ den Wahrheitswert $\beta^\circ(a) \in \mathbf{B} = \{\underline{1}, \underline{0}\}$ seiner Elementaraussage $\delta(a)$ zu; β° heißt eine **Elementarbelegung**. Schließlich ist γ: $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{V}$ die sog. **Junktorenabbildung**; sie ordnet jedem Junktor der Menge $\mathbf{J} = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ umkehrbar-eindeutig einen Operator der Basis $\mathbf{V} := \{*, \bullet, +, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ zu, mit der man auf **B** "rechnet":

$$\gamma(\neg) = *, \qquad \gamma(\wedge) = \bullet, \qquad \gamma(\vee) = +, \qquad \gamma(\Rightarrow) = \rightarrow, \qquad \gamma(\Leftrightarrow) = \leftrightarrow,$$

Dabei ist $(\mathbf{B}=\{1, 0\}, *, \bullet)$ – genannt der **Bewertungsbereich** – eine einfache algebraische Struktur, die mit den Grundoperatoren $*$, $\bullet$ definiert ist durch:

$$\underline{1}^* = \underline{0}, \quad \underline{0}^* = \underline{1}, \quad \underline{1}\bullet\underline{1} = \underline{1}, \quad \underline{1}\bullet\underline{0} = \underline{0}\bullet\underline{1} = \underline{0}\bullet\underline{0} = \underline{0}.$$

Aus den Grundoperatoren *, • leitet man die weiteren logisch relevanten auf **B** wirkenden Operatoren +, →, ↔ ab durch die Definitionen (für beliebige x,y∈ **B**)

$$x+y := (x^*\bullet y^*)^*, \quad x\rightarrow y := x^*+y = (x\bullet y^*)^*, \quad x\leftrightarrow y := (x\rightarrow y)\bullet(y\rightarrow x).$$

Die algebraische Struktur (**B**={1, 0}, *, •) ist ein spezieller sog. **Boole-Verband**; es ist der ***kleinste*** Boole-Verband mit mehr als einem Element. (Ich gehe hier nicht weiter auf die mathematischen Strukturen der "*Verbände*" und speziell der "*Boole-Verbände*" ein. Sie werden eine Rolle spielen bei den sog. "Mehrwertigen Logiken", Kap.8.)

Zu jeder Elementarbelegung β°: E(Σ)→**B** definiert man nun ***rekursiv*** eine „**Belegung**“ β: Σ→**B** der *ganzen* Aussagesymbolmenge Σ in den Bewertungsbereich **B**={1, 0} durch *endlich*-fache Anwendung der folgenden Regeln:

Def. Belegung β zur Elementarbelegung β° (rekursive Definition):

(1) Ist a ein EA-Zeichen, a∈ E(Σ), so sei $\beta(a) := \beta^\circ(a)$ und $\beta(\neg a) := (\beta^\circ(a))^*$.

(2) Sind a,b∈E(Σ), so sei $\beta(a\wedge b) := \beta^\circ(a)\bullet\beta^\circ(b)$.

(3) Ist X ein zusammengesetztes Aussagesymbol (X∈Σ), so sei $\beta(\neg X) := (\beta(X))^*$.

(4) Sind X, Y zusammengesetzte Aussagesymbole (X, Y∈Σ), so sei $\beta(X\wedge Y) := \beta(X)\bullet\beta(Y)$.

Für die aus * und • abgeleiteten Operatoren +, →, ↔ ergeben sich aus dieser rekursiven Definition, zusammen mit der Junktorenabbildung γ, folgende Rechenregeln für die **Belegung** von beliebigen Aussagesymbolen X, Y:

$$\beta(X \vee Y) = \beta(X)+\beta(Y), \quad \beta(X \Rightarrow Y) = (\beta(X))^*+\beta(Y), \quad \beta(X \Leftrightarrow Y) = \beta(X) \leftrightarrow \beta(Y).$$

Für eine gegebene endliche Aussagesymbolmenge Σ kann es viele "Deutungen" geben (je nach Anwendungsgebiet), die Junktorenabbildung γ ist dabei *immer dieselbe*; ebenfalls ist die Struktur des Bewertungsbereichs (**B**={$\underline{1}$, $\underline{0}$}, *, •) für die zweiwertige Aussagenlogik immer dieselbe. Nur die "Anwendungsabbildung" δ, sowie die zugehörige Elementarbelegung $\beta°$ und die daraus abgeleitete Belegung β:**Σ→B** variieren je nach Anwendung. Daher kann man eine Deutung auch einfach durch das Paar (δ, $\beta°$) oder das Paar (δ, β) charakterisieren. Die 2-wertige Aussagenlogik selbst ist aber eine ***von den Anwendungen unabhängige Struktur***. Daher wollen wir sie oder deren Kalkül durch das Tripel **(P, B, γ)** charakterisieren.

Bei den rein "algebraischen" Untersuchungen der Aussagenlogik **(P, B, γ)** *selbst* spielt die (wichtigste!) Anwendungsabbildung δ keine Rolle, nur die Variation der Elementarbelegung $\beta°$ und der daraus abgeleiteten Belegung β ist wichtig.

Anmerkung zur Anm.6 in Kap.5.4.1/S.62: Ist Σ eine ***endliche*** Menge von Aussagesymbolen, so ergeben sich mit den auf S.62 definierten "Pseudo-Junktoren", Ausdrücke UND(Σ), ODER(Σ), die wieder Aussagesymbole sind. Man kann dann ohne weiteres eine **Belegung** β auf sie anwenden und stellt fest: $\beta(\text{UND}(\Sigma))=\underline{1}$, wenn $\beta(X)=\underline{1}$ für *alle* $X\in\Sigma$ gilt; aber $\beta(\text{UND}(\Sigma))=\underline{0}$, wenn $\beta(X)=\underline{0}$ für *wenigtens ein* $X\in\Sigma$ gilt. Ebenso: $\beta(\text{ODER}(\Sigma)=\underline{1}$, wenn $\beta(X)=1$ gilt für *wenigstens ein* $X\in\Sigma$, aber $\beta(\text{ODER}(\Sigma)=\underline{0}$, wenn $\beta(X)=\underline{0}$ gilt für *alle* $X\in\Sigma$.
Diese Feststellung könnte man dazu verwenden, die zunächst nur auf **P** definierten Abbildungen β auch auf Ausdrücke UND(Σ), ODER(Σ) zu erweitern, wo Σ eine ***abzählbar-unendliche*** Menge von Aussagesymbolen ist. UND(Σ), ODER(Σ) sind dann zwar keine Aussagesymbole mehr, aber man könnte ihnen bei gegebener Belegung β einen Wahrheitswert zuordnen durch die (metasprachliche) ***Definition***:

$\beta(\text{UND}(\Sigma))$	$:= \underline{1}$,	wenn $\beta(X)=\underline{1}$ gilt für *alle* $X\in\Sigma$
	$:= \underline{0}$	andernfalls.
$\beta(\text{ODER}(\Sigma))$	$:= \underline{0}$,	wenn $\beta(X)=\underline{0}$ gilt für *alle* $X\in\Sigma$
	$:= \underline{1}$	andernfalls.

Etwas Ähnliches wie die Pseudo-Junktoren UND(..), ODER(..) führt man in der in Kap.6 zu besprechenden ***Prädikatenlogik 1. Stufe*** durch die sog. "**Quantoren**" ∀, ∃ ein.
Frage: Warum gestattet man dann nicht, die Ausdrücke UND(Σ), ODER(Σ) auch bei *unendlichen* Mengen Σ von Aussagesymbolen ebenfalls als "Aussagesymbole" zuzulassen?
Die Antwort ist ziemlich einfach: Syntax- und Semantik-Schema der Aussagenlogik sind entworfen für die Behandlung in ***Computerprogrammen***. Solche sollen aber in ***endlicher*** (möglichst kurzer) **Zeit** ein Ergebnis liefern, nachdem man ihnen eine Aufgabe gegeben hat. Die Abarbeitdung *endlicher* Zeichenreihen ist eine jedenfalls *notwendige* (aber noch keine hinreichende) Bedingung dafür. Aber unendliche, also nicht abbrechende, Zeichenreihen kann ***kein*** noch so schnelles Computerprogramm in endlicher Zeit abarbeiten.

Grundsätzliche Anmerkung: Das in Kap.5.4.2 Geschilderte zeigt, dass mit einer aussagenlogischen "Deutung" (Semantik) wiederum nur ein "***Schema***" definiert wurde. Mit einer "Deutung", wie sie ein Normalbürger versteht, ***hat das immer noch nichts zu tun!*** Es ist formal in der Anwendungsabbildung δ versteckt, die bei der rein algebraischen Untersuchung der Logik **(P, B, γ)** gar keine Rolle spielt. Ein Normalbürger versucht nämlich bei einer "Deutung" / "Interpretation" die Einordnung einer Struktur in etwas schon "Verstandenes" / "Bekanntes", ***das gar nicht formalisiert ist***; dieses "Etwas" nenne ich meist einen KONTEXT (in Großbuchstaben), d.i. ein subjektiv oder intersubjektiv oder

kulturell verstandenes Umfeld. Ein KONTEXT muss beileibe nicht immer nur schriftlich-verbal vorliegen! Er liegt ziemlich ***außerhalb*** der Intentionen, die man mit einer *Formalisierung* / einem *Schema* beabsichtigt! ***Das Wichtigste wird also bei der Formalisierung von dem, was „Deutung“/ „Interpretation“ ist, i.d. Logik ausgeklammert!!***

5.4.3 Unterscheidung "Objektsprache" / "Metasprache"

Es ist ratsam, zumindest **zwei Sprachebenen** zu unterscheiden: Die künstliche Sprache **P** nennt man die "**Objektsprache**". Die Sprache, ***in welcher*** **P** definert wird, und in welcher ***über*** die Logik **(P,B,γ)** gesprochen wird, nennt man die zugehörige "**Metasprache**" (von gr. μετα - "*danach*", "*darüber*").

Die hier von uns benutzte Metasprache ist ein Ausschnitt aus der Umgangssprache, welcher mit ***mathematischen Grundbegriffen*** angereichert ist.

Welches sind die mathematischen Grundbegriffe, die wir in der Metasprache schon einsetzen? Das hätten wir bereits ganz am Anfang sagen müssen. Wir holen es hier nach. Es sind i.w. die folgenden Grundbegriffe:

- Die „natürlichen Zahlen“ 0, 1, 2, 3, 4, … und das „Zählen“: Erst 0, dann 1, dann 2, dann 3, … usw. Wenn man mit dem Zählen bei n angkommen ist, darf man weiterzählen: n+1, n+2 usw… – und dieser Vorgang ***hat kein Ende***, sofern man nicht aus anderen Gründen ***ein Ende setzt***.
- Das Prinzip der **mathematischen Induktion** (oft auch „Schluss von n auf n+1“ genannt).
- **Mengen:** Wir benutzen den „***naiven***“ Mengenbegriff, so wie ihn *Moritz Benedikt Cantor* (1829-1920) eingeführt hat. „*Naiv*“ soll heißen: Die Mengenlehre ist noch nicht axiomatisch eingeführt. Eine „Menge“ M ist einfach eine Ansammlung von sog. „Elementen“. Dass ein Element a der Menge M angehört bzw. nicht angehört, schreibt man „$a \in M$“ bzw. „$a \notin M$“. Um Paradoxien zu vermeiden, ***verbietet*** man, die Beziehung „$M \in M$“ bzw. „$M \notin M$“ zu gebrauchen. Von einer Menge M darf man Teilmengen bilden; T heißt eine Teilmenge von M, in Zeichen: $T \subseteq M$, wenn T und M Mengen sind und alle Elemente

von T auch Elemente von M sind. Die Gesamtheit der Teilmengen einer Menge M ist wieder eine Menge, man bezeichnet sie mit $\mathrm{Pot}M:=\{T \mid T\subseteq M\}$. Die Ansammlung, die überhaupt keine Elemente hat, soll auch als „Menge“ aufgefasst sein: die sog. „leere Menge“, Zeichen: $\emptyset$. **Vereinbarung**: Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge: $\emptyset\subseteq M$. Jede Menge M ist Teilmenge von sich selbst: $M\subseteq M$. Die Teilmengenrelation „$\subseteq$“ muss wohl unterschieden werden von der Element-Menge-Relation „$\in$“! Die Teilmengenrelation $\subseteq$ ist gegenüber der Element-Menge-Relation unproblematisch. Von zwei Mengen X, Y kann man die „Paarmenge“ $X\times Y$ bilden, das ist die Gesamtheit aller geordneten Elementpaare (x, y) mit $x\in X$, $y\in Y$, also: $X\times Y := \{(x,y) \mid x\in X, y\in Y\}$. Entsprechend darf man „Tripelmengen“ $X\times Y\times Z$ aus gegebenen Mengen X, Y, Z bilden usw.

- **Abbildungen:** Seien X, Y Mengen. Eine Zuordnung, die *jedem* Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt *Abbildung* von X in Y (statt „*Abbildung*“ sagt man auch „*Funktion*“). Hat die Abbildung von X in Y den Namen α, so schreibt man dafür $\alpha:X\to Y$. Eine Abbildung $\alpha:X\to Y$ heißt *surjektiv* (oder „Abbildung von X *auf* Y“), wenn es zu *jedem* $y\in Y$ ein $x\in X$ gibt mit $y=\alpha(x)$. α heißt *injektiv* (oder „1-1-Abbildung von X in Y“), wenn für jedes $y\in Y$ gilt: falls $y=\alpha(x_1)$ und $y=\alpha(x_2)$, dann ist stets $x_1=x_2$. α heißt *bijektiv*, wenn α injektiv und surjektiv ist.

- **Relationen:** Der Einfachheit halber führen wir hier „Relationen“ als **Teilmengen** ein: Ist X eine gegebene Menge, so heiße jede Teilmenge $R \subseteq X$ eine *1-stellige Relation auf X*. Sind X, Y gegebene Mengen, so heiße jede Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ eine *2-stellige Relation* auf X, Y. Entsprechend: Sind X, Y, Z gegebene Mengen, so heiße jede Teilmenge $S \subseteq X \times Y \times Z$ eine *3-stellige Relation* auf X, Y, Z; usw… Wichtig bei dieser Einführung des Namens „Relation“ ist, dass er sich stets auf vorab bekannte („gegebene“) Grundmengen X, Y, Z bezieht. Man sieht: der Unterschied zwischen „Teilmenge“ und „Relation“ ist hier rein *interpretatorisch*. Später, in der Prädikatenlogik, werden wir Relaionen auch anders, nämlich über sog. „Prädikate“ einführen.

Dieses Grundvokabular aus der Mathematik mit dem man einen Ausschnitt aus der natürlichen Sprache „mathematisch anreichert“, um eine hinreichend geeignete „Metasprache“ zu etablieren, möge für unsere Zwecke zunächst einmal genügen. Weiter unten machen wir noch auf ein paar Einzelheiten beim Gebrauch von ***Notationen*** aufmerksam.

Besonders der Wuppertaler ***Rudolf Carnap***, 1891-1970, hat auf die Unterscheidung zwischen ***Objektsprache*** und ***Metasprache*** aufmerksam gemacht und gilt als einer der Begründer sowohl der ***Theoretischen Informatik*** als auch der ***Analytischen Philosophie*** des. 20.Jh. Er entlarfte viele "philosophische Probleme" der letzten 2 $^1/_2$ Tausend Jahre als ***Scheinprobleme***, die dadurch entstehen, dass man Sprachebenen durcheinander

bringt. – Manche Philosophen haben Mühe, das zu akzeptieren, und kauen immer noch an denselben alten Scheinproblemen herum, weil sie zu sehr in der Vergangenheit verhaftet sind und den Paradigmenwechsel des 20.Jh.s nicht nachvollziehen konnten.

Zu beachten ist, dass wir in der hier benutzten Metasprache eigentlich bereits eine – "noch nicht kalkülmäßig definierte" – zweiwertige "Logik" verwendet haben, um die Objektsprache und deren 2-wertige Aussagenlogik **(P, B, γ)** zu definieren.

Das sieht so aus, als würde sich "die Katze in den Schwanz beissen". ***Aber genau deswegen muss man zwischen den Ebenen "Objektsprache" und "Metasprache" unterscheiden, damit sich "die Katze nicht in den Schwanz beißt".***

Ob auch noch die Junktorenabbildung γ und die Elemente 1, 0 des Bewertungsbereichs **B** zur Objektsprache oder schon zur hier benutzten Metasprache gehören, ist strittig bzw. ist Geschmackssache. Ich plädiere dafür, dass γ und **B** zur *Metasprache* gehören.

Zu beachten ist ferner, dass die ***Notationsweise***, in der wir die Objektsprache **P** in diesem Text dargestellt haben, bereits zur *Metasprache* gehört: Zum Beispiel sollen die Elementaraussagezeichen ganz bestimmte, mit Hilfe eines Computerprogramms wohl unter-

scheidbare ***Zeichen*** sein. Wir haben nur gesagt, dass wir sie als a, b, c,… ***notieren***. Das heißt, dass diese Kleinbuchstaben eigentlich nur ***Variablennamen*** für diese EA-Zeichen sind, aber nicht die EA-Zeichen selbst. Ebenso gehören alle aus den EA-Zeichen, den Junktorenzeichen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und den Klammern), (nach den Regeln der auf S.60 gebildeten endlichen Zeichenreihen – die sog. "Aussagesymbole") zur Objektsprache. Wir haben nur gesagt, dass wir sie als Großbuchstaben X, Y, A, … ***notieren***. Das heißt, dass diese Großbuchstaben *eigentlich* nur ***Variablennamen*** für diese Aussagesymbole sind, aber nicht die Aussagesymbole (die Zeichenreihen) selbst.

Auch die Schreibweisen "X:= (a$\wedge$b)", "Y:= (a$\vee$b)" usw…, sowie "a$\in$ **E**", "X$\in$ **P**" gehören ***nicht*** zur Objektsprache sondern zur **Metasprache.** "X:=((a$\wedge$b)$\vee$c)" zum Beispiel soll nur heißen, dass ich vorübergehend das Aussagesymbol ((a$\wedge$b)$\vee$c) mit dem (metasprachlichen) Buchstaben X abkürze. "a$\in$ **E**" zum Beispiel soll nur mitteilen, dass wir mit "a" ein nicht näher spezifiziertes EA-Zeichen meinen; "X$\in$ **P**" soll nur mitteilen, dass wir mit "X" ein nicht näher spezifiziertes Aussagesymbol meinen. Insbesondere gehören die Zeichen ":=", "=" und "$\in$" ***<u>nicht</u>*** zur Objekt- sondern zur Metasprache („:=“ ist ein Zuweisungszeichen, „=“ ist das metasprachliche Gleichheitszeichen in einer als „wohlverstanden“ akzeptierten mathematischen Struktur, „$\in$“ ist eine Abkürzung für *"… ist Element der Menge …"*).

Frage: Bräuchte man nicht noch eine „Meta-Metasprache“, um auch die hier benutzte „Metasprache“ exakter zu begründen? – Dasselbe könnte man dann zur „Meta-Metasprache“ fragen usw. …, *ad infinitum*. Einige Informatiker behaupten, man käme grundsätzlich mit 4 Sprachebenen aus. Das mag zutreffen für die ***Zwecke*** der Informatik. „Allgemein“ (also philosophisch) kann man zur Anzahl *„aller“ Sprachebenen* nichts sagen. Philosophen machen in ihrer Sprache in der Regel ***überhaupt keinen*** Unterschied zwischen Sprachebenen. Das aber verursacht wiederum bei manchen (nicht bei allen) Fragen Probleme, die ***Carnap*** als philosophische ***Scheinprobleme*** entlarvt hat.

Das Ganze ist so ähnlich, wie wenn ich *einen Zentner Kartoffeln* vor mir habe: Die *Kartoffeln* sind die "Objekte"; der "*Zentner*" aber gehört nicht zu den Kartoffeln, sondern zur näheren Beschreibung dieser Ansammlung von Kartoffeln!

Aber: Eine „Objektsprache“ ist immer etwas durch unseren ***Verstand*** kreiertes „**Künstliches**“ gegenüber der jeweiligen „Metasprache“. Sowie man auch diese genauer begründen will, wird sie selbst zu einer „künstlichen Objektsprache“ gegenüber einer „Meta-Meta-Sprache“ usw.… In der Abneigung der **Philosophen** gegenüber dem Objekt- / Metasprache-Prinzip spiegelt sich also ein recht natürliches Sprachempfinden wider.

Leider haben sich aber klassische Philosophen nicht besonders mit diesem Sprachphänomen beschäftigt, sondern sie wollten (mit ihrer Sprache) einerseits „direkt / unmittelbar“, andererseits „so allgemein als möglich“ auf sogenanntes „Seiendes“ stoßen – und scheitern damit ***grundsätzlich***. ***Es kann gar nicht anders sein!***

5.4.4 Metasprachliche Definitionen zur Aussagenlogik

5.4.4.1 Äquivalenzen und Tautologien

Def. Logische Äquivalenz: Zwei Aussagesymbole $X,Y \in \mathbf{P}$ heißen **"logisch äquivalent"**, in Zeichen: $X \cong Y$, wenn $\beta(X)=\beta(Y)$ (und damit auch $\beta(X \Leftrightarrow Y)=\underline{1}$) gilt für ***jede*** Belegung $\beta:\{X,Y\} \rightarrow \mathbf{B}$.

Beachte: 1) X, Y sind logisch äquivalent, wenn ihre Wahrheitswerte nicht nur bei *einer*, sondern bei ***jeder*** beliebigen Belegung übereinstimmen; bei der einen Belegung können sie *beide* falsch, bei einer anderen *beide* wahr sein.
2) Die Relation $\cong$ erfüllt die drei Eigenschaften, durch die man definiert, was „Äquivalenzrelation“ heißen soll, nämlich: (i) **Reflexivität**: $X \cong X$; (ii) **Symmetrie**: wenn $X \cong Y$ so auch $Y \cong X$; und **Transitivität**: wenn $X \cong Y$ und $Y \cong Z$, dann $X \cong Z$.
3) Die logische Äquivalenz hat nichts zu tun mit dem Sinngehalt, den man in einer An-

wendungsabbildung δ versteckt. Beispiel: Es sei X := (a∧¬a), Y:= (b∧¬b), wobei z.B. δa:= *"Peter besitzt einen VW Golf"*, δb:= "Morgen geht die Sonne auf": Die beiden Aussagen δa, δb haben (ohne ihre Einbettung in einen größernen Kontext) sinngehaltlich nichts mit einander zu tun: X und Y dagegen sind hier bei *jeder* Belegung für a, b falsch; X, Y sind aber logisch äquivalent.

Das ist nun mal das Charakteristische einer (zweiwertigen) "Logik", die auf dem ***Extensionalitätsprinzip*** basiert. Die wichtgsten logischen Äquivalenzen bei beliebigen X, Y, Z:

$X \wedge Y \cong Y \wedge X,\ \ X \vee Y \cong Y \vee X$	Kommutativität von "*und*" u. "*oder*"
$(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z),\ \ (X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z)$	Assoziativität von "*und*" u. "*oder"*
$X \wedge X \cong X,\ \ X \vee X \cong X$	Idempotenz von "*und*" u. "*oder"*
$X \wedge (X \vee Y) \cong X,\ \ X \vee (X \wedge Y) \cong X$	Absorptivität von "*und*" u. "*oder"*
$X \wedge (Y \vee Z) \cong (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	Distributivität von "*und*" ggüb. "*oder*"
$X \vee (Y \wedge Z) \cong (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	Distributivität von "*oder*" ggüb. "*und*"
$\neg\neg X \cong X$	"Doppelte Verneinung ist Bejahung"
$\neg(X \wedge Y) \cong \neg X \vee \neg Y,\ \ \neg(X \vee Y) \cong \neg X \wedge \neg Y$	Gesetze von *De Morgan*
$X \Rightarrow Y \cong \neg X \vee Y$	Rückführung von "*wenn… dann…*" auf "*nicht*" u. "*oder*"
$X \Leftrightarrow Y \cong (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$	Rückführung von "*genau dann, wenn...*"

$X \Rightarrow Y \;\cong\; \neg Y \Rightarrow \neg X$ auf "*wenn ... dann...*" u. "*und*" "Umkehrschluss".

Anmerkung: Die äußersten Klammen habe ich der Einfachheit halber hier weggelassen. Genauer müsste man z.B. schreiben $(X \wedge Y) \cong (Y \wedge X)$ usw…. Ferner darf man wegen der Kommutativ- und Assoziativgesetze die Reihenfolge ändern und die Klammerschreibweise vereinfachen, wenn es nur um logische Äquivalenzen geht. Setzt man $X \wedge Y \wedge Z := X \wedge (Y \wedge Z)$, $X \vee Y \vee Z := X \vee (Y \vee Z)$, und allgemeiner

$$X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n := X_1 \wedge (X_2 \wedge (\ldots (X_{n-1} \wedge X_n)..)); \quad X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n := X_1 \vee (X_2 \vee (\ldots (X_{n-1} \vee X_n)..)),$$

so ist $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$ (zwar als *String* nicht *gleich* aber) *logisch äquivalent* zu jeder aus den Elementen der Menge $\{X_1,\ldots,X_n\}$ gebildeten $\wedge$-Kombination in beliebiger Reihenfolge, und entsprechend ist $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ *logisch äquivalent* zu jeder aus den Elementen der Menge $\{X_1,\ldots,X_n\}$ gebildeten $\vee$-Kombination in beliebiger Reihenfolge. Ist $\Sigma := \{X_1,\ldots,X_n\}$, so kann man auch $\mathrm{UND}(\Sigma) \cong X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$, $\mathrm{ODER}(\Sigma) \cong X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ setzen mit den auf S.60 erwähnten "Pseudo-Junktoren".

Beachte: Das Äquivalenzeichen "$\cong$" ist ein *metasprachliches* Zeichen. Man sollte es weder mit dem (objektsprachlichen) Junktorzeichen "$\Leftrightarrow$" noch mit dem (metasprachlichen) Gleichheitszeichen "=" verwechseln, – auch nicht mit dem ebenfalls metasprachlichen Zuweisungszeichen ":="! Ein Aussagesymbol ist eine endliche Zeichenreihe, gebil-

det aus EA-Zeichen, Junktorzeichen und Klammern. Sind X, Y Aussagesymbole so ist $(X \Leftrightarrow Y)$ ebenfalls ein Aussagesymbol. $X \cong Y$ ist hingegen kein Aussagesymbol, sondern eine metasprachlich definierte *Relation*. Gilt $X \cong Y$ für zwei Aussagesymbole, so müssen X und Y nicht dieselben Zeichenreihen sein. Schreibe ich aber "X = Y", so meine ich damit, dass die Zeichenreihen von X und von Y identisch sind. X, Y sind ja nur Notationen, ("Variablennamen", wie man sagt) für Zeichenreihen, und nicht die Zeichenreihen selbst. – Siehe die Anmerkungen in Kap.5.4.3 zu "Objektsprache / Metasprache".

Def. Tautologie / Antilogie: Ein Aussagesymbol $T \in \mathbf{P}$ heißt "*allgemeingültig*" oder eine **Tautologie**, wenn bei ***jeder*** Belegung β gilt: $\beta(T)=\underline{1}$ gilt. $A \in \mathbf{P}$ heißt eine **Anti-logie**, wenn bei ***jeder*** Belegung β gilt: $\beta(A)=\underline{0}$.

Die wichtigsten Tautologien bei beliebigen $X,Y \in \mathbf{P}$ sind:

$X \vee \neg X$	*„tertium non datur“* (entspricht der Gleichung $x+x^*=\underline{1}$ auf **B**)
$\neg(X \wedge \neg X)$	*„Satz vom Widerspruch“* (entspr.d. Gl. $(x \bullet x^*)^*=\underline{1}$ auf **B**)
$X \Rightarrow X$	*„triviale Implikation“* (entspr.d. Gl. $x \rightarrow x=1$ auf **B**)
$(X \wedge (X \Rightarrow Y)) \Rightarrow Y$	*„modus ponens“* (entspr.d. Gl. $(x \bullet (x \rightarrow y)) \rightarrow y = \underline{1}$ auf **B**)

Das Wort "Tautologie" kommt von gr. το αυτο – "*dasselbe*" – und bedeutet *"dieser Ausdruck ist dasselbe wie 'wahr' "*.

Ist T eine Tautologie, so ist $\neg$T eine Antilogie. Ist A eine Antilogie, so ist $\neg$A eine Tautologie. Jede logische Äquivalenz kann man in eine Tautologie umwandeln, denn es gilt: $X \cong Y$ ist genau dann der Fall, wenn $(X \Leftrightarrow Y)$ eine Tautologie ist.

Def. "Modell": Sei $\Sigma := \{X_1, \ldots, X_n\}$ eine endliche Menge von Aussagesymbolen. Eine Belegung $\beta : \Sigma \rightarrow \{\underline{1}, \underline{0}\}$ heißt ein "**Modell**" für Σ , wenn $\beta(X_1) = \ldots = \beta(X_n) = \underline{1}$. Gibt es wenigstens ein Modell für Σ, so Σ heißt "**erfüllbar**". Σ heißt "**unerfüllbar**", wenn es kein Modell für Σ gibt. Ist Σ nur 1-elementig, $\Sigma = \{X\}$, und ist β ein Modell für Σ, also $\beta(X)=\underline{1}$, so sagt man auch "β ist ein Modell für X".

Anmerkung: Kommt in Σ mindestens eine *Antilogie* vor, so ist Σ natürlich *unerfüllbar*.

5.4.4.2 Die Entscheidbarkeit der Aussagenlogik

Gegeben ein – eventuell recht komplex aus EA-Zeichen zusammengesetztes – Aussagesymbol F.

Frage: Kann man durch ein Computerprogramm in ***endlich*** vielen Rechenschritten entscheiden, ob F ***erfüllbar*** ist oder nicht? – Die Antwort ist **ja**.

Satz: Die Sprache **P** der Aussagenlogik ist "**entscheidbar**", d.h., es gibt ein *allgemeines Verfahren*, mit dem von ***jedem*** Aussagesymbol $F \in$ **P** in *endlich* vielen Schritten errechnet werden kann, ob es eine Belegung β gibt mit $\beta(F)=\underline{1}$ oder nicht.

Der Beweis dafür liegt in der Methode der ***Wahrheitstabellen***. Jedes Aussagesymbol F ist eine *endliche* Zeichenreihe; in F kommt also eine *endliche* Anzahl von EA-Zeichen vor. Kommen in F n EA-Zeichen vor, so hat die Wahrheitstabelle für F $\mathbf{2^n}$ Zeilen und – neben endlich vielen Zwischenberechnungsspalten – *eine* Ergebnisspalte. Steht in wenigstens einer der 2^n Zeilen in der Ergebnisspalte eine $\underline{1}$, so ist F erfüllbar, andernfalls ist F unerfüllbar.

Die Wahrheitstabellen-Methode ist allerdings für große n wenig effektiv. Zum Beispiel hat sie für 10 EA-Zeichen, aus denen F zusammengesetzt sei, bereits $2^{10} = 1024$ Zeilen. Für die Praxis hat man daher einen sog. ***Resolutionskalkül*** entwickelt, um die Erfüllbarkeit (bzw. Unerfüllbarkeit) von Aussagesymbolen zu entscheiden – vgl. z.B. [KrKü_LI]. (Ich gehe hier nicht weiter darauf ein.)

Die Entscheidbarkeitsfrage muss bei der später vorzustellenden ***Prädikatenlogik*** 1. Stufe mit ***nein*** beantwortet werden. Die Prädikatenlogik 1. Stufe – und erst recht die Prädika-

tenlogik 2. Stufe – ***ist nicht mehr entscheidbar.*** (Das kommt daher, dass man prädikatenlogische Ausdrücke bilden kann, die zwar ein Modell haben, aber ***kein endliches.***)

5.4.4.3 Semantische Folgerelation und Beweisbegriff

Def. "Semantische Folgerelation": Sei Σ eine *endliche* Menge von Aussagesymbolen und Y ein einzelnes Aussagesymbol. Man sagt ***"Y folgt semantisch" aus Σ",*** in Zeichen: $\boldsymbol{\Sigma \models Y}$, wenn ***jedes*** Modell von Σ auch Modell von Y ist, d.h. wenn für jede Belegung β, für die $\beta(X)=\underline{1}$ für *alle* $X \in \Sigma$ gilt, auch $\beta(Y)=\underline{1}$ gilt. Ist Σ ein-elementig, $\Sigma=\{X\}$, und folgt Y semantisch aus {X}, so schreibt man auch einfach "$X \models Y$".

Ist T eine Tautologie, so schreibt man $\emptyset \models T$ oder einfach $\models T$, denn mit einer Tautologie T gilt $\Sigma \models T$ für *jede beliebige* endliche Menge Σ von Aussagesymbolen.

Beachte: Das Zeichen " $\models$ " sieht so ähnlich aus wie das Zeichen "$\Rightarrow$" für den Implikations-Junktor "*wenn … dann…".* Man darf die beiden Zeichen aber ***nicht verwechseln***, denn "$\Rightarrow$" gehört zur ***Objektsprache*** **P**; aber " $\models$ " gehört zur ***Metasprache über*** der Aussagenlogik. Der Zusammenhang der semantischen Folgerelation $\models$ mit den **Tautologien** ist auf der metasprachlichen Ebene einfach, wenn eine ***endliche*** Menge $\Sigma := \{X_1,\ldots,X_n\}$ vorliegt. Es gilt:

$\{X_1,\ldots,X_n\} \models Y$ genau dann, wenn $\models ((X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) \Rightarrow Y)$, und das ist genau dann der Fall, wenn $((X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) \Rightarrow Y)$ eine **Tautologie** ist. Speziell gilt:
$X \models Y$ genau dann, wenn $\models (X \Rightarrow Y)$, also wenn $(X \Rightarrow Y)$ eine **Tautologie** ist.

- Die Definition der semantischen Folgerelation $\models$ sagt überhaupt nichts darüber aus, wie man ***zeigen*** ("beweisen" / "herleiten") könnte, dass aus einer Menge $\{X_1,\ldots,X_n\}$ von Aussagen die Aussage Y "folgt". Dazu bildet man formal die Art und Weise nach, wie Mathematiker etwas "beweisen".

Zunächst braucht man ein endliches System **SR** von "**Ableitungsregeln**", die angeben, wie man von einer gegebenen endlichen Menge $\Sigma = \{X_1,\ldots,X_n\}$ von (gesetzten oder schon bewiesenen) Prämissen zu einer neuen Aussage Y übergehen darf.

Die bekannteste Ableitungsregel stammt von ***Aristoteles*** und heißt lat. "***modus (poniendo) ponens***". Sie besagt, dass man von $\{X, (X \Rightarrow Y)\}$ nach Y übergehen darf. Sie wird üblicherweise wie nebenstehend notiert. ➔
In Zeilenschreibweise schreibt man dafür "$\{X, (X \Rightarrow Y)\} \vdash Y$"

$$\frac{X,\ (X \Rightarrow Y)}{Y}$$

Allgemein schreibt man eine Regel, die von n Prämissen $X_1,\ldots, X_n$ nach Y überzugehen gestattet, in der nebenstehenden Form auf. ➔

$$\frac{X_1, \ldots, X_n}{Y}$$

In Zeilenschreibweise schreibt man dafür "$\{X_1,\ldots,X_n\} \vdash Y$".

Der "*modus ponens*", $\{X, (X \Rightarrow Y)\} \vdash Y$, rechtfertigt sich dadurch, dass das Aussagesymbol $((X \wedge (X \Rightarrow Y)) \Rightarrow Y)$ eine ***Tautologie*** ist (vgl. S.77). Daraus ergibt sich, dass Y auch semantisch aus $\{X, (X \Rightarrow Y)\}$ folgt, d.h. dass $\{X, (X \Rightarrow Y)\} \models Y$ gilt.

Für jede Ableitungsregel ist es natürlich notendig, dass mit ihr aus etwas "Wahrem" auch etwas "Wahres" abgeleitet wird, damit sie nicht in Widerspruch zur semantischen Folgerelation gerät. Man sagt:

Def. semantische Korrektheit: Ein System **SR** von Ableitungsregeln heißt **semantisch korrekt**, wenn aus $\Sigma \vdash_{SR} Y$ stets auch $\Sigma \models Y$ folgt.

Der *modus ponens* ist nicht die einzige korrekte Ableitungsregel. Etwas allgemeiner: Ist $((X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) \Rightarrow Y)$ eine *Tautologie*, so kann man $\{X_1,\ldots,X_n\} \vdash Y$ als eine *korrekte* Herleitungsregel nehmen. Wir wollen sie hier nicht alle aufzählen. Alle Regeln von **SR** zusammen ergeben das, was man den "**syntaktischen Beweisbegriff**" nennt. Wir geben hier nur die allgemeine Definition, die sagt wie man bei einem „Beweis“ zu verfahren hat.

Def. "syntaktischer Beweis": Sei Σ eine ***endliche*** Menge von Aussagesymbolen und Y ein einzelnes Aussagesymbol. Sei ferner **SR** ein endliches System von **Regeln**, die angeben, ob und wie man „von Σ nach Y übergehen“ darf. Man sagt

„Y ist mit SR aus Σ herleitbar (ableitbar / beweisbar)“, in Zeichen: $\boldsymbol{\Sigma \vdash_{SR} Y}$**,**
wenn es eine ***endliche*** Folge $C_1, C_2, ..., C_n$ von Aussagesymbolen gibt, an deren Ende Y steht (C_n=Y), derart dass für jedes $i \in \{1, ..,n\}$ eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

(1) $C_i \in \Sigma$ bzw.
(2) C_i entsteht durch Anwendung der Regeln von **SR** aus einer Teilmenge von $\{C_1,..,C_{i-1}\}$.

Die Folge ($C_1, C_2,.., C_n$) mit C_n=Y nennt man einen „**syntaktischen Beweis**“ von Y aus Σ.

Das eben definierte Beweisverfahren heißt "***syntaktisch***", weil darin die Wahrheitswerte "*wahr*" (1) / "*falsch*" (0) ***nicht erwähnt werden***. Es operiert nur mit Zeichenreihen. Es ist zudem immer "***endlich***", weil es aus einer *endlichen* Folge 1, 2, …, n von Beweisschritten zu bestehen hat. Das Regelsystem **SR** heißt (wie schon erwähnt) "**korrekt**", wenn für *jedes* Paar Σ,Y, für welches $\Sigma \vdash_{SR} Y$ gilt, auch stets $\Sigma \models Y$ gilt, d.h. wenn jede aus Σ mit den Regeln von **SR** herleitbare Aussage auch *semantisch* aus Σ folgt.

Umgekehrte Frage: Kann es sein, dass ein Aussagesymbol Y aus einer gegebenen endlichen Aussagesymbol-Menge Σ zwar semantisch folgt ($\Sigma \models Y$), dass aber Y aus Σ mit den Regeln **SR** nicht herleitbar ist (d.h. dass $\Sigma \vdash_{SR} Y$ nicht möglich ist)? -- Die Frage führt auf folgende Definition:

Def. semantische Vollständigkeit: Ein System **SR** von Herleitungsregeln zur Kunstsprache **P** heißt **semantisch vollständig** (oder *semantisch adäquat*), wenn für jede endliche Aussagesymbolmenge Σ und jedes einzlne Aussagesymbol Y gilt: Folgt Y semantisch aus der Menge Σ von Aussagesymbolen ($\Sigma \models Y$), so ist Y mit den Regeln **SR** auch syntaktisch aus Σ herleitbar ($\Sigma \vdash_{SR} Y$).

Der semantische Folgebegriff ist also dann und nur dann logisch gleichwertig mit dem syntaktischen Beweisbegriff, wenn man ein endliches System **SR** von Herleitungsregeln hat, das sowohl *korrekt* als auch *semantisch vollständig* ist (im Sinne der obigen Definitionen).

Frage: Wie konstruiert man eigentlich ein korrektes Herleitungssystem **SR** mit nicht zu vielen Herleitungsregeln, so dass **SR** möglichst sogar semantisch vollständig ist? – Wir orientieren uns am Beispiel des *modus ponens*: Dort wurde die Tautologie $(X \wedge (X \Rightarrow Y)) \Rightarrow Y$ dazu benutzt. Allgemein benutzt man Tautologien, um eine korrekte Herleitungsregel zu erstellen. Das ist Thema des nächsten Unterkapitels.

5.4.4.4 Axiomatisierbarkeit der Aussagenlogik

Frage: Gibt es für die Aussagenlogik ein endliches System **SR** von Herleitungsregeln, das sowohl *korrekt* als auch *semantisch vollständig* ist? -- Die Antwort ist: ***ja.***

Um das zu verstehen, müssen wir ein bisschen aushohlen:

In der Mathematik *definiert* man ein mathematisches Teilgebiet (eine "Theorie" oder "Struktur") oft durch eine endliche Menge **Ax = {A_1, …, A_n}** von sog. "**Axiomen**" und leitet daraus mit einem geeigneten *korrekten* System **SR** von Ableitungsregeln weitere Aussagen ("Theoreme") dieser "Theorie" ab. Da **SR** korrekt zu sein hat, sind diese abgeleiteten Theoreme "*wahr*" für ***alle*** Belegungen β, *für welche die Axiome "wahr" sind.*

Beispiele für axiomatisch definierte mathematische Theorien sind: die ***Gruppentheorie*** (das ist eine Struktur, die in vielen anderen Strukturen als Teilstruktur auftritt); die Theorie der ***Natürlichen Zahlen*** (auch "Arithmetik" genannt); die ***Galois-Theorie*** (= die Theorie endlicher "Körper"; das sind Strukturen, die mit derjeneigen der Rationalen Zahlen verwandt, aber auf eine endliche "Zahlenmenge" beschränkt sind); die ***Verbandstheorie*** (das ist einerseits eine Verallgemeinerung der algebraischen Struktur der Mengenlehre,

andererseits eine spezielle Ordnungsstruktur. Die Verbandstheorie spielt u.a. eine fundamentale Rolle für die mathematische Formalisierung von dem, was man einen "Begriff" nennen kann; dazu später, Kap.7); … u.v.a.m.

Die Sprache der Aussagenlogik reicht dazu meist nicht aus. Eine sog. "***Prädikatenlogik***" ist meist besser geeignet. (Dazu später, Kap.6.)

Welche mathematischen Teilgebiete in dieser Weise – und wenn ja, in welcher "Logik"? – überhaupt axiomatisierbar sind, ist eine andere Frage, deren Beantwortung hier zu weit führen würde.

• Die Axiomatisierungs-Methode versuchen wir einmal, auf die ***Aussagenlogik selbst*** anzuwenden. Ziel einer solchen Axiomatisierung ist es, ausgehend von ein paar wenigen ***Tautologien*** als den "Axiomen", *alle* Tautologien der Aussagenlogik herzuleiten.

Dazu gibt es viele unterschiedliche Möglichkeiten. Wir stellen eine davon vor: Wie wir bereits wissen, kann man, wenn es "nur" um logische Äquivalenzen geht, statt in der Sprache **P** der Aussagenlogik auch einfach auf der Struktur (**B**, *, •, +, →, ↔) des 2-elemenigen Bewertungsbereichs **B**={1, 0} (*Boole-Verband* aus 2 Elementen) "rechnen".

Dabei genügt es, eine der Funktionsbasen {*, •} oder {*, +} oder auch {*, →} herzunehmen, weil diese alle drei ***vollständige*** Funktionsbasen auf **B** sind: die jeweils anderen logisch relevanten Operatoren kann man durch die gewählte Funktionsbasis ausdrücken. In der **vollständigen Funktionsbasis {*, →}** gelten, wie man leicht ausrechnet für beliebige $x,y,z \in \mathbf{B}=\{\underline{1}, \underline{0}\}$ die drei Gleichungen

(A) $x \to (y \to x) = \underline{1}$, $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = \underline{1}$, $(y^* \to x^*) \to ((y^* \to x) \to y) = \underline{1}$.

Eine nicht ganz so triviale Tatsache ist nun, dass man nur mit dem "***modus ponens***"

$$\frac{x,\ x \to y}{y}$$

($x,y \in \mathbf{B}$) als einziger Herleitungsregel umgkehrt beweisen kann, dass diese drei Gleichungen tatsächlich die Struktur ($\mathbf{B}=\{1, \underline{0}\}$, *, •, +, →, ↔) des Bewertngsbereichs **B** der 2-wertigen Aussagenlogik ***charakterisieren***. Dazu muss man natürlich vorher die in (A) nicht auftretenden Operatoren •, +, ↔ als „Abkürzungen“ durch * und → so definieren:

(B) $x \bullet y := (x \to y^*)^*$, $x+y := (x^* \to y)^*$, $x \leftrightarrow y := ((x \to y) \to (y \to x)^*)^*$

Übertragen in die Terminologie der Aussagenlogik heißt das: Man gehe aus von den drei Zeichenreihen-Schemata und nenne sie "Axiome"

A1: $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$
A2: $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$
A3: $(\neg Y \Rightarrow \neg X) \Rightarrow ((\neg Y \Rightarrow X) \Rightarrow Y)$

Darin kommen nur die vier festen Zeichen $\Rightarrow$, $\neg$,), (, sowie drei Platzhalter X, Y, Z vor. Fasst man darin $\neg$ als Verneinung und $\Rightarrow$ als den wenn-dann-Junktor und X,Y,Z als Variablen für beliebige Aussagesymbole auf (das darf man, weil alle drei Formen ja **Tautologien** sind), so kann man aus diesen drei Axiomen nur mit Hilfe der "*modus ponens*" Regel

$$\frac{F,\ F \Rightarrow G}{G}$$

($F, G \in \mathbf{P}$) durch geschickte Substitutionen *alle Tautologien* der Aussagenlogik herleiten, wobei man natürlich die zu (B) analogen logischen Abkürzungen für die in A1, A2, A3 nicht auftretenden Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$ benutzen darf. (Dies sei ohne Beweis mitgeteilt.)

In diesem Sinne ist die Aussagenlogik ***korrekt*** und ***vollständig***.

5.4.4.5 Wichtige Fragen an die Axiomatik

Im vorigen Kap. hatten wir angedeutet, dass Mathematiker eine Theorie (eine mathematische Struktur), die sie für eventuelle Anwendungen anbieten, oft durch ein System **Ax** = $\{A_1,\ldots,A_n\}$ von ein paar möglichst wenigen Grundaussagen ("Axiomen"), ***definieren*** und daraus mit einem geeigneten *korrekten* Herleitungssystem **SR** möglichst viele Theoreme ("Sätze") dieser Theorie ableiten. Mindestens die folgenden Fragen stellt man an ein Paar (**Ax, SR**), bestehend aus einem Axiomensystem und einem System von Herleitungsregeln: Ist es ***widerspruchsfrei***? Ist es ***vollständig***? Ist es ***unabhängig***? Diese Begriffe müssen exakt definiert werden.

Def.(a): (**Ax, SR**) heißt **widerspruchsfrei** (oder "*konsistent*"), wenn *nicht jede* in der Sprache von **Ax** formulierbare Aussage aus **Ax** mit Hilfe von **SR** herhergeleitet werden kann; insbesondere, wenn eine Aussage der Form $A \wedge \neg A$ (Widerspruch in sich) aus **Ax**

nicht hergeleitet werden kann; oder wenn für ein A *nicht* zugleich A und ¬A aus **Ax** hergeleitet werden kann.

Def.(b): (**Ax, SR**) heißt **unabhängig**, wenn für jedes Axiom A_i aus **Ax** gilt, dass es *nicht* aus den anderen Axiomen von **Ax** hergeleitet werden kann.

Def.(c): (**Ax, SR**) heißt **maximal-konsistent**, wenn für jede (in der Sprache von **Ax** formuierbare) Aussage X, die *nicht* mit **SR** aus **Ax** hergeleitet werden kann, gilt: (**Ax**∪{X}, **SR**) ist *widerspruchsvoll* (*"inkonsistent"*).

Def.(d): (**Ax, SR**) heißt **syntaktisch vollständig**, wenn für jede in der Sprache von **Ax** formulierbare Aussage X gilt: wenigstens eine der beiden Aussagen, X oder ¬X, kann mit **SR** aus **Ax** hergeleitet werden.

Anmerkungen:

1) Die ***Widerspruchsfreiheit*** (a) ist die wichtigste Eingenschaft, die ein logisch brauchbares System **(Ax, SR)** haben muss. Manchmal sieht man nicht auf den ersten Blick, ob das Axiomensystem **Ax** selbst widerspruchsfrei ist. Findet man jedoch eine Aussage A, die aus **Ax** hergeleitet ist ($\mathbf{Ax} \vdash_{SR} A$), aber einem der Axiome von **Ax** widerspricht (d.h. es gilt $\mathbf{Ax} \models \neg A$), so ist das System **(Ax, SR)** unbrauchbar.

2) Die ***Unabhängigkeit*** (b) der Axiome von **Ax** wird in der Regel angestrebt. Sie unterstützt zudem die Frage nach der *Widerspruchsfreiheit*, denn wenn die Axiome unter einander unabhängig sind, können sie sich untereinander auch nicht widersprechen.

3) Viele sehr nützliche Systme sind *nicht* ***maximal-konsistent*** (c) und trotzdem sehr brauchbar. Zum Beispiel ist die später auf S.99 vorgestellte allgemeine Gruppentheorie (G, e, ○; G**Ax**) *nicht* maximal konsistent: Z.B. kann die Eigenschaft der Kommutativität, $x \circ y = y \circ x$ für alle $x,y \in$ **G**, *nicht* aus G**Ax** hergeleitet werden; nimmt man sie als neues Axiom hinzu, so bekommt man dieTheorie der *kommutativen* Gruppen.

4) Die ***syntaktische Vollständigkeit*** (d) darf nicht verwechselt werden mit der *semantischen Vollständigkeit* (vgl. die Def. auf S.84). Historisch spielte in der mathematischen Grundlagenforschung, Mitte des 20.Jh., die Frage nach der *syntaktischen Vollständigkeit* eine große Rolle. Bis Anfang der 1930-er Jahre glaubte man, dass das durch die *Peano*-Axiome charakterisierte System der **Natürlichen Zahlen** (die sog. "***Arithmetik***") – eines der wichtigsten Systeme für die gesamte Mathematik – syntaktisch vollständig sei. Der berühmte deutsche Mathematiker ***David Hilbert*** (1863-1943) hatte dazu ein *korrektes* (auf dem "*modus ponens*" basierendes) Herleitungssystem angegeben.

David Hilbert (1863-1943)

1929 bewies der österreichische Logiker ***Kurt Gödel*** (1906-1978) sogar, dass die Arithmetik *semantisch vollständig* ist (d.h. jeder Satz über natürliche Zahlen, welcher "wahr" ist, unter der Voraussetzung, dass die *Peano*-Axiome als "wahr" akzeptiert werden, kann mit dem *Hilbert*schen Herleitungssystem in endlich vielen Schritten *bewiesen* werden). 1931 jedoch bewies *Gödel*, dass die ***Artihmetik***, zusammen mit dem *Hilbert*schen Herleitungssystem ***nicht syntaktisch vollständig*** *ist,* d.h. es gibt Sätze F über die natürlichen Zahlen, bei denen weder F noch ¬F mit dem Hilbertschen Herleitungssystem beweisbar ist.

Kurt Gödel (1906-1978)

Anmerkung: Ein *widerspruchsvolles* System **(Ax, SR)** ist natürlich *syntaktisch vollständig*, denn in ihm kann man ja für jedes formulierbare X sowohl X als auch ¬X herleiten.

5.4.5 Eine grundsätzliche Anmerkung

• Nicht-Mathematiker – insbesondere einige Philosophen – fragen oft, ob eine mathematische Theorie ***wahr*** sei, und meinen damit, ob sie *"der Realität entspreche"* (was das auch immer heißen mag). Dazu folgende Anmerkungen:

1) Die in der modernen Mathematik entwickelten Theorien sind zwar oft motiviert durch Anwendungen aus der "Realität", aber sie bieten nur ***Strukturen*** an, die in der "Realität" ***interpretiert*** und dann in ihr auch ***getestet*** werden müssen, wenn man sie (z.B. in der Physik oder anderen Naturwissenschaften) anwenden will.

2) Mathmatische "Axiome" zum Beispiel sind ***nicht*** "wahr" in einem metaphysischen Sinne, sondern sie sind (sofern wider-

spruchsfrei) schlicht in sich konsistente ***Definitionen*** einer mathematischen Struktur.

3) Macht man neue Erfahrungen aus der "Realität" (d.i. schlicht ein außermathematisches Anwendungsgebiet), die zu den bislang angenommenen Strukturen nicht mehr "***passen***", so muss die mathematische Theorie angepasst werden – oder ihr Akzeptanzbereich / Interpretationsbereich muss eingeschränkt werden. Im schlimmsten Fall muss sie "weggeworfen" und durch eine "bessere" Theorie ersetzt werden. (Dagegen gibt es oft menschlich bedingte Widerstände, besonders, wenn sich die Theorie bislang bewährt hat und sozusagen zu einem „Glaubenssystem“ geworden ist. Der Mensch ist ein Gewohnheitstier!)

4) Das ist ein ***iterativer, dynamischer Prozess*** der Wissenschaften, ***der nie abbricht***, solange es Menschen auf der Erde gibt. Daher ist die Frage, ob eine mathematische Theorie

"*wahr*" in einem metaphysischen Sinne sei (unabhängig von unserem derzeitigen Wissensstand über die "Realität"), eigentlich ***eine naive, wenn nicht gar unsinnige Frage,*** die übersieht, dass es in den Wissenschaften zugeht wie bei allem auf der Welt: ***Alles kann sich ändern, nichts ist ewig, nur die Zeiträume, in denen sich etwas ändert, können verschieden groß sein*** *(etwa von milliardstel Sekunden bis Milliarden von Jahren)****.*** Aber Änderungen mag der Mensch nicht; daher erfindet er Metaphysiken und Glaubenssysteme.

5) Zum konsistenen Weiterentwickeln unseres Wissens muss man allerdings in jeder Zeitepoche von ein paar (noch nicht widerlegten, aber stets als ***vorläufig*** anzusehenden) "Wissenskonstanten" ausgehen, die u.a. von derzeit akzeptierten konsistenten mathematischen Theorien gestützt werden können.

6) Die Frage aber nach der "*absoluten Wahrheit*" von mathematischen Theorien stammt vom griechischen Philosophen ***Platon*** (ca. 428-348 vC), der hinter der "Realität der Dinge" das ewige Reich der unveränderlichen "Ideen" annahm. Diese Frage ist also kulturhistorisch bedingt und gehört m.E. ***nicht*** in die moderne Mathematik, sondern in eine gewisse *Metaphysik*, die sich (besonders im Westen) seit zwei einhalb Tausend Jahren breit gemacht hat, und dem viele bedeutende Leute – auch Wissenschaftler – sogar heute noch anhängen.

(Sie wurde u.a. auch für die Zementierung der christlichen Dogmatik ausgenutzt. Bereits von *Platons* Schüler ***Aristoteles*** wurde die platonische Ideenwelt übrigens ***nicht*** mehr vertreten.)

6 Prädikatenlogik

6.1 Vorbemerkung

• Die Aussagenlogik ist für viele Bereiche, insbesondere für die Mathematik, "zu grob". Die moderne Prädikatenlogik formalisiert die ***innere Struktur*** der Aussagesätze, die ja von *Subjekten*, *Objekten* und *Prädikaten* und ihren *Beziehungen* handeln.

Die in der Mathematik untersuchten Strukturen haben oft die Form **(Ob, C, Fk, Rel; Ax),** d.i.: eine Menge **Ob** von Grundobjekten und deren Platzhalter /"Variablen" (eventuell eingeteilt in mehrere Objektsorten); eine (meist kleine) Teilmenge **C⊆Ob** von "Konstanten", das sind strukturell besonders ausgezeichnete Objekte aus **Ob**; eine Menge **Fk** von 1- oder mehrstelligen Funktionen auf **Ob**, eine Menge **Rel** von 1-, 2- oder mehrstelligen Relationen auf **Ob**; eine endliche Menge **Ax** von "Axiomen" (Grundaussagen) über Beziehungen zwischen **Ob, C, Fk** und **Rel**.

In den Mengen **C, Fk, Rel** werden üblicherweise nur solche Elemente erwähnt, die schon in den Axiomen (**Ax**) erwähnt werden. Aus **Ax** leitet man mit Hilfe von **C, Fk, Rel** oft weitere Funktionen und Relationen ab, die in den Grundmengen **Fk**, **Rel** noch nicht erwähnt waren.

Beispiel-1: Die sehr viel (in anderen Strukturen) gebrauchte sog. *"Gruppenstruktur"* (**G**, e, ○; G**Ax**). **Ob** ist hier die Menge **G** der Gruppenelemente, **C** besteht nur aus einem Element e, dem sog. "neutralen Element". **Fk** besteht nur aus einer 2-stelligen Verknüpfung ○ auf **G**. **Rel** wird zunächst leer gelassen. G**Ax** beinhaltet die Gruppenaxiome

A1: ○: **G**×**G**→**G** ist eine 2-stellige, *assoziative* Verknüpfungung, d.h. mit x,y∈**G** ist auch x○y ∈**G**, und (x○y)○z = x○(y○z) für alle x,y,z∈**G.**

A2: In **G** gibt es ein Element e mit e○x=x für alle x∈**G;** e heißt das "neutrale Element" der Gruppenstruktur.

A3: Zu jeden x∈**G** gibt es ein x'∈**G** mit x'○x=e; x' heißt ein "inverses Element" zu x.

Aus **A1, A2, A3** leitet man unmittelbar für alle x∈**G** ab, dass das neutrale Element e eindeutig bestimmt ist, dass auch x○e=x gilt, dass das Inverse zu x eindeutig bestimmt ist und dass auch x○x' =e gilt. Damit ergibt sich eine 1-stellige Funktion $\ldots^{-1}$: **G**→**G**, mit x^{-1} :=x', die sog. *Inversenbildung*, die im Tripel (**G**, e, ○) nicht erwähnt zu werden braucht.

Beispiel-2: Die Struktur der *Natürlichen Zahlen* (**N**, 0, σ, **+**, •; P**Ax**). **Ob** ist die Menge **N** der nat. Zahlen. **K** besteht aus der besonderen nat. Zahl 0. **Fk** besteht aus der (1-stelligen) Nachfolgerfunktion σ (z.B. ist σ(0) =1 d.h. 1 ist Nachfolger von 0; oder: σ(15) =16), sowie der (2-stelligen) Addition **+** und der Multiplikation •. **Rel** kann zunächst leer gelassen werden; aus den anderen Strukturelementen werden aber später viele für natürliche Zahlen relevante Relationen definiert. P**Ax** sind die *Peano*-Axiome über die natürlichen Zahlen (*Guiseppe Peano*, 1858-1932, italienischer Matemtiker). Wir schreiben sie erst später im Detail auf, um hier nicht zu sehr abzuschweifen.

Wir wollen aber auch ein außermathematisches Beispiel geben:

Beispiel-3: *"Peter geht am 1.Juni 2012 mit seinem Hund im Stadtpark von Darmstadt spazieren"* ist ein Satz aus einem gewissen Text (KONTEXT).

In diesem Satz gehören "*Peter*", "*1.Juni 2012*", "*Hund*", "Stadtp*ark von Darmstadt*" zu den Objekten (**Ob**); man kann sie (je nach Kontext) in unterschiedliche Sorten aufteilen: "*Peter*" gehört dann offensichtlich zu einer anderen Objektsorte als "*1.Juni 2012*". Die restlichen Worte "*… geht am … mit … im … spazieren*" fasst man als eine 4-sellige Relation auf, das ist dann ein Element aus **Rel**. Kürzt man sie mit "***geht_spazieren***" ab, so

kann man den Satz etwas formaler darstellen in der Form

geht_spazieren (Peter, 1.Juni 2012, sein Hund, Stadtpark von Darmstadt).

Wird diese Relation noch öfters im betrachteten KONTEXT benutzt, so ist sie ggf. mit anderen vier Objekten bestückt, z.B.

geht_spazieren (Hans, 2.Juli 2012, sein Hund, Einkaufszentrum von Mannheim)

allgemein: ***geht_spazieren*** (p, d, t, o) (p eine Person, d ein Datum, t ein zu p gehöriges Tier, o ein Ort).

Ob z.B. "*Peter*" daneben auch als eine besondere "Konstante" (**C**) aufzufassen sei, hängt vom KONTEXT ab, aus dem man den Beispielsatz entnommen hat. Dreht es sich z.B. um den Lebenslauf der Person "*Peter*", so darf man diesen Namen wohl als eine in der Textstruktur auszuzeichende "Konstante" bezeichnen. Elemente aus **Fk** kommen in dem Beispielsatz nicht vor. Was "Axiome" (**Ax**) in diesem Zusammenhang sein sollen, ist hier völlig offen: Falls der Beispielsatz eine grundlegende Bedeutung im KONTEXT (etwa eines Romans mit der Hauptperson *Peter*) haben sollte, so könnte es sein, dass man diesen Satz als ein "Axiom" auffassen darf. – Aber das ist eher scherzhaft gemeint: Gegen die rigorosen Einteilungen aus der Mathematik wird sich sowohl ein Schriftsteller als auch der Romanleser mit Recht heftig wehren! Mit Beispiel-3 will ich nur andeuten, dass die (nun zu entwickelnde) Prädikatenlogik in der Tat (mit Einschränkungen) auch bei der Formalisierung außermathematischer Sachverhalte oder Kontexte Anwendung findet,

besonders wenn es sich um technisches oder wissenschaftliches "***Wissen***" handelt; -- und davon macht die ***Informatik*** kräftig Gebrauch.

6.2 Kalkül der 2-wertigen Prädikatenlogik 1. Stufe

Wie in der Aussagenlogik unterscheidet man zwischen *Syntax-Schema* (formaler Aufbau eines künstlichen Sprachvorrats) und *Semantik-Schema* (Deutung / Interpretation in einer Anwendung).

Was der Zusatz **"1. Stufe"** bedeuten soll, kann erst erläutert werden, nachdem wir die sogenannten "*Quantoren*" eingeführt haben.

6.2.1 Syntax-Schema der Prädikatenlogik 1. Stufe

6.2.1.1 Das Alphabet

Die Sprache der Prädikatenlogik wird (wie die der Aussagenlogik) formal aus einem besonderen **Alphabet** aufgebaut. Das Alphabet besteht aus ***endlich oder höchstens abzählbar vielen*** Zeichen. In ihm wollen wir zwischen zwei Zeichenarten unterscheiden:
AlphPL = **LPL** ∪ **SPL.**

LPL := Oz ∪ J ∪ Qz ∪ Gz ∪ Kz heiße der "**rein logische**" Zeichenvorrat, er besteht aus:

* Einer höchstens abzählbaren Menge **Oz** von sog. **Objektzeichen**, die wir mit x, y, z, … notieren. Diese Notationen nennt man auch einfach "**Variablen**" (Platzhalter).
* Menge **J** der schon bekannten Junktorenzeichen ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔.
* Menge **Qz** aus zwei sog. **Quantorenzeichen** ∀, ∃. Die kommen hier neu hinzu! Sie sind ***keine*** Junktorenzeichen! Sie werden nur zusammen mit **Objektzeichen** x∈ **Oz** in der Form "∀x: …" bzw. "∃x: …" verwendet. Spachlich liest man "∀x: …" wie *"für alle x gilt …"* / oder auch *„für jedes x gilt…“*, bzw. "∃x: …" wie *"es gibt x, so dass gilt …"* oder auch *„für einige x gilt …“* oder auch *„für wenigstens ein x gilt…“ .* Daher heißt ∀ auch der "*Allquantor*" (oder „Generalisator“) und ∃ der "*Existenzquantor*" (oder „Partikularisator“).
* Menge **Gz** bestehend aus nur einem Zeichen ≡ , das sog. logische **Gleichheitszeichen**. Es wird nur zwischen sog. "Termen" gesetzt (siehe gleich). Es ist ausdrücklich vom metasprachlich benutzten Gleichheitszeichen = zu unterscheiden!
* Menge **Kz** bestehend aus den beiden schon bekannten Klammerzeichen „)“, „(“ sowie dem Trennzeichen "**:**", das bei sog. "Quantoren" (siehe gleich) verwendet wird.

SPL := Rz∪Fz∪Cz heiße der Vorrat der "**speziellen Zeichen**". Diese Zeichen gehören nicht zu den rein logischen Zeichen; sie sind bei Anwendung als spezielle Strukturelemente zu deuten. **SPL** besteht aus:

* Menge **Rz** der sog. **Relationszeichen**, die wir mit P, R, S, … notieren. Man nennt sie auch "**Prädikatzeichen**". Hinter diese darf man sog. Terme (siehe unten) setzen. Jedem Relationszeichen P wird eindeutig eine natürliche Zahl n_P beigeordnet, die sog. "**Stelligkeit**" von P. Sie gibt an, vieviele Terme man hinter P schreiben darf. Ist z.B. $n_P = 2$, so darf man mit irgendwelchen Variablen x,y,z ∈ **Oz** zum Beispiel die Zeichenreihen Pxy oder Pxx bilden, nicht aber Px, oder Pxyz.
* Menge **Fz** der **Funktionszeichen**, die wir mit f, g, h, … notieren. Hinter diese darf man sog. Terme (siehe unten) setzen. Jedem Funktionszeichen f wird eindeutig eine natürliche Zahl n_f beigeordnet, die sog. "**Stelligkeit**" von f. Sie gibt an, mit wievielen Termen f kombiniert werden darf. Ist z.B. $n_f = 2$, so darf man mit irgendwelchen Variablen x,y,z∈ **Oz** zum Beispiel die Zeichenreihen fxy oder fxx bilden, nicht aber fx, oder fxyz.
* Menge **Cz** der sog. "**Konstantenzeichen**". Diese werden in einer „*Deutung*“ (siehe unten) als bestimmte *Objekte* interpretiert; man unterscheidet sie von den o.a. Variablen (Platzhaltern)**,** [– so wie man z.B. bei den Zahlen etwa das Assoziativgesetz

"(x+y)+z ≡ x+(y+z)" unterscheidet von einer Ausrechnung (10+3)+5 ≡ 10+(3+5) ≡ 18. 10, 3, 5 sind "Zahlen" („Individuen“); x,y,z sind dagegen ***Variablen*** (Namen für Zahlen-Platzhalter). An den Stellen, an denen *Variablen* stehen, dürfen in der Anwendung stets, ***Konstanten*** – also hier in Beispiel: betimmte Zahlen – einsetzt werden.]

Alle drei Zeichenmengen **Pz, Fz, Cz** sollen ***endliche*** oder ***höchstens abzählbare*** Mächtigkeit haben und wohlunterschieden untereinander sein. Der hier aufgeschriebene Vorrat **SPL** für die speziellen Zeichen ist ein *"maximaler"* Vorrat. Bei vielen Anwendungen schöpft man ihn gar nicht voll aus. Zum Beispiel kann man bei nicht-mathematischen Anwendungen die Menge **Fz** der Funktionszeichen oft ganz weglassen.

6.2.1.2 Terme

Mit Hilfe des Begriffs "Term" formalisiert man, wie mit *Funktionen* umzugehen ist, durch *endlich*-fache Anwendung folgender Regeln.

Def. Term (*rekursive* Defintion):

1) Jedes Objektzeichen ("Variable") und jedes Konstantenzeichen ist ein **Term**.
2) Ist f ein n-stelliges Funktionszeichen (n=1, 2, 3,...), und sind $t_1,\ldots,t_n$ **Terme**, so ist die Zeichenreihe $ft_1\ldots t_n$ ein **Term**.

Klammern und Kommata braucht man zur Termdefinition nicht, da Funktionszeichen, Objektzeichen und Konstantenzeichen wohl unterscheidbar zu codieren sind, und Funktionszeichen je eine vorgegebene Stelligkeit haben.
Beispiel: Sind f ein 1-stelliges, g ein 2-stelliges Funktionszeichen, und ist x eine Variable, c eine Konstante, so ist gcfx ein zulässiger **Term**. Die "Funktionsschachtelung" sieht man aber besser mit Klammern und Kommata: der Term gcfx schreibt sich dann g(c, f(x)), d.h. im ersten Argument der Funktion g steht die Konstante c, im zweiten Argument von g steht der Term f(x), welcher als Wert der Funktion f bei Anwendung auf das Objekt x zu verstehen ist.

6.2.1.3 PL1-Ausdrücke

Nun bauen wir aus dem Alphabet **AlphPL** = **LPL** ∪ **SPL** und mit Hilfe der Term-Definition die formale Sprache **PL1** der *Prädikatenlogik 1. Stufe* nach bestimmten Regeln auf. Die Elemente von **PL1** ersetzen das, was die Aussagesymbole in der Sprache der Aussagenlogik sind, wir nennen sie "**PL1-Ausdrücke**" oder einfach

"Ausdrücke"; diese werden nun durch ***endlich***-fache Anwendung folgender Regeln definiert.

Def. PL1 (rekursive Definition):

1) Sind s, t Terme, so sei $s \underline{=} t$ ein **PL1-Ausdruck.** Beachte: Die beiden Zeichenreihen „$s \underline{=} t$“ und „$t \underline{=} s$“ müssen zunächst wohl unterschieden werden!
2) Für jedes $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ gelte: Ist P ein n-stelliges Relationszeichen, und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so Ist $Pt_1 \ldots t_n$ ein **PL1-Ausdruck**.
3) Sind F, G **PL1-Ausdrücke**, so sind auch $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, $(F \Leftrightarrow G)$ **PL1-Ausdrücke**.
4) Ist x eine **Variable** (ein Objektzeichen) und F ein **PL1-Ausdruck**, so sind auch die Zeichenreihen $\forall x{:}F$ und $\exists x{:}G$ **PL1-Ausdrücke**.

Anmerkung-1: Die Ausdrücke der Form 1) oder 2) nennt man **Elementarausdrücke** oder Primformeln oder Atome. Die Ausdrücke der Form 3) oder 4) nennt man **zusammengesetzte** Ausdrücke; sie sind aus Elementarausdrücken zusammengesetzt.

Anmerkung-2: Die mit den Quantorenzeichen gebildeten Klauseln "$\forall x$:" und "$\exists x$:" heißen **Quantoren**. Quantoren allein sind *weder* Junktoren *noch* PL1-Ausdrücke! **Beachte**, dass

in ∀x: und ∃x:, dass x stets nur eine ***Variable*** (Objektzeichen), aber weder eine Konstante noch irgendein Term sein darf, in dem Konstanten oder Funktionszeichen vorkommen!

Anmerkung-3: ∀x:G ist zu lesen als: "Für alle x gilt G" (oder "Für jedes x gilt G"). ∃x:G ist zu lesen als: "Es gibt ein x, so dass G". In diesen Ausdrücken sollte das x hinter dem Quantorzeichen etwas zu tun haben mit einer Variable x, die im Ausdruck G vorkommt. In der Regel 4) der PL1-Definition ist das Vorkommen von x in G aber gar nicht explizit gefordert: das x in ∀x: bzw ∃x: muss gar nicht in G als Variable vorkommen! Die Frage, wie das zu verstehen sei, wird in der folgenden Definition geklärt.

Def. frei / gebunden: In den Ausdrücken ∀x:F , ∃x:F heißt die Variable x *durch den Quantor* **gebunden**. Kommt im Ausdruck F die Variable x vor, aber kein Quantor ∀x: oder ∃x:, so heißt x **frei** in F. Kommt im Ausdruck F die Variable x **frei** vor, so schreiben wir statt F auch "F(…x…)", um das sichtbar zu machen. Kommt im Ausdruck F die Variable x entweder *nur* gebunden oder *überhaupt nicht* vor, so darf man statt ∀x:F bzw. ∃x:F einfach F schreiben. Beispiel: Sei P ein 1-stelliges Relationszeichen; statt ∀x:Py darf man einfach Py, statt ∃y:∀x:Py einfach ∃y:Py schreiben, wenn x, y verschiedene Variable sind. Natürlich darf man aber z.B. in ∀x:Px den Quantor *nicht* weglassen, denn x ist in Px *frei*, aber in ∀x:Px oder in ∃x:Px *gebunden*!

Ein PL1-Ausdruck G heißt **geschlossen**, wenn alle in G vorkommenden Variablen *gebunden* sind.

Anmerkung-4: ***Beachte die Klammern!*** Sei x eine Variable und P, Q seien 1-stellige Relationszeichen. Die Ausdrücke F:=∀x:(Px ∧Qx) und G:=(∀x:Px ∧Qx) sind nach den Klammerregeln der o.a. PL1-Definition ***korrekt*** gebildete, aber unterschiedliche Zeichenreihen: In F kommt die Variable x nur gebunden vor. In G kommt die Variable x *sowohl* gebunden (nämlich im Teil ∀x:Px) *als auch* frei (nämlich im Teil Qx) vor. Aber der Ausdruck ∀x:Px ∧Qx ist ***unkorrekt*** gebildet, denn man weiß hier nicht, welcher der obigen Ausdrücke F oder G gemeint ist; ein Klammerpaar fehlt!

Anmerkung-5: ***Vereinbarung***. Da es beim Lesen eines korrekt gebildeten Ausdrucks, in dem x ***sowohl*** frei ***als auch*** gebunden vorkommt, zu Leseschwierigkeiten kommt, wollen wir im Folgenden stets davon ausgehen, dass die betrachteten korrekten Ausdrücke alle „***sauber***“ sind, d.h. dass in ihnen eine Variable x entweder *gar nicht* oder nur *frei* oder nur *gebunden* vorkommt. Dass ***jeder*** PL1-Ausdruck in einen äquivalenten *sauberen* umgewandelt werden kann, ist ein Substitutionssatz der Prädikatenlogik, der zur *Semantik* der PL1 gehört (siehe Kab.6.2.2 u. Kap.6.3); wir werden darauf in dieser Einführung aber nicht weiter eingehen, noch diesen Substitutionssatz beweisen.

6.2.1.4 Ein paar Formalisierungsbeispiele

Die Kunstsprache **PL1** deckt natürlich ***nicht alle*** Ausdrucksmöglichkeiten ab, die man in einer natürlichen Umgangssprache hat. Daher gibt es meist mehrere Möglichkeiten bei der Richtung

Umgangssprache ➔ PL1-Formalisierung.

Manchmal hat man den Eindruck, diese Übersetzungsrichtung sei gar nicht möglich oder nicht sinnvoll. Es kommt stets auf ***den KONTEXT und den Zweck*** an, für den man formalisiert.

Formalisierungsbeispiele: [Zur besseren Lesbarkeit benutze ich mehr Klammern als notwendig. Beachte! Bei der *Formalisierung* kommt es noch überhaupt nicht darauf an, ob die gefundenen Ausdrücke als „wahr“ oder als „falsch“ zu bewerten seien; sie sollen nur syntaktisch korrekt sein. Im folgenden Beispiel fordern wir, dass die folgenden Aussagen in ***geschlossene*** PL1-Ausdrücke übersetzt werden sollen, d.h. alle vorkommenden Variablen seien *gebunden*.]

(a) *„Jeder Meeressäuger ist ein Wirbeltier“* ➔ $\forall x: (Ms(x) \Rightarrow Wt(x))$.

(b) *„Manche Wirbeltiere sind keine Meeressäuger“* ➔ $\exists x: (Wt(x) \wedge \neg Ms(x))$.

(c) *„Meerestiere, die keine Raubtiere sind, ernähren sich meist nicht von Raubtieren, sondern von Pflanzen“* ➔ $\forall x: [(Mt(x) \wedge \neg Rt(x)) \Rightarrow \exists y: (\neg Rt(y) \wedge Pfl(y) \wedge ernä(x,y))]$

(d) Diskutiere, ob die zu (a), (b), (c) angegebenen Formalisierungen passen, bzw. ob auch andere passen würden.

Aufgabe: Versuche, den folgenden Text zu formalisieren:

„Viele Tiere haben vier Beine. Manche Tiere haben mehr als vier Beine. Menschen haben zwei Beine und zwei Arme, wenn ihnen keine Gliedmaßen fehlen. Bei Menschen nennt man zwei ihrer Gliedmaßen Arme. Menschen zählt man zu den Wirbeltieren. Unser Kater Goofy ist ein Wirbeltier. Jedes Wirbeltier ist ein Tier. Alle gesunden Wirbeltiere haben vier Beine. Der Kopf bei Wirbeltieren zählt nicht zu den Gliedmaßen. Hat ein Tier nur drei Gliedmaßen, so nennt man es versehrt – vorausgesetzt, dass es ein Wirbeltier ist. Ein versehrtes Wirbeltier muss aber nicht weniger als vier Gliedmaßen haben. Ein unversehrtes Tier, das keine Gliedmaßen hat, ist entweder kein Wirbeltier oder eine Schlange oder eine Schleiche. Es gibt keine Schlangen, die mehr als null Gliedmaßen haben. Einige Flossen von Fischen zählt man auch zu den Gliedmaßen. Einige Meereswirbeltiere haben Flossen als Gliedmaßen, obwohl sie keine Fische sind.“

Führe dazu einige Objektvariablen x, y, z, …, Anzahlfunktionen (z.B. b(x) := „Anzahl der Beine von x“) und Prädikate (z.B. Tier(x) := „x ist ein Tier“, Schla(x) := „x ist eine Schlange“, „x ist gesund“ := ges(x) usw…) ein und unterscheide zwischen Objektvariablen und „Konstanten“ (z.B. ist *Goofy* eine Objektkonstante) . Benutze auch die Quantorenzeichen ∃ und ∀ und unterscheide zwischen „offenen“ Sätzen (diese enthalten **freie** Objektvariablen) und „geschlossenen“ Sätzen (in letzteren sind alle auftretenden Objektvariablen gebunden). Als Endergebnis der Formalisierung sollten alle Sätze des formalisierten Textes **geschlossene** Sätze sein.

6.2.1.5 … von erster Stufe

Hier ist nun auch der Ort, wo wir sagen können, was Prädikatenlogik von **„1. Stufe“** heißen soll: Die Quantorenzeichen werden nur auf die „***Variablen***“, also die ***Objektzeichen*** aus **Oz**, angewendet; ***nicht aber*** auf Konstanten-, Funktions- und Relationszeichen.

In der Prädikatenlogik 1. Stufe ist es zum Beispiel nicht möglich, das Prinzip der Mathematischen Induktion der *Natürlichen Zahlen* (d.i. die unendliche Menge **N**={1, 2, 3,…}) als nur ***einen*** ***geschlossenen*** **PL1-Ausdruck** zu formulieren. Das ***Prinzip der mathemati-***

schen Induktion (kurz: *"Schluss von k auf k+1"* genannt) kann man in der (über **PL1** liegenden) Metasprache, zum Beispiel für 1-stellige Relationen, so formulieren:

> *"Für **jede** auf **N** definierbare 1-stellige Relation P:*
> *Gilt P(0), und kann für beliebige k∈**N** aus der Annahme P(k) abgeleitet werden, dass P(k+1),*
> *so gilt P(n) für **alle** natürlichen Zahlen n."*

Formal würde man das aber so abkürzen müssen:

$$\forall P: [P(0) \wedge \forall k: (P(k) \Rightarrow P(k+1)) \Rightarrow \forall n: P(n)],$$

Da die Formulierung mit "∀P:…" beginnt, aber P kein Objektzeichen, sondern ein *Relationszeichen* ist, ist diese Formulierung ***kein*** PL1-Ausdruck. Das Prinzip der mathematischen Induktion kann man also in der Sprache **PL1** ***nicht*** durch *einen einzigen geschlossenen* PL1-Ausdruck ausdrücken. Die Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe ***reicht also nicht aus***, um die Gesamtstruktur der natürlichen Zahlen, von der das Prinzip der mathematischen Induktion ein wesentlicher Teil ist, in wenigen PL1-Sätzen zu formulieren. Das geht erst in der Sprache **PL2** der sog. *Prädikatenlogik 2. Stufe*. In **PL2** ist es erlaubt, die Quantorenzeichen ∀, ∃ auch auf Funktions- und Relationszeichen anzuwen-

den. **PL1** reicht aber für die meisten praktischen Anwendungen aus, muss aber oft ***meta-sprachlich*** ergänzt werden.

Anmerkung: Ganz so schlimm steht es mit **PL1** bei Anwendung auf die Definition der *natürlichen Zahlen* auch wieder nicht: Für viele Zwecke reicht es aus, das Prinzip der mathematischen Induktion nur für ein paar ***spezielle*** (schon in den anderen Axiomen erwähnte) Prädikate oder Funktionen, z.B. für $f_{add}(x,y) := x+y$ oder $f_{mult}(x,y) := x \bullet y$, aufzustellen. Dann formuliert sich das Prinzip der mathematischen Induktion in wenigen zulässigen PL1-Ausdrücken, und man braucht gar keine „unzulässigen“ PL2-Quantoren wie „∀f:“ oder „∀P:“. Für weitere in der Sprache der Axiome wohldefinierte Funktionen und Relationen über den natürlichen Zahlen kann man die Gültigkeit des Prinzips der mathematischen Induktion dann aus den Axiomen ***hertleiten.*** [Zu „*herleiten*“ vgl. den Begriff des „*syntaktischen Beweises*“,S.83.]

6.2.2 Semantik-Schema der Prädikatenlogik 1. Stufe

Eine Übersetzung

Umgangssprachetext ➔ *PL1*

haben wir „Formalisierung“ genannt. Die umgekehrte Überset-

zungsrichtung

PL1 ➔ Umgangssprache

wollen wir eine „Deutung“ oder „Interpretation“ nennen. Die im Syntax-Schema definierte Sprache PL1 stellt nur einen Symbolvorrat dar, der in Anwendungsstrukturen interpretiert werden muss. Im Semantik-Schema stelle ich den Vorgang einer "Interpretation" wiederum recht formal dar durch Definition der Begriffe "*Anwendungsstruktur*", "*Anwendung*" und "*Belegung*":

Def.Anwendungsstruktur: Eine Anwendungsstruktur **(Uni, Funk, Prä)**, besteht aus einer Menge **Uni** von „**Objekten**“ der Erfahrung (man sagt auch „Universum“ zu **Uni**), einer Menge **Funk** von **Funktionen** auf **Uni** und einer Menge **Prä** von **Relationen** auf **Uni** (auch "Prädikate" genannt). Jede Funktion bzw. Relation hat eine *Stelligkeit* (d.i. die Anzahl der Argumente der Funktion bzw. der Relation). Eine n-stel-

lige Funktion $\varphi \in$ **Funk** ist eine Abbildung φ**: Uni**$^n \rightarrow$**Uni**. Eine m-stellige Relation $\rho \in$ **Prä** ist eine Abbildung ρ**: Uni**$^m \rightarrow$**B**, wobei **B** = {1, 0} der (schon bekannte) **Bewertungsbereich** der 2-wertigen Logik ist.

Für $\varphi(a_1,..,a_n)=b$ sagt man: "das Objekt b ist der Wert der Funktion φ an der Stelle $(a_1,..,a_n)$. Für $\rho(a_1,..,a_m) = \underline{1}$ sagt man: *"das Objekt-m-Tupel* $(a_1,..,a_m)$ *steht in der Relation* ρ*".* Falls $\rho(a_1,..,a_m) = \underline{0}$, sagt man: „$(a_1,..,a_m)$ *steht nicht in der Relation* ρ*".* Oft bezeichnet man als m-stellige Relation statt ρ auch einfach die Teilmenge $R_\rho \subseteq$ **Uni**^{m}, die durch $R_\rho := \{(a_1,..,a_m) \in$ **Uni**^{m} $|\ \rho(a_1,..,a_m) = \underline{1}\}$ definiert ist.
Beispiel von S.101: ρ:= ***geht_spazieren***; dort ist ρ 4-stellig. Ist "***geht_spazieren*** (Peter, 1.Juni 2012, sein Hund, Stadtpark von Darmstadt)" gleich 1 gesetzt, so heißt das: es trifft zu, dass Peter am 1.Juni 2012 mit seinem Hund im Stadtpark von Darmstadt spazieren geht. Mit der zu ρ:= ***geht_spazieren*** gehörigen Menge R_ρ drückt sich das dann aus durch (Peter, 1.Juni 2012, sein Hund, Stadtpark von Darmstadt) $\in R_\rho$.

Def. Anwendung: Sei Σ eine ***endliche*** Menge von PL1-Ausdrükken. Cz(Σ), Fz(Σ), Rel(Σ), seien die Mengen der in den Ausdrücken

vom Σ vorkommenden Konstantenzeichen, Funktionszeichen und Relationszeichen. Eine „**Anwendung**“ von Σ in der Anwendungsstruktur **(Uni, Funk, Prä, B)** ist eine Abbildung

$$\pi: Cz(\Sigma) \cup Fz(\Sigma) \cup Pz(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Uni} \cup \mathbf{Funk} \cup \mathbf{Prä}.$$

π ordnet jedem Konstantenzeichen c von $Cz(\Sigma)$ ein Objekt πc aus **Uni**, jedem n-stelligen Funktionszeichen f von $Fz(\Sigma)$ eine n-stellige Funktion πf aus **Funk**, jedem m-stelligen Relationszeichen P von $Pz(\Sigma)$ eine m-stellige Relation πP aus **Prä** zu.

Anmerkung: Findet man zu Σ so eine Abbildung π, so sagt man, dass die Anwendungsstruktur (Uni, Funk, Prä, B) auf die Menge Σ „**passt**“.Die Anwendungsabbildung π muss nicht surjektiv sein, d.h. es kann z.B. Objekte aus **Uni** geben, auf die kein Konstantenzeichen $c \in Cz(\Sigma)$ abgebildet wird. Das ist insbesondere der Fall, wenn die Menge **Uni** mächtiger ist als die Menge $Cz(\Sigma)$.

Def.Elementarbelegung (rekursiveDefinition)**:** Ist Oz(Σ) die Menge der in Σ vorkommenden Objektzeichen ("Variablen"), und π eine zu Σ passende Anwendungsabbildung, so heißt irgendeine Abbildung β°: Oz(Σ)→**Uni** eine „zu Σ passende **Elementarbelegung**“. β° setzen wir wie folgt zu einer gleichbezeichneten Abbildung β°:T(Σ)→**Uni** fort, wobei T(Σ) die Menge der in Σ vorkommenden **Terme** ist. ***Rekursive*** Definition:

(1) Ist f ein n-stelliges Funktionszeichen aus Fz(Σ), und sind $x_1,..,x_n$ n Variablen aus Oz(Σ) (d.h. $fx_1..x_n \in T(\Sigma)$ ein Term), so sei $\beta^{\circ}(fx_1 \ldots x_n) := \pi f(\beta^{\circ}(x_1),..,\beta^{\circ}(x_n))$.

(2) Sind $t_1,..,t_n$ Terme aus T(Σ), so sei $\beta^{\circ}(ft_1 \ldots t_n) := \pi f\ (\beta^{\circ}(t_1),..,\beta^{\circ}(t_n))$.

Beachte, dass hier in der Prädikatenlogik „Elementarbelegung“ nicht – wie in der Aussagenlogik – eine Abbildung von Elementaraussagezeichen, sondern eine von ***Objektzeichen*** ("Variablen") bzw. ***Termen*** ist.

Def. Deutung: Passt π auf Σ, so heißt das Tripel $(\gamma, \pi, \beta°)$ eine „**Deutung**“ ("Interpretation") der Ausdrucksmenge Σ in der Anwendungsstruktur (Uni, Funk, Prä). Dabei ist

γ: $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \rightarrow \{*, \bullet, +, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

die schon bekannte bijektive Junktorenabblidung.

Aus jeder Elementarbelegung $\beta°$ leiten wir rekursiv eine Belegung $\beta : \Sigma \rightarrow \mathbf{B}$ der PL1-Ausdrücke von Σ in den Bewertungsbereich $\mathbf{B}=\{\underline{1}, \underline{0}\}$ ab.

Def. Belegung (rekursive Definition):

(1) Sind t_1, t_2 Terme, und $\underline{=}$ das objektsprachliche "Gleichheitszeichen", so sei

$\beta(t_1 \underline{=} t_2)$:= $\underline{1}$, falls $\beta°(t_1) = \beta°(t_2)$
:= $\underline{0}$, andernfalls.

(Das ist die Deutung des objektsprachlichen "$\underline{=}$" mit Hilfe des metasprachlichen "=". Damit ist „$\underline{=}$“ stets als ein spezielles *Äquivalenz-Relationszeichen* aufzufassen.)

(2) Ist P ein n-stelliges Relationszeichen in Pz(Σ) und sind t_1, .., t_n Terme in T(Σ), so sei
$\beta(Pt_1 \ldots t_n) := \pi P(\beta(t_1),\ldots,\beta(t_n))$, also
= $\underline{1}$, falls das Objekttupel $(\beta(t_1),\ldots,\beta(t_n))$ in der Relation πP steht,
= $\underline{0}$, andernfalls.
Soweit β für die Elementarausdrücke; nun für die zusammengesetzten Ausdrücke:

(3) Ist F ein PL1-Ausdruck von Σ, so sei
$\beta(\neg F) := [\beta(F)]^*$ (Der Junktor ¬ geht dabei durch γ in den Operator * auf **B** über.)

(4) Sind F, G Ausdrücke in Σ, so sei (gemäß den Extensionalitsprinzip)
$\beta(F \wedge G) := \beta(F) \bullet \beta(G)$, $\beta(F \vee G) := \beta(F) + \beta(G)$, $\beta(F \Rightarrow G) := \beta(F) \rightarrow \beta(G)$,
$\beta(F \Leftrightarrow G) := \beta(F) \leftrightarrow \beta(G)$. (Die Junktoren ∧, ∨, ⇒, ⇔ gehen dabei durch γ auf die Operatoren •, +, →, ↔ auf **B** über.)

(5) Ist F(…x…) ein Ausdruck in Σ, in dem x ***frei*** vorkommt, so sei
$\beta(\exists x{:}F(\ldots x\ldots)) := \beta_{u/x}(F(\ldots x\ldots))$ für ***wenigstens ein*** u∈ **Uni.**

(6) Ist F(…x…) ein Ausdruck in Σ, in dem x ***frei*** vorkommt, so sei
$\beta(\forall x{:}F(\ldots x\ldots)) := \beta_{u/x}(F(\ldots x\ldots))$ für ***alle*** u∈ **Uni**.

Anmerkung: In (5) und (6) wird eine zu β gehörige "*Ausnahmebelegung*" $\beta_{u/x}$ bentzt; sie ist so definert: Sei F ein PL1-Ausdruck, in dem y **frei** vorkommt, und sei $\pi F \in$ **Prä** die Re-

lation, auf welche F durch die Anwendungsabbildung π abgebildet wird; dann gelte:

$\beta_{u/x}$ (F(…y…)) := β(F), falls $\neg$(y$\underline{=}$x) zutrifft, d.h. falls β(y$\underline{=}$x)=$\underline{0}$,
:= πF(…u…), falls y$\underline{=}$x zutrifft, d.h. falls β(y$\underline{=}$x)=$\underline{1}$

Damit ist die zur Elementarbelegung $\beta°$:Oz(Σ)$\rightarrow$**Uni** gehörige Belegung β:$\Sigma\rightarrow$**B** vollständig definiert. Auch das Tripel (γ, π, β) [β statt $\beta°$genommen] heißt eine **Deutung** ("Interpretation") der PL1-Ausdrucksmenge Σ in der Anwendungsstruktur (Uni, Funk, Prä). Die Junktorenabbildung ist bei jeder Deutung dieselbe; daher können wir auch einfach das Paar (π, β) eine "Deutung" nennen. Bei logischen Untersuchungen in einer bestimmten Anwendungsstruktur (Uni, Funk, Prä) hält man oft die Anwendungsabbildung π fest und variiert nur die Elementarbelegungen $\beta°$und die damit definierten Belegungen β.

6.2.3 Das Sortenproblem

Die formale Sprache **PL1** der Prädikatenlogik 1. Stufe stellt nur ***einen*** Konstantenzeichenbereich **Cz** – und, dazugehörig, nur *einen* Variablenbereich **Oz** – zur Verfügung. Das sogenannte "***Sortenproblem***" besteht darin, dass man in Anwendungsstrukturen oft nicht nur eine sondern mehrere Sorten von Objekten hat und dementsprechend auch mehrere Variablentypen haben will. Zur Lösung gibt es z.B die beiden folgenden Methoden.

(a) Will man z.B. zwei verschiedene Objektsorten S1, S2, so nehme man aus dem PL1-Vorrat zwei 1-stellige Relationszeichen S_1, S_2 und interpretiere die Ausdrücke so: S_1x := *„x ist von der Sorte S1“*, S_2y := *„y ist von der Sorte S2“*. Als Mengen kann man die beiden Objektsorten dann so schreiben: $\pi S1 := \{a \in Uni \mid \pi S_1(a)\}$, $\pi S2 := \{b \in Uni \mid \pi S_2(b)\}$. $\pi S1$ bzw. $\pi S2$ kann man dann auch als Definitionsbereiche unterschiedlicher Funktionen πf_1, πf_2 nehmen.

(b) Die zweite Methode zur Lösung des "*Sortenproblems*" besprechen wir zunächst am Beispiel **von 1-stelligen Funktionen**. In einer Anwendungsabbildung π, die $Cz(\Sigma)$ in einen Objektbereich **Uni** abbildet, heißt das, dass jedes 1-stellige Funktionssymbol f abzubilden wäre auf eine sog. ***totale*** 1-stellige Funktion πf: **Uni**$\rightarrow$**Uni**. Oft ist aber mit πf gar keine totale, sondern eine nur ***partielle*** Funktion gemeint, d.h. sie hat ggf. einen kleineren Definitionsbereich $D_{\pi f} \subset$ **Uni** und ist außerhalb $D_{\pi f}$ gar nicht definiert. Die Definitionsbereiche $D_{\pi f}$, $D_{\pi g}$, … unterschiedlicher Funktionen πf , πg, … sind gegebenenfalls zu interpretieren als ***unterschiedliche Objektsorten.*** Diesem Mangel kann man jedoch leicht abhelfen, indem man ein einziges ***Dummy-Objekt*** **d** auf **Uni** bereit hält, das in keinem der Definitionsbereiche $D_{\pi f}$, $D_{\pi g}$, … vorkommt. Man erweitert dann einfach jede Funktion πf so: Ist $u \notin D_{\pi f}$, $u \in$ **Uni**, so setze man $\pi f(u)$:= **d.** Damit hat man πf "künstlich" zu einer totalen Funktion gemacht. Entsprechend verfährt man mit mehrstelligen Funktionen,

z.B. einer 2-stelligen Funktion πh: $D1_{\pi h} \times D2_{\pi h} \rightarrow$ **Uni**, für welche $D1_{\pi h} \times D2_{\pi h}$ mit $D1_{\pi h} \subset$ **Uni**, $D2_{\pi h} \subset$**Uni** der Definitionsbereich ist; usw…. So kann man die oben definierte Sprache **PL1** der Prädikatenlogik 1. Stufe ohne weiteres auf Strukturen mit mehreren Objektsorten anwenden.

Beispiel-1: Sei $\Re$ die Menge der reellen Zahlen und ***inv***(x) := 1/x der Divisionsoperator ("Inversenbildung"). Dieser ist bekanntlich *nicht definiert* für x=0. Der Definitionsbereich für ***inv***(..) ist $\Re\backslash\{0\}$ ("$\Re$ ohne 0"). Nimmt man aber das nicht zu $\Re$ gehörige Dummy-Element ∞ hinzu und setzt ***inv***(0) =1/0 := ∞, so ist der neue Definitionsbereich von ***inv***(..) ganz $\Re$**,** und der Wertebereich ist $\Re \cup \{\infty\}$.

Beispiel-2: Die Struktur (**P**, **G**, $\underline{i}$, $\underline{v}$, $\underline{s}$; PG**Ax**) definiere – je nach Wahl der Axiome PG**Ax** – eine gewisse "**Geometrie**". Darin sind: **P, G** zwei zueinander fremde Objektsorten: die sog. "Punktmenge" **P** und die sog. "Geradenmenge" **G**; sowie $\underline{i}$:**P**×**G** →**B**={$\underline{1}$, $\underline{0}$} eine Relation mit $\underline{i}$(p,g) gelesen als *"Punkt p liegt auf der Gerade g"*; eine nur *partielle* Funktion $\underline{v}$:$D_{\underline{v}} \rightarrow$ **G** mit $D_{\underline{v}} \subset$**P**×**P,** wobei $\underline{v}$(p,q)=g gelesen wird als *"Punkt p verbunden mit Punkt q ergibt die Gerade g"* und eine ebenfalls nur *partielle* Funktion $\underline{s}$:$D_{\underline{s}} \rightarrow$**P** mit $D_{\underline{s}} \subset$**G**×**G**, wobei $\underline{s}$(g,h)=p gelesen wird als *"Gerade g geschnitten mit Gerade h ergibt den Punkt p".* Offensichtlich gibt es hier zwei unterschiedliche Sorten von Objekten, nämlich die "Punkte" (Menge **P**) und die "Geraden" (Menge **G**). Außerdem fordert die Vorstellung von "Geo-

metrie", dass zumindest $\underline{v}(p,p)$ bzw. $\underline{s}(g,g)$ ***nicht definiert*** sind (für alle $p \in$ **P** bzw. für alle $g \in$ **G**). Setzt man **Uni := P∪G∪{d}** mit dem weder zu **P** noch zu **G** gehörigen Dummy-Element **d**, so kann man u.a. $\underline{v}(p,p) := \underline{s}(g,g) :=$ **d** setzen und $\underline{v}$, $\underline{s}$ zu *totalen* Funktionen auf **Uni** machen. Dieser Trick gestattet, formal die Sprache **PL1** anzuwenden.

6.3 Metasprachliches zur Prädikatenlogik 1. Stufe

In der Aussagenlogik haben wir bereits vieles zum Metasprachlichen gesagt, was erst recht für die Prädikantenlogik relevant ist. Wir können das in **Kap.5.4.3** Gesagte für PL1 übernehmen, wenn wir die elementaren PL1-Ausdrücke der Formen

$t \equiv s$ (t, s beliebige Terme),

$Pt_1 \ldots t_n$ (P ein beliebiges n-stelliges Relationszeichen, $t_1, \ldots t_n$ Terme, n =1, 2, 3, …)

wie "Elementaraussagezeichen" (EA-Zeichen) und alle daraus zusammengesetzten PL1-Ausdrücke wie "Aussagesymbole" behan-

deln. Die **Belegungen** β der PL1 spielen dieselbe Rolle wie die gleichbenannten Belegungen der Aussagenlogik: sie bilden Aussagesymbole bzw. PL1-Ausdrücke in den Bereich **B**={$\underline{1}$, $\underline{0}$} der beiden Wahrheitswerte ab. Nur die "*Elementarbelegungen*" $\beta°$spielen in der PL1 eine andere Rolle, weil sie in der Aussagenlogik EA-Zeichen nach **B**, in der PL1 aber Objektzeichen ("Variablen") nach **Uni** (dem Objektbereich einer Anwendungsstruktur) abbilden.

6.3.1 Modelle, Äquivalenzen und Tautologien

Wir formulieren diese metasprachlichen Begriffe noch einmal kurz für die Sprache **PL1**.

Sei Σ eine *endliche* Menge von PL1-Ausdrücken. Eine Deutung (π,β) von Σ in eine Anwendungsstruktur (Uni, Funk, Prä) heißt zu Σ **passend**, wenn π alle in den PL1-Ausdrücken von Σ vorkommenden Konstantenzeichen, Funktionszeichen bzw. Relationszeichen auf gewisse Objekte ("Konstanten") in **Uni**, Funktionen in **Funk** bzw. Relationen

in **Prä** abbilden kann, so das für jede Belegung β die auf S.117/118 definierten Regeln nicht verletzt werden. (π, β) heißt ein **Modell** für Σ wenn $\beta(X)=\underline{1}$ gilt für ***alle*** $X\in\Sigma$. Zwei PL1-Ausdrücke X, Y heißen **äquivalent**, in Zeichen $X\cong Y$, wenn $\beta(X)=\beta(Y)$ gilt für ***alle*** zu $\{X, Y\}$ passenden Deutungen (π, β)[1]. Ein PL1-Ausdruck T heißt *allgemeingültig* oder eine **Tautologie**, wenn in ***allen*** zu T passenden Deutungen gilt: $\beta(T)=\underline{1}$. Ein PL1-Ausdruck A heißt dagegen **unerfüllbar** oder eine **Antilogie**, wenn es ***keine*** zu A passende Deutung (π, β) gibt. Wie in der Ausagenlogik gilt auch in der Prädikatemlogik 1. Stufe: Ein PL1-Ausdruck A ist genau dann *unerfüllbar*, wenn $\neg A$ eine *Tautologie* ist.

---

[1] Anmerkung: In der analytischen Philosophe wurde im 20.Jh. der Terminus „Sachverhalt“ eingeführt. Man könnte auch formal definieren, was ein „**Sachverhalt**“ sei: Sei $O:=\{x_1,..,x_n\}$ eine Menge von Objektvariablen, A(O) die Menge aller PL1-Ausdrücke, in denen genau die $x_1,..,x_n$ als **freie** Variablen vorkommen. Zu gegebenem $X\in A(O)$ bilden wir die Klasse $[X] := \{Y\in A(O) \mid Y\cong X\}$ ($\cong$ die oben eingeführte logische Äquivalenzrelation). [X] kann man dann eine **Sachverhaltsform** auf A(O) nennen. Die Relation $\cong$ ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf A(O), die A(O) in disjunkte Klassen, also Sachverhaltsformen zerlegt. Bei einer Deutung (π, β°) von $\Sigma:= A(O)$ erhält man daraus zu jedem $X\in A(O)$ einen **Sachverhalt** $[\beta X]$. Zur genaueren Definition für „Sachverhalt“ ist der von *Church* u. *Kleene* erfundene ***„Lambda-Kalkül“*** geeignet (vgl. zur Orientierung etwa [Wiki_Lamda]).

Wegen der Quantoren kommen – neben den in **Kap.5.4.4.1** genannten logischen Äquivalenzen – noch folgende Äquivalenzen hinzu: Seien F, G, H PL1-Ausdrücke, dann gilt:

$\exists x{:}F \cong \neg\forall x{:}\ \neg F$, $\forall x{:}F \cong \neg\exists x{:}\neg F$,
$(\forall x{:}F)\wedge(\forall x{:}G) \cong \forall x{:}(F\wedge G)$, $(\exists x{:}F)\vee(\exists x{:}G) \cong \exists x{:}(F\vee G)$,
$\forall x{:}\forall y{:}F \cong \forall y{:}\forall x{:}F$, $\exists x{:}\exists y{:}F \cong \exists y{:}\exists x{:}F$,
$(\forall x{:}F)\wedge H \cong \forall x{:}(F\wedge H)$, vorausgesetzt, dass H die Variable x *nicht* enthält!
$(\forall x{:}F)\vee H \cong \forall x{:}(F\vee H)$, vorausgesetzt, dass H die Variable x *nicht* enthält!
$(\exists x{:}F)\wedge H \cong \exists x{:}(F\wedge H)$, vorausgesetzt, dass H die Variable x *nicht* enthält!
$(\exists x{:}F)\vee H \cong \exists x{:}(F\vee H)$, vorausgesetzt, dass H die Variable x *nicht* enthält!

Beachte: $\exists x{:}\forall y{:}F$ ist i.allg. ***nicht*** äquivalent zu $\forall y{:}\exists x{:}F$. Praktisch heißt das, dass man ***Existenz- und Allquantor nicht einfach vertauschen darf***.

Gegenbeispiel: x,y seien zwei Variablen, P sei ein 2-stelliges Relationszeichen, und F:=Pxy. Eine dazu *passende* Anwendung π ist z.B. folgende: **Uni** sei die Menge {0, 1, 2,…,9} der ersten zehn natürlichen Zahlen, und πP sei die Kleiner-Gleich-Relation bei Zahlen, also $\pi P(x, y) := x \leq y$.

- Dann ist $\exists$**x:**$\forall$**y:F** so zu interpretieren: *"Es gibt eine nat. Zahl x aus {0, 1, 2,…,9}, so*

dass für alle y aus {0, 1, 2,…,9} gilt: x≤y". Für x:=0 bekommt der Ausdruck die Bewertung 1 (wahr) bei beliebigem y aus {0, 1, 2,…,9}; für alle x aus {1, 2, …,9} aber die Bewertung 0 (falsch).

• Aber ∀**y:**∃**x:F** ist so zu interpretieren*: "Zu jeder nat. Zahl y aus {0, 1, 2,…,9} gibt es eine Zahl x aus {0, 1, 2,…,9}, so dass gilt: x≤y".* Für y=0 erfüllt nur x=0 die Bedingung; für y=1 erfüllen die x aus {0, 1} die Bedingung, für y=2 die x aus {0, 1, 2} die Bedingung; usw…; für y=9 erfüllen alle x aus {0, 1, 2,…,9} die Bedingung.

➔ Geht man alle 10^2 Elementarbelegungen β° der beiden Variablen durch, so bekommen die Ausdrücke ∃x:∀y:F, ∀y:∃x:F *nicht* immer dieselbe Bewertung. Sie sind also *nicht logisch äquivalent!* ➔ Die *Reihenfolge* der Quantoren ∃x: , ∀y: ist i. allg. wichtig!

6.3.2 Semantische Folgerelation und Beweisbegriff

Auch hier können wir das in Kap.5.4.4.3 über die Aussagenlogik Gesagte fast wörtlich übernehmen.

Sei Σ eine endliche Menge von PL1-Ausdrücken und Y ein einzelner PL1-Ausdruck.

Man sagt ***"Y folgt semantisch aus Σ",*** in Zeichen: **Σ ⊨ Y**, wenn ***jedes*** Modell von Σ auch Modell von Y ist, d.h. wenn für jede Deutung (π, β) mit β(X)=1 für alle X∈Σ auch β(Y)=1

gilt. Ist Σ ein-elementig, $\Sigma=\{X\}$, und folgt Y semantisch aus {X}, so schreibt man auch einfach "$X \models Y$".

Ist T eine Tautologie, so schreibt man $\emptyset \models T$ oder einfach $\models T$, denn mit einer Tautologie T gilt $\Sigma \models T$ für *jede beliebige* endliche Menge Σ von PL1-Ausdrücken.

Der Zusammenhang der semantischen Folgerelation $\models$ mit den **Tautologien** ist auf der metasprachlichen Ebene einfach, wenn eine ***endliche*** Menge $\Sigma := \{X_1,\ldots,X_n\}$ vorliegt.

Es gilt: $\{X1,\ldots,Xn\} \models Y$ genau dann, wenn $\models ((X1\wedge\ldots\wedge Xn)\Rightarrow Y)$, und das ist genau dann der Fall, wenn $((X1\wedge\ldots\wedge Xn)\Rightarrow Y)$ eine **Tautologie** ist. Speziell gilt: $X \models Y$ genau dann wenn $\models (X\Rightarrow Y)$, also wenn $(X\Rightarrow Y)$ eine **Tautologie** ist.

• Die Definition der semantischen Folgerelation $\models$ sagt überhaupt nichts darüber aus, wie man ***zeigen*** ("beweisen" / "herleiten") könnte, dass aus einer Menge $\{X_1,\ldots,X_n\}$ von Ausdrücken der Ausdruck Y "folgt". Dazu bildet man formal die Art und Weise nach, wie Mathematiker etwas "beweisen".

Zunächst braucht man ein endliches System **SR** von "**Ableitungsregeln**" („Deduktionsregeln“), die angeben, wie man von einer gegebenen endlichen Menge $\Sigma = \{X_1,\ldots,X_n\}$ von (gesetzten oder schon bewiesenen) Prämissen zu einem neuen Ausdruck Y übergehen darf. Die bekannteste Ableitungsregel stammt von ***Aristoteles*** und heißt lat.

"***modus (poniendo) ponens***". Sie besagt, dass man von $\{X, (X \Rightarrow Y)\}$ nach Y übergehen darf. Sie wird üblicherweise wie nebenstehend notiert. ➔

$$\frac{X,\ (X \Rightarrow Y)}{Y}$$

In Zeilenschreibweise schreibt man dafür "$\{X, (X \Rightarrow Y)\} \vdash Y$"

Allgemein schreibt man eine Regel, die von n Prämissen $X_1, \ldots, X_n$ nach Y überzugehen gestattet, in der nebenstehenden Form auf. ➔

$$\frac{X_1,\ \ldots\ ,\ X_n}{Y}$$

In Zeilenschreibweise schreibt man dafür "$\{X_1,\ldots,X_n\} \vdash Y$".

Der "*modus ponens*" rechtfertigt sich dadurch, dass der PL1-Ausdruck $((X \wedge (X \Rightarrow Y)) \Rightarrow Y)$ eine ***Tautologie*** ist. Daraus ergibt sich, dass Y auch semantisch aus $\{X, (X \Rightarrow Y)\}$ folgt, d.h. dass $\{X, (X \Rightarrow Y)\} \models Y$ gilt. Für jede Ableitungsregel ist es natürlich notendig, dass mit ihr aus etwas "Wahrem" auch etwas "Wahres" abgeleitet wird, damit sie nicht in Widerspruch zur semantischen Folgerelation gerät. Man sagt:

Def. semantische Korrektheit: Ein System **SR** von Ableitungsregeln heißt **semantisch korrekt**, wenn aus $\Sigma \vdash_{SR} Y$ stets auch $\Sigma \models Y$ folgt.

Der *modus ponens* ist nicht die einzige korrekte Ableitungsregel. Etwas allgemeiner: Ist $(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) \Rightarrow Y$ eine Tautologie, so ist $\{X_1, \ldots, Xn\} \vdash Y$ eine korrekte Herleitungsregel. Wir wollen sie hier nicht alle aufzählen. Alle Regeln von **SR** zusammen ergeben das, was

man den "**syntaktischen Beweisbegriff**" nennt. Wir geben hier nur die allgemeine Definition.

Def. syntaktischer Beweis: Sei Σ eine endliche Menge von Ausdrücken und Y ein einzelner Ausdruck. Sei ferner **SR** ein endliches System von **Regeln**, die angeben, ob und wie man „von Σ nach Y übergehen“ darf. Man sagt: ***„Y ist mit SR aus Σ herleitbar (ableitbar / beweisbar)“,*** in Zeichen: $\boldsymbol{\Sigma \vdash_{SR} Y}$**,** wenn es eine ***endliche*** Folge $C_1, C_2, ..., C_n$ von Ausdrücken gibt, an deren Ende Y steht (C_n=Y), derart dass für jedes $i \in \{1, ..,n\}$ eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

(1) $C_i \in \Sigma$ bzw.
(2) C_i entsteht durch Anwendung der Regeln von **SR** aus einer Teilmenge von $\{C_1,..,C_{i-1}\}$.

Die Folge $(C_1,C_2,..,C_n)$ mit C_n:=Y nennt man einen „**syntaktischen Beweis**“ von Y aus Σ.

Die eben definierte Beweisart heißt "***syntaktisch***", weil darin die Wahrheitswerte "*wahr*" (1) / "*falsch*" (0) ***nicht erwähnt werden***. Man operiert ja nur mit Zeichenreihen! Ein "syntaktischer Beweis" ist zudem immer "***endlich***", weil er aus einer *endlichen* Folge 1, 2, …, n von Beweisschritten zu bestehen hat. Das Regelsystem **SR** heißt (wie schon erwähnt) "**korrekt**", wenn für ***jedes*** Paar Σ,Y, für welches $\Sigma \vdash_{SR} Y$ gilt, auch stets $\Sigma \models Y$ gilt,

d.h. wenn jede aus Σ mit den Regeln von **SR** herleitbare Aussage auch *semantisch* aus Σ folgt.

Die vier wichtigen Begriffe zu axiomatisierbaren Theorien **(Ax, SR)** -- (a) ***Widerspruchsfreiheit***, (b) ***Unabhängigkeit*** der Axiome, (c) ***maximale Konstenz***, (d) ***syntaktische Vollständigkeit*** -- entnehmen wir aus Def.(a)-(d) auf S.91/92 auch für die PL1. Wir brauchen nur "*Aussagesymbol*" durch "*PL1-Ausdruck*" zu ersetzen.

6.3.3 Ein paar wichtige Sätze zur Prädikatenlogik 1. Stufe

Wir stellen abschließend ein paar wichtige Sätze zur Prädikatenlogik 1. Stufe zusammen (ohne einen Beweis anzugeben, aber mit Erläuerung ihrer Bedeutung. Sie sind teilweise schon im vorangegangenen Text ausgesprochen worden).

• **Satz 1:** Die Prädikatenlogik 1. Stufe umfasst voll die in **Kap.3** vorgestellte aristotelische **Syllogistik** (die alte "Begriffslogik"). Wir brauchen nur die „Begriffe“ X in 1-stellige Prädikate X(x) umzuwandel. Dann lauten die vier Urteilsformen [vgl. S. 23] folgendermaßen:

(A)	**(alle) X sind Y:**	$\forall x: (X(x) \Rightarrow Y(x))$	allgemein bejahendes Urteil,
(E)	**kein X ist (ein) Y:**	$\forall x: \neg(X(x) \wedge Y(x))$	allgemein verneinendes Urteil,

(I)	**einige X sind Y**	$\exists x: (X(x) \wedge Y(x))$	partikulär bejahendes Urteil,
(O)	**einige X sind keine Y**	$\exists x: (X(x) \wedge \neg Y(x))$	partikulär verneinendes Urteil.

Aber die Prädikatenlogik 1. Stufe ist weit mächtiger als diese, denn sie gestattet z.B. nicht nur 1-stellige Prädikate, sondern Prädikate beliebiger endlicher Stelligkeit.

• **Satz 2:** Die Prädikatenlogik 1. Stufe ist, zusammen mit dem von *David Hilbert* angegebenen endlichen System **SR** von Herleitungsregeln, ***korrekt*** und ***semantisch vollständig*** in folgendem Sinne: Für jede endliche Menge Σ von PL1-Ausdrücken und jeden einzelnen PL1-Ausdruck Y gilt:

Y folgt semantisch aus Σ (in Zeichen $\Sigma \models Y$) ***genau dann, wenn*** Y aus Σ mit SR herleitbar (in Zeichen $\Sigma \vdash_{SR} Y$) ist. [Gödel, 1929].

Kurz: $\Sigma \models Y$ ***genau dann, wenn*** $\Sigma \vdash_{SR} Y$.

D.h. umgekehrt: Folgt Y nicht semantisch aus Σ, so ist Y mit Hilfe von **SR** auch nicht aus Σ herleitbar; und: Ist Y aus Σ mit SR nicht herleitbar, so folgt Y auch nicht semantisch aus Σ. Nimmt man als Σ insbesondere die PL1-Ausdrucksmenge Σ_{PA} die Peano-Axiome (siehe unten), so ist speziell das System (Σ_{PA}, SR) *korrekt* und *semantisch vollständig*.

Anmerkung zur "syntaktischen Vollständigkeit": Diese darf nicht mit "Semantischer Vollständigkeit" verwechselt werden! Natürlich gibt es in PL1 formalisierbare, konsistente Systeme (Σ, SR), die ***nicht*** syntaktisch vollständig sind – sonst müsste, bei gegebener

endlicher konsistenter Axiomenmenge Σ von jedem PL1-Ausdruck Y in jedem solchen System entscheidbar sein, ob entweder Y oder $\neg$Y aus Σ herleitbar ist. Wir brauchen nur ein Gegenbeispiel anzugeben: Betrachten wir den Ausdruck F:= $\exists x{:}\forall y(y \underline{=} x)$. Dieser gilt genau in den ziemlich uninteressanten "Anwendungsstrukturen" mit nur 1-elementiger Objektmenge, **Uni={a}**. Da F nicht in allen passenden Anwendungsstrukturen gilt, kann F nicht allgemein herleitbar sein. Und da $\neg$F nicht allgemeingültig ist, ist $\neg$F auch nicht herleitbar. Auch die allg. Gruppentheorie (G, e, °, G**Ax**) mit dem einzigen außerlogischen Funktionszeichen $\circ$ ist nicht syntaktisch vollständig, weil z.B. die Kommutativität F:= $\forall x{:}$ $(x\circ y \underline{=} y\circ x)$ aus den Gruppenaxiomen Σ:= G**Ax** (vgl. S.98) nicht herleitbar ist und daher weder F noch $\neg$F semantisch aus G**Ax** folgt. Die Frage nach "syntaktischer Vollständigkeit" wird erst interessant für solche endlichen Ausdrucksmengen Σ ("Axiome"), die eine hinreichend "***reichhaltige***" Struktur definieren. Ein Standardbeispiel für eine "reichhaltige" Struktur ist die sog. ***Arithmetik***, d.i. das auf den *Peano-Axiomen* basierende System (**N**, σ, 0, +, •; P**Ax**) der **natürlichen Zahlen**. Die ***Peano*-Axiome,** P**Ax,** lauten:

(PA1)	$\forall x{:}\forall y{:}\ (\sigma x \underline{=} \sigma y)\Rightarrow(x \underline{=} y)$	Der Nachfolger ist eindeutig.
(PA2)	$\forall x{:}\neg(\sigma x \underline{=} 0)$	Null ist kein Nachfolger.
(PA3)	$\forall x{:}(x+0 \underline{=} x)$	Addition der Null.
(PA4)	$\forall x{:}\forall y{:}(x+\sigma y) \underline{=} \sigma(x+y)$	Addition eines Nachfolgers.

(PA5)	$\forall x:(x \bullet 0 \underline{=} 0)$	Multiplikation mit Null.
(PA6)	$\forall x:\forall y: (x \bullet \sigma y = x \bullet y + x)$	Multiplikation mit einem Nachfolger.
(PA7)	$(P(0) \wedge \forall x:(P(x) \Rightarrow P(\sigma x)) \Rightarrow \forall y:P(y))$	Prinzip der mathematischen Induktion.

Beachte: Metasprachlich (!) ist bei (PA7) hinzuzufügen: P ist eine ***beliebige*** 1-stellige Relation (eine "Eigenschaft"), die mit den anderen Axiomen auf **N** formulierbar ist. Da alle Axiome in **PL1-Ausdrücken** formalisiert sein sollen, darf in (PA7) vor dem Gesamtausdruck ***kein*** Quantor "∀P:" stehen". Da aber P *beliebig* sein darf, ist eigentlich das Axiom (PA7) durch eine abzählbare Menge von Axiomen zu ersetzen, die das Ensprechende für P_1, P_2, P_3, … (eine nicht abbrechende Folge unterschiedlicher Eigenschaften auf **N**) formulieren. Es sei aber an die Anmerkung auf S.113 erinnert.

Von diesem System erwartete man bis ca. 1930, dass es – zusammen mit dem von *Hilbert* angegebenen Herleitungssystem **SR** – syntaktisch vollständig sei. Der nächste Satz sagt das Gegenteil.

• **Satz 3:** Die in den *Peano*-Axiomen axiomatisierte Struktur (**N**, σ, 0, +, •; P**Ax**) der **natürlichen Zahlen ist *<u>nicht</u>* syntaktisch vollständig** [*Gödel*, 1931]. D.h. es gibt wenigstens einen in dieser Struktur formulierbaren Ausdruck B, für den weder B noch ¬B ***hergeleitet*** werden kann.

Erläuterung: Das widerspricht keineswegs der ***Korrektheit*** und ***semantischen Vollständigkeit,*** die im vorangegangenen Satz ausgesprochen wurde.
Die Beweisidee zur syntaktischen Unvollständigkeit des Peanosystems der natürlichen Zahlen kann hier nur sehr bruchstückhaft angedeutet werden. Die "Sprache" des Peano-Systems sei mit **"L(PA)"** bezeichnet. Sie enthält eine abzählbare Menge Oz von Zahlen-Variablen, die Zahlenkonstante 0 (Null), die Funktionszeichen σ, +, • für die Nachfolger-funktion, die Addition und die Multiplikation, die sieben in den Axiomen P**Ax** auftretenden PL1-Ausdrücke, sowie alle daraus ableitbaren weiteren PL1-Ausdrücke. Das ist insgesamt eine abzählbar-unendliche Menge von "Gegenständen".

Gödels Idee war nun: Man muss einen in L(PA) formulierbaren Satz **B** (genannt "***Gödelsatz***") finden, der besagt: ***"B ist aus den Peano-Axiomen nicht herleitbar".*** B sagt also von sich selbst aus, dass er nicht herleitbar ist. Man argumentiert nun so:
(a) Angenommen **B** sei falsch, dann ist **B** aus P**Ax** herleitbar; nach Satz 2 folgt damit, dass **B** aus P**Ax** semantisch folgt, also wahr ist. ➔ Widerspruch zur Annahme (a)!
(b) Also muss **B** wahr sein; dann folgt aber:

(i) **B** ist zwar wahr, aber aus P**Ax** nicht herleitbar, und
(ii) nicht-**B** ist nicht aus P**Ax** herleitbar und folgt auch nicht semantisch aus P**Ax,** da P**Ax** wegen Satz 2 nichts Falsches beweist.

Zusammen: Weder **B** noch nicht-**B** ist aus den Peanoaxiomen herleitbar.

Damit ist Satz 3 natürlich noch nicht bewiesen: So ein geeigneter **Satz B** muss in der Sprache L(PA) ja erst konstruiert werden!

Zur Konstruktion benutzte Gödel das *metasprachlich(!)* bekannte und als widerspruchsfrei vorausgesetzte System $\boldsymbol{N}$ der natürl. Zahlen als ***Modell***. Jedem L(PA)-Zeichen und schließlich jedem in L(PA) formulierbaren Ausdruck A wird eine eindeutig bestimmte sog. ***Gödelnummer*** gn(A) als "Namen" zugeordnet. Das ist prinzipiell möglich, da all diese Ausdrücke ja wohlbestimmte endliche Zeichenreihen sind, und deren Gesamtheit eine abzählbare Menge ist. Dazu benutzte er den Satz von der eindeutigen Primzahlpotenzen-zerlegung jeder nat. Zahl >1; dieser Primzahlsatz garantiert, dass man umgekehrt von jeder gegebenen natürlichen Zahl n feststellen kann, ob sie Gödelnummer eines L(PA)-Ausdrucks ist, und welcher das ist. Gödel konstruiert dann einen L(PA)-Ausdruck B(x) des Inhalts: „*Der Satz mit der Gödelnummer x ist nicht ableitbar*“. B(x) hat selbst wieder eine Gödelnummer gn(B(x)). Der Ausdruck, der besagt, dass der Ausdruck S die Gödel-nummer x hat, sei G(S,x); er habe die Gödelnummer gn(G(S,x)). Gödel beweist nun – das ist die Hauptarbeit – , dass es in $\boldsymbol{N}$ eine Nummer n gibt mit **B(n) ⇔ G(B(n),n),** d.h. dass $\boldsymbol{N}$ ein Modell für den Ausdruck (B(n) ⇔ G(B(n),n)) ist (sog. *Diagonalisierung*). Damit erhält er einen Satz der Form „*Ich bin nicht ableitbar*“, den oben als "***Gödelsatz"*** bezeichneten Ausdruch **B**.

In der eben angedeuteten Beweisskizze zum Satz 3 hatten wir vorausgesetzt, dass das (metasprachliche) System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen widerspruchsfrei sei. – Ist es das wirklich? --- Als Folgerung aus dem Satz 3 ergibt sich der erstaunliche Satz:

• **Satz 4:** Die **Widerspruchsfreiheit** der Peano-Axiome ist mit den Mitteln der Sprache L(PA) selbst ***nicht beweisbar***. [*Gödel*, 1931]

Dieser Satz besagt ***nicht***, dass $\mathbb{N}$ widerspruchsvoll sei! Er besagt nur, dass die Widerspruchsfreiheit des Peanosystems mit dessen eingenen Mitteln nicht bewiesen werden kann.

• **Satz 5:** Die Prädikatenlogik 1. Stufe ist ***unentscheidbar*** in folgendem Sinne: Es gibt ***kein*** *allgemeines* Verfahren ("Algorithmus"), das es gestatten würde, bei ***jedem*** gegebenen PL1-Ausdruck F in ***endlich*** vielen Schritten zu entscheiden, ob F *erfüllbar* ist oder nicht. (D.h. ob es eine Belegung β gibt mit $\beta(F)=\underline{1}$ bzw. ob es keine solche gibt.) [*Alonzo Church*, 1936]

Natürlich gibt es für ***spezielle*** PL1-Ausdrücke Algorithmen, die in endlich vielen Schritten ausrechnen, ob diese PL1-Ausdrücke erfüllbar sind oder nicht. In der Informatik gibt es dazu die sog. "***Resolutionskalküle***" zur PL1 – ähnlich wie zur Aussagenlogik.

Damit schließen wir die Einführung in die Prädikatenlogik 1. Stufe. Wir haben über **PL1** noch längs nicht alles gesagt. Aber es soll ja eine Einführung für Nicht-Mathematiker sein.

7 Formale Begriffsanalyse

7.1 Vorbemerkung

• Anknüpfend an die alte, von vielen für obsolet gehaltene Begriffslogik (vgl. Kap.3) ist in den 1990-er Jahren eine neue Begriffslogik entstanden, die sog. **"Formale Begriffsanalyse"**. Als deren Begründer dürfen die Darmstädter Mathematiker ***Rudolf Wille*** und ***Bernhard Ganter*** gelten, vgl. [GaWi_FBA].

Rudolf Wille
* 1937

• Forschungsobjekt für *Wille* und *Ganter* war, die damals schon gut ausgebildete, aber eher rein mathematsch untersuchte ***Verbandstheorie***

[engl.: *Lattice Theory, v.a.* der US-amerikanische Mathematiker ***Garrett Birhoff*** 1911-1996]. Wir werden sie weiter unten skizzieren.

Die Motivation war, die Verbandstheorie mit der Idee, was ein ***"Begriff"*** sei, in Verbindung zu bringen und ihr damit ein weites Anwendungsgebiet zu eröffnen, ja, sie sogar auf der Begriffs-Idee neu aufzubauen.

Das Besondere daran war, neu zu formalisieren, was ein "Begriff" sein solle. Bisher wurden Begriffe als **Klassen** (Mengen) von "Dingen" (Individuen, gemäß Aristoteles: "*Substanzen*") aufgefasst. Jede solche Klasse bekommt einen ***Namen***; der ist sprachlich gesehen meist ein ***Substantiv*** (oder auch ein substantiviertes / substantivierbares Adjektiv). So geschieht es in der Informatik auch heute noch (so wie auch in der alten Begriffslogik). So scheint es auch die Umgangssprache zu suggerieren. (Ein bestimmtes, individuelles Pferd gehört zur Klasse der ***Pferde***).

Die Frage ist nur: wie bestimmt man eigentlich so eine Klasse? – Bei Pferden scheint das trivial – *"man sieht doch, dass ein Pferd zur Klasse der Pferde gehört!"*. Schwieriger wird es zum Beispiel bei der Klasse der Aminosären; die "sieht / hört / schmeckt / riecht / ertastet" man ja nicht direkt! Sie müssen durch gewisse *Eigenschaften* spezifiziert werden.

Nun gut, "Aminosäure" sei ein "Begriff" im üblichen Klassensinne. Über das, was schließlich "Aminosäuren" genannt worden ist, hat man was herausgefunden und benennt "Prädikate" / "Eigenschaften", die ihnen gemeinsam sind – "eigen" sind.

Was aber ist mit diesen *Prädikaten* über Aminosäuren? Sind das wiederum "Begriffe"? -- Oder soll man grundsätzlich "Begriffe" von "Prädikaten"/"Eigenschaften" unterscheiden? – Das ist ein schon ziemlich alter fruchtloser Streit!

- Der Ansatz von *Wille & Ganter* bestand nun darin, etwas "Selbstverständliches" (aber in der alten westlichen Ontologie und Begriffslogik Vernachlässigtes!) formal herauszuheben: Gewisse "Dinge" und deren "Eigenschaften" stellt man nur in einem (oft nicht näher bewusst gemachten) **Zusammenhang** fest (ich nenne das einen „KONTEXT“), und alles, was man darin benennt, hängt mit allem anderen zusammen. Erst innerhalb eines solchen Zusammenhangs kann man "Begriffe" bilden. Begriffe "absolut" (kontextunabhängig) genommen sind **sinnlos**.

(Im Südbuddhismus benennt man das mit dem Pâliwort "*paticcasamuppâda*" – "Bedingtes Entstehen". Es war vor 2600 Jahren eine der Haupteinsichten des **Buddha**.)
– Im alten aristotelischen "*Substanzdenken*" strebte man hingegen stets danach, das an den "Dingen" *Selbständige /Unabhängige* zu finden; ihr "*Selbst*" oder ihr "*Wesen*", wie man auch sagte. Das war nach meiner Überzeugung eine ernsthafte Sackgasse. Man vergaß als erstes, überhaupt zu berücksichtigen, dass das ganze "Dinge /Eigenschaften"-Konzept eine – ***sprachlich*** geäußerte – Eigenart ***menschlichen*** Bewusstseins ist, die durch den komplexen "Gehirnapparat" bedingt ist und dem Menschen hilft, mit seiner Umwelt / mit seinen verschiedenen Situationen erinnernd, ordnend und planend umzugehen. Die tief – besonders im westlichen Denken – verwurzelte Mentalität, „Dinge“ absolut betrachten zu wollen, hatte ich in Kap.2.4 scherzhaft die "***Backsteinmentalität***" genannt. Eine soche „Mentalität" haben zum Beispiel Regenwürmer nicht; für sie gibt es weder "Dinge" noch "Eigenschaften", denn ihnen fehlt dazu der komplexe Gehirnapparat und besonders eine ***Sprache***, mit der sie so etwas äußern könnten – und trotzdem überleben sie sehr gut ohne das. Schon daraus, so meine ich, folgt, dass wir (westlichen) Menschen zu vorschnell glauben, „alles was es gebe“, bestünde aus "Dingen", und (wie *Parmedides*, *Platon*, *Descartes* und viele andere glaubten) *"das Sein und das Denken sei eines"*. – *Sokrates* und *Buddha* waren da viel vorsichtiger!

Nun aber zurück zu *Wille & Ganter*: Da nun einmal das Dinge / Eigenschaften-Konzept in unseren natürlichen (indoarischen oder semitischen) Sprachen und unserem Denken verankert zu sein scheint, muss man damit auskommen.

- Warum aber behandelt man "Dinge" und "Eigenschaften" unterschiedlich und gibt zudem den "Dingen" den Vorzug vor ihren "Eigenschaften"?
- Und weiter: Warum will man "Dinge" und "Eigenschaften" losgelöst von Zusammenhängen, losgelöst vom Erlebniskontext oder losgelöst vom kulturellen Hintergrund oder einem Wissensgebiet einer menschlichen Gesellschaft begreifen?
- Und schließlich: Zwischen „Dingen“ und „Eigenschaften“ formuliert die natürliche Sprache viele ***Beziehungen*** für welche die

vier aristotelischen Beschreibungsformeln „alle X sind Y“ / „kein X ist ein Y“ / „einige X sind Y“ / „einige X sind keine Y“ *einfach nicht ausreichen*. Warum geht man nicht vielmehr von solchen ***Beziehungen*** aus, um „Begriffe“ zu bilden?

➔ Diese Fragen führten *Wille & Ganter* zu einem alternativen Konzept für die abstraktive Begriffsbildung:

Erstens: Die Bildung eines Begriffs macht nur Sinn in einem KONTEXT (Situation / Umfeld / kultureller Hintergrund), dessen man sich bei Begriffsbildungen bewusst werden muss. Die Bildung von "Begriffen" ist ohne Bezug auf einen solchen KONTEXT nichtssagend, ja eigentlich unsinnig. Innerhalb eines KONTEXTES bildet sich nicht nur *ein* Begriff, sondern ***viele***; und die stehen untereinander in den vom KONTEXT gestifteten ***Beziehungen***.

Zweitens: Worte für "Dinge" und Worte für "Eigenschaften" sind ***gleichberechtigt*** zu behandeln. Die traditionelle (westlich-philosophische) Unsymmetrie zwischen Worten für "Dinge" und solchen für "Eigenschaften" ist hinderlich und führt zu unnötigen Restriktionen (vgl. z.B. den unsinnigen „Universalienstreit“ mittelalterlicher Philosophie). Sie wird in den natürlichen Sprachen auch nirgends konsequent eingehalten und entstammt nur einer "Backsteinmentalität", die mit dem sog. "Substanzdenken" zu tun hat. Ob in einem KONTEXT eine Gruppe von Eigenschaften auffällt, und man deshalb nach Dingen Ausschau hält, welche diese gemeinsam haben, oder ob eine Gruppe von Dingen auffällt, und man nach Eigenschaften Ausschau hält, welche ihnen gemeinsam sind, das sind zwei Vorgänge, die ***beide*** in jeder KONTEXT-Erforschung ***gleichermaßen*** förderlich sind, sofern man sich bemüht, den KONTEXT, in dem man forscht, immer besser einzugrenzen.

7.2 Formaler Kontext, formaler Begriff

Diese Einstellungen haben, so meine ich, *Wille & Ganter* in der **„Formalen Begriffsanalyse“** (FBA) formalisiert, — zunächst in der folgenden, einfachst-möglichen Form, um für ihre Zwecke zu definieren, was sie mathematisch unter der Struktur eines „Kontextes“ und „Begriffen“ in einem solchen Kontext verstehen wollen:

Def. f-Kontext: Ein Tripel (G, M, r), bestehend aus einer Wortmenge G, deren Elemente „**Gegenstände**“ genannt seien, und einer Wortmenge M, deren Elemente „**Merkmale**“ genannt seien, sowie einer 2-stelligen **Relation** r auf G×M heißt ein **formaler Kontext**, kurz **f-Kontext**.

Die Relation r kann einerseits wie ein 2-stelliges Prädikat r(g,m) mit $g \in G$, $m \in M$ gelesen werden: r(g,m):= „Gegenstand g hat das Merkmal m“, mit r(g,m)=1, falls es zutrifft, dass Gegenstand g das Merkmal m hat, bzw. r(g,m)=0, falls nicht. Andererseits kann man die

Paar-Teilmenge $R_r \subseteq G \times M$ bilden durch die Definition $R_r := \{(g,m) \in G \times M \mid r(g,m) = \underline{1}\}$. Dann bedeutet „r(g,m) trifft zu“ dasselbe wie „$(g,m) \in R_r$ trifft zu“.

Im Folgenden bezeichnen wir der Einfachheit halber sowohl das Prädikat r als auch die zugehörige Paar-Teilmenge R_r mit demselben Buchstaben („Namen“) **r** und lesen „r(g,m)“ wie „$(g,m) \in r$“. Wenn wir „$r \subseteq G \times M$“ schreiben, meinen wir, dass r die Paar-Teilmenge R_r ist.

Nach der Idee, dass ein „Begriff“ innerhalb eines Kontextes sich auf eine Wortmenge von „Gegenständen“ („Begriffs-Umfang“ / „Begriffs-Extension“) bezieht, die „unter den Begriff fallen“, und dass er andererseits durch gewisse „Merkmale“ („Begriffs-Inhalt“ / „Begriffs-Intension“) gekennzeichnet ist, die allen Gegenständen des Umfangs zugeschrieben werden, ergibt sich in der FBA auf natürliche Weise eine einfache mathematische Definition dafür, was ein „Begriff“ (in einem Kontext) sei.

Def. formaler Begriff: Sei K := (G, M, r) ein formler Kontext. Ein Mengenpaar (A, B) mit $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ heißt ein **formaler Begriff** (kurz: **„f-Begriff“)** im f-Kontext K, wenn gilt: A besteht aus den Gegenständen, die ***alle*** Merkmale $m \in B$ haben, ***und*** B aus den Merkmalen, die ***allen*** Gegenständen $g \in A$ zukommen. In Formeln:

$$A = \{g \in G \mid \forall m:(m \in B \Rightarrow r(g,m))\}, \quad B = \{m \in M \mid \forall g:(g \in A \Rightarrow r(g,m))\}.$$

A heißt der **Umfang,** B der **Inhalt** des f-Begriffs (A,B).

Anmerkung-1: Wichtig bei dieser Definition ist, dass ein ***f-Begriff*** sich stets auf einen gegebenen ***f-Kontext*** (G, M, r) und die zugehörige ***Relation*** $r \subseteq G \times M$ bezieht. Das wird besonders relevant, wenn wir es mit ***mehreren*** Relationen r, s, t,... auf ein und derselben Grundmenge von Wörtern (etwa eines „Wissensgebiets“) zu tun haben! „Ontologisch“ entspricht dem die Einstellung, dass die Definition von „Begriffen“ ***problematisch*** wird, wenn man dabei den KONTEXT und die damit gemeinte „Beziehungsart“ nicht klar herausstellt: ***ERST der KONTEXT, DANN die Begriffe – NICHT umgekehrt!***

Anmerkung-2: Beachte, dass ein f-Begriff ein **Paar** aus Mengen ist, während klassisch ein Begriff immer nur als ***eine*** Menge (Klasse) von Gegenständen angesehen wurde.

Zu einem gegebenen f-Kontext K:=(G, M, r) gibt es i.allg. *viele* formale Begriffe. Die Menge aller Begriffe zum f-Kontext (G, M, r) ist

$$\underline{\mathbf{B}}\mathbf{(r)} := \{(A,B) \mid A \subseteq G,\ B \subseteq M,\ (A,B) \text{ ein f-Begriff zu } r\}.$$

Auf der Menge $\underline{\mathbf{B}}\mathbf{(r)}$ führt man eine **Ordnungselation** $\leq_r$ ein durch die Definition $(A_1,B_1) \leq_r (A_2,B_2) :\Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2$. Damit gilt zugleich auch stets: $(A_1,B_1) \leq_r (A_2,B_2) \Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1$. Trifft $(A_1,B_1) <_r (A_2,B_2)$ zu, so sagt man: „(A_1,B_1) ist ein **f-Unterbegriff** von (A_2,B_2)“ oder auch „(A_2,B_2) ist ein **f-Oberbegriff** von (A_1,B_1)“ im Sinne der Relation r.

Das Paar ($\underline{\mathbf{B}}$(r), $\leq_r$) bildet eine sogenannte „**Ordnung**“.

Anmerkung-3: Diese Definition trifft ziemlich gut die intuitive Vorstellung von „Unterbegriff“ / „Oberbegriff“: Der Unterbegriff ist „spezieller“ und hat daher weniger „Gegenstände“ in seinem Umfang und mehr „Merkmale“ in seinem Inhalt; der Oberbegriff ist „allgemeiner“ und hat daher mehr „Gegenstände“ in seinem Umfang und weniger „Merkmale“ in seinem Inhalt. Der „kleinste“ („speziellste“) Begriff hat „alle“ (betrachteten[!]) Merkmale zum Inhalt aber möglicherweise keine oder nur wenige Gegenstände in seinem Umfang.

Der „größte“ („allgemeinste“) Begriff umfasst „alle“ (betrachteten[!]) Gegenstände im Umfang, aber möglicherweise keine oder nur wenige Merkmale in seinem Inhalt.

Def.: $(V,\leq)$ heißt eine **Ordnung,** wenn für beliebige $x, y, z \in V$ die 2-stellige Relation $\leq$ folgende Eigenschaften hat:

Reflexivität: $x \leq x$.
Antisymmetrie: $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$.
Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Beachte: die Ordnung muss nicht „total“ (oder „linear“) sein, d.h. es muss nicht (wie z.B. bei den natürlichen Zahlen) für je zwei x, y stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gelten. Es kann auch „un-vergleichbare“ Elemente geben, also solche, für die weder $x \leq y$ noch $y \leq x$ gilt.

Nach dem Hauptsatz der Formalen Begriffsanalyse ist $(\underline{\mathbf{B}}(r), \leq_r)$ sogar ein **vollständiger Verband** und heißt der zum f-Kontext K:=(G, M, r) gehörige **f-Begriffsverband**.

Def.: Ein ***vollständiger Verband*** ist eine Ordnung **(V, ≤)** mit folgender zusätzlichen Eigenschaft: Für jede Teilmenge $X \subseteq V$ existiert das **Supremum supX** (kleinste obene

Schranke von X im Sinne der Ordnung $\leq$) und das **Infimum infX** (größte untere Schranke von X im Sinne der Ordnung $\leq$).

Setzt man für zwei beliebige Elemente $x,y \in V$: $x \underline{\wedge} y := \inf\{x,y\}$, $x \underline{\vee} y := \sup\{x,y\}$, so hat man damit auf V zwei Verknüpfungen $\underline{\wedge}$, $\underline{\vee}$ (2-stellige Funktionen) erklärt. In einem vollständigen Verband **(V, $\leq$)** glit für alle $x, y, z \in V$:

$x \underline{\wedge} y = y \underline{\wedge} x$,	$x \underline{\vee} y = y \underline{\vee} x$	Kommutativität
$x \underline{\wedge} (y \underline{\wedge} z) = (x \underline{\wedge} y) \underline{\wedge} z$,	$x \underline{\vee} (y \underline{\vee} z) = (x \underline{\vee} y) \underline{\vee} z$	Assoziativität
$x \underline{\wedge} (x \underline{\vee} y) = x$,	$x \underline{\vee} (x \underline{\wedge} y) = x$	Absorptivität
$x \leq y \Leftrightarrow x = x \underline{\wedge} y \leq x \underline{\vee} y = y$		Verträglichkeit mit der Ordnung $\leq$.

Beachte: Die Symbole $\underline{\wedge}$, $\underline{\vee}$ bedeuten hier etwas anderes als die Junktoren $\wedge$, $\vee$!

Der Begriffsverband **<u>B</u>**(r) hat (gemäß der Ordnung $\leq_r$) einen „**größten**“ und einen „**kleinsten**“ f-Begriff. Der **Umfang** des *größten* f-Begriffs besteht aus *allen* Gegenständen, ist also = G; sein Inhalt hat wenige oder gar keine Merkmale. Entsprechend besteht der **Inhalt** des *kleinsten* f-Begriffs von **<u>B</u>**(r) aus *allen* Merkmalen, ist also = M; sein Umfang hat wenige oder gar keine Gegenstände.

Es zeigt sich, dass umgekehrt jeder vollständge Verband (V, ≤) als ein f-Begriffsverband B(r) zu einem formalen Kontext (G, M, r) gedeutet werden kann.

Damit ergibt sich die Möglichkeit, die Verbandstheorie auf der Begriffs-Idee aufzubauen.

Fundamental bei dieser formalen Begriffsdefinition ist Folgendes:

Vertauscht man G mit M und nimmt statt der Relation r(g,m) die dazu „inverse“ Relation r*(m,g) (es gilt r*(m,g) ⇔ r(g,m) für alle $g \in G$, $m \in M$), so erhält man einen f-Kontext K* = (M,G,r*) und einen zugehörigen Begriffsverband $\underline{B^*}(r^*),\leq_{r^*})$ der (bis auf diese Vertauschung) dieselben strukturellen Eigenschaften wie der Ausgangsverband hat; man kann es auch ***denselben „Sachverhalt“*** nennen. Mathematiker nennen das die „**Dualität**“ zwischen „Gegenständen“ und „Merkmalen“. In diesem mathematischen Sinne sind „Gegenstände“ und „Merkmanle“ **völlig gleichberechtigt**.

Soweit die Grunddefinitionen zu „f-Kontext“ und „f-Begriff“ in der Formalen Begriffsanalyse (FBA) von *Ganter & Wille.*

Die *Gleichberechtigung* von „Gegenstand“ und „Merkmal“ im Sinne der *Dualität* (oder des *Sachverhalts*) lässt mich auf den Gedanken kommen, sie einfach „in ***einen*** Topf“ zu tun. In der natürlichen Sprache geschieht das ja fortwährend bei der Formulierung irgendeines Wissensgebietes. Dazu das nächste Kapitel.

7.3 Der KONTEXT

Mein eigener, weiterer Ansatz ist nun folgender:

Mit einem KONTEXT (in Großbuchstaben) meine ich hier ein Textwerk (z.B. zu einem Wissensgebiet), in dem man nicht nur *eine*, sondern *mehrere* 2-stellige Relationen r, s, t, …ausmacht. Sie bestehen zwischen Worten, die man einmal als „Gegenstände“ ein

andermal als „Merkmale“ deuten kann: Das hängt nur davon ab, ob sie an der ersten oder der zweiten Stelle einer Relation stehen. ***Dasselbe*** Wort kann z.B. bei der einen Relation r an der ersten Stelle stehen und gilt dann als „Gegenstand“ bzgl. r. Es kann bei einer anderen Relation s an der zweiten Stelle stehen und gilt dann als „Merkmal“ bzgl. s. Läßt man neben den gefundenen Relationen r, s, … auch all deren Durchschnitte zu, so bildet die Gesamtmenge **REL** aller zugelassenen Relationen einen **vollständigen Verband** (**REL**,$\leq_{REL}$), dessen Verbandsordnung $\leq_{REL}$ nichts anderes ist, als die auf **REL** beschränkte Mengeninklusion. Die Worte, die in den ausgemachten Relationen r, s, t, … (an 1. od. 2. Stelle) stehen, nenne ich „**Instanzen**“ und fasse sie zusammen in eine Menge **IN**. Die gefundenen 2-stelligen Relationen fasse ich in eine Menge **REL** zusammen. Somit kann ich den gesamten KONTEXT

(in erster Näherung) als ein Paar **(REL, IN)** formalisieren. Jede Relation $r \in$ **REL** ist dann eine gewisse Teilmenge $r \subset \mathbf{G_r \times M_r}$ **(G_r, $M_r \subseteq$ IN)**. Der zu einem $r \in$ **REL** gehörige f-Kontext ist also **K_r:=(G_r, Mr, $_r$).** Der zu r gehörige f-Begriffsverband sei wieder mit **<u>B</u>(r)** bezeichnet.

Die Vereinigung F(**REL**) := **<u>B</u>**(r)∪**<u>B</u>**(s)∪**<u>B</u>**(t)∪… (r,s,t,… ∈REL) all dieser f-Begriffsverbände ergibt dann die Gesamtheit aller f-Begriffe, die im KONTEXT **(REL, IN)** bildbar sind. Die Teilordnungen $\leq_r$, $\leq_s$, $\leq_t$, … auf den einzelnen f-Befriffsverbänden setzen sich zu einer Gesamtordnung $\leq_F$ in einfacher Weise zusammen. (F(**REL**), $\leq_F$) ist also in natürlicher Weise die Gesamt-Begriffsordnung des KONTEXTes **(REL, IN)**. (F(**REL**), $\leq_F$) ist zwar i.allg. kein vollständiger Verband mehr, aber immerhin eine ***geordnete*** f-Begriffsmenge. Ein f-Begriff (A,B) ∈ F(**REL**) kann mehreren f-Begriffsverbänden **<u>B</u>**(r), **<u>B</u>**(s), … des KONTEXTes angehören.

Die Gesamtheit F(**REL**) aller f-Begriffe eines KONTEXTes **(REL, IN)** ist eine interessante Struktur, die in der Informatik zur Formalisierung eines Wissensgebietes (meines Wissens) bislang noch nicht voll ausgenutzt wurde, weil die Informatik sich immer noch ziemlich genau an das aristotelische unsymmetrische „Dinge/Eigenschaften“-Konzept hält, bei welchem „Dinge“ gegenüber ihren „Eigenschaften“ den Vorzug haben und Relationen und Kontexte nur zweitrangig aber nicht strukturstiftend behandelt werden.

Die Formalisierung eines Wissensgebietes zum Zwecke der computergestützten Weiterverarbeitung, Durchsuchung und Bereitstellung heißt bei den Informatikern eine „**Ontologie**“. Das Rückgrad einer Ontologie ist die **Taxonomie** ihrer Begriffe, das ist eine hierarchische Ordnung der Begriffe. Begriffe sind in der konventionellen Infomatik – ganz im alten aristotelischen Sinne – Klassen

(Mengen) von „zusammengehörigen Objekten“. Diese Zusammengehörigkeit muss natürlich durch ihre gemeinsamen „Attribute“ (Eigenschaften) beschrieben werden. Aber die „Attribute“ werden in einer Ontologie anders als die „Objekte“ behandelt. Diese Unsymmetrie führt m.E. zu Schwierigkeiten bei der Erstellung der Taxonomie. Relationen werden in einer Ontologie ebenfalls ermittelt, aber es sollen Relationen zwischen *Begriffen* sein (und nicht zwischen „Instanzen“ wie in der FBA angesetzt!) Relationen werden in einer informatischen Ontologie nicht als strukturstiftend angesehen, sondern man versucht sie sozusagen „im Nachhinein dazuzubasteln“. Der strukturelle Zusammenhang zwischen Begriffen, ihrer Taxonomie, Relationen und „Instanzen“ ist in einer informatischen Ontologie vage und nicht mathematisch begründet.

(„Objekte“ sind dort sozusagen die Grundelemente / die „Individuen“ in einem eher „traditionell-metaphysischen“ Sinne.)

Würde man statt dessen von vorne herein von **Relationen** auf „Instanzen“ ausgehen (wobei versteckte „Metaphysiken“ beiseite gelassen, und die Instanzen schlicht als geeignete Textworte behandelt werden), und würde man die „Begriffe“ im Sinne der Formalen Begriffsanalye als f-Begriffe einführen, so fiehle die Unsymmetrie zwischen „Objekten“ und „Attributen“ weg und eine Taxonomie ergäbe sich ***von selbst*** als die natürliche Ordnung $\leq_F$ auf der Menge F(**REL**) aller f-Begriffe eines KONTEXTes. Die Struktur einer „Ontologie“ wäre dann nichts anderes als die Struktur eines KONTEXTes **(REL, IN).** Eine solche mathematisch einwandfreie Vorgehensweise scheint aber bei den Informatikern bislang nicht beachtet zu werden.

8 Nicht-klassische Logiken

8.1 Mehrwertige Logiken

Die bisher vorgestellte *zweiwertige* Logik (sowohl als Aussagen- als auch als Prädikatenlogik) ist mit den Entwicklungen des 19. und 20. Jhs. bei weitem die bis heute erfolgreichste. Wir hatten in Kap.5.3 vermutet, dass dies sowohl historisch als auch sprachlich bedingt sei.

In diesem Kap. beschränken wir uns auf **mehrwertige Aussage-logiken**.

Anmerkung: Man kann auch mehrwertige *Prädikatenlogiken 1.Stufe* definieren, ähnlich wie in Kap. 6.2. Dabei wäre aber zu beachten, dass die sogenannten „Prädikatzeichen“ (Menge **Rz**) der formalen Sprache bei Deutungen nicht in derselben Weise als *Relationen* auf einer Objektmenge **Uni** interpretiert werden können, sondern nur als „Prädikate“

p: $\mathbf{Uni}^n \rightarrow \mathbf{B}$. Der Grund ist, dass wenigstens einige solcher Prädikate p auf mehr als nur zwei **B**-Werte abbilden sollten. *Relationen* dagegen bilden, so wie sie definert sind, nur auf zwei Werte 0, 1 ab. Wir erläutern es am Beispiel 2-stelliger Relationen. Eine 2-stellige Relation r auf der Objektmenge **Uni** wird als Teilmenge $r \subset \mathbf{Uni} \times \mathbf{Uni}$ aufgefasst. Für jedes Objektpaar (a,b) kann nur entweder $(a,b) \in r$ oder $(a,b) \notin r$ gelten, und das läuft automatisch auf eine *2-Wertigkeit* der Logik hinaus: Alle Relationen können nur auf die zwei Werte 1, 0 abbilden. Ist aber der Bewertungsbereich **B** m-wertig (m>2), so muss man statt 2-stelliger Relationen allgemeiner 2-stellige ***Prädikate*** p: $\mathbf{Uni} \times \mathbf{Uni} \rightarrow \mathbf{B}$ nehmen, wo auch auf andere **B-**Werte als nur 1 und 0 abgebildet werden kann. Das klassische Mengenkonzept ist also für Prädikate einer *mehrwertigen* Logik *ungeeignet*. Mehrwertige Prädikatenlogik ist zwar möglich, aber wir gehen darauf hier nicht ein, obwohl sich dort interssante Aspekte mit neuen *Quantoren* zeigen, die in der 2-wertigen Prädikatenlogik nicht auftreten. Vgl. dazu z.B. meine Schrift [CL_MWL].

8.1.1 Vorbemerkung zur Motivation

Es geht mir hier weiterhin nur um „**Behauptungssätze“**. Dennoch schließen sowohl das Extensionalitätsprinzip, als auch die Deutung der Junktoren, als auch die Beschränkung auf die Zweiwertigkeit

Sprachgebräuche aus, mit denen man alternative Logiken formalisieren könnte. Hier ein paar Abweichungsbeispiele:

(a) Die ***Umgangssprache*** hält sich nicht genau an die in Kap.5.2 festgelegte *Normierung* der Bedeutung der Junktoren; und das „***Extensionalitätsprinzip***“ wird oft nicht eingehalten.

- Das ***„und“*** ($\wedge$) wird u.a. auch im kausalen Sinne gebraucht

Beispiel: (i) *„Peter wird krank und nimmt Tabletten“*, (ii) *„Peter nimmt Tabletten und wird krank“*: Hier suggeriert die *Reihenfolge* der Teilsätze eine Kausalität. ***Kausalität ist aber <u>kein</u> Thema der formalen klassischen Logik!***

- Das ***„oder“*** ($\vee$) wird oft im exklusiven Sinne gebraucht (wie „entweder… oder“) und nicht im inklusiven Sinne.
- Besonders divers ist die Benutzung des ***„wenn … dann …“*** ($\Rightarrow$). Damit ist oft eine zeitliche Reihenfolge von Handlungen gemeint. (In der klassischen Logik ist Zeitliches aber ganz ausgeklammert!) „*Nur dann… wenn*…“ wird sogar gerade wie die Umkehrung ($\Leftarrow$) gebraucht.

- Die Negation, „nicht“ (¬), wird in der Umgangssprache nur selten streng nach dem Prinzip „doppelte Verneinung ist Bejahung“ gebraucht. Im Spanischen ist z.B. die Redewendung „*no tengo ni idea*“ („ich habe nicht keine Ahnung“) selbstverständlich eine betonte *Verneinung* (ähnlich im Bayrischen: „I hob koa Geld net“). Im Deutschen ist (i) „*es ist nicht unüblich <das-und-das zu tun>*“ keinesfalls gleichwertig mit (ii) „*es ist üblich <das-und-das zu tun>*“, sondern (i) ist so zu sagen eine „abgeschwächte“ Zustimmung für (ii).

(b) Bei Behauptungen, für die es (in einer vorliegenden Situation) unmöglich ist, zu testen, ob sie zuträfen oder nicht, hat man das Bedürfnis, einen dritten Wert zuzuordnen, der ***gerade darauf hinweist*****,** *dass* die Behauptung (zur Zeit oder vielleicht sogar grundsätzlich) sich weder als zutreffend oder als unzu-

treffend erweist.

• In der Datenverarbeitung, bei der aus einem Satz D von Daten durch ein geeignetes Programm ***p*** neue Daten E zu erzeugen sind, zum Beispiel

$D(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \;:\!\Rightarrow_{\boldsymbol{p}}\; E(e_1, e_2, e_3)$,

kommt es immer wieder vor, dass ein gewisses Datum d in D fehlt, oder aus einer Bitfolge besteht, die vom Programm ***p*** nicht „interpretiert“ werden kann. Zu Anfang der Datenverarbeitung war es üblich, das Programm ***p*** dann einfach abbrechen zu lassen und kein Ergebnis E anzugeben – im besten Fall statt E das Bewertungsergebnis „*false*“ oder „*syntax error*“. Das war sehr unbefriedigend, denn bei einer solchen Meldung, war nicht klar, ob ***p*** falsch programmiert war, oder ob nur der spezielle Datensatz D inkonsistent oder unvollständig war.

Später wurden die Programme ***p*** „intelligenter“: Wenn ein d in D von ***p*** nicht interpretierbar war, gab das Programm ihm einen „*Default*-Wert“ δ, gab eine Warnung bezüglich d aus und war so angelegt, dass es auch mit δ (statt d) weiterrechnen konnte. Das Ergebnis E wurde ausgegeben, es wurden aber alle Teilergebnisse e_k, zu deren Berechnung d erforderlich gewesen wäre, in der Ausgabe markiert und mit einem entsprechenden Kommentar versehen. Das so berechnete Ergebnis E war nicht einfach „falsch“, sondern konnte in vielen Fällen trotzdem weiterverwendet werden.
In eine „Logik“ übersetzt, heißt das, dass auch in der Datenverarbeitung das Bedürfnis besteht, die „primitive“ logische 2-er-Bewertung „wahr / falsch“ oder „erfolgreich / nicht erfolgreich“

oder „zulässig / unzulässig“ oder „1 / 0“ usw... intelligenter zu machen durch Einführung weiterer logischer Werte.

8.1.2 Mein zugrundeliegendes Sprachverständnis

Wenn ich neue Äußerungen höre, muss ich sie, bevor ich sie mit „wahr“ oder „falsch“ oder mit irgend einem anderen „logischen Wert“ beurteilen könnte, „***verstehen***“; das heißt für mich: sie in einen (mir vertrauten, mehr oder weniger genau greifbaren) „**Kontext**“ einordnen („klassifizieren“), sie unter sich bzw. mit schon akzeptierten / geläufigen Äußerungen „**vergleichen**“. Dabei stelle ich z.B. fest, dass eine Äußerung A eine andere Äußerung B inhaltlich **verallgemeinert** bzw. B die Äußerung A inhaltlich **spezialisiert**. Oder ich stelle fest, dass sowohl A die Äußerung B, als auch B die Äußerung A „umfasst“; dann kann ich beide Äußerungen A, B als „**gleichwertig**“ auffassen. Oder ich stelle z.B. fest, dass die Äuße-

rungen A, B inhaltlich „**unvergleichbar**“ erscheinen, d.h., dass weder A das B verallgemeinert noch B das A; und auch: dass weder A das B spezialisiert noch B das A. Hierbei werden insbesondere die Verbindungswörtchen „***und***“, sowie „***oder***“ oft im folgenden Sinne benutzt:

„***oder***“ hat als Verbindungswörtchen zwischen Äußerungen A, B die Funktion, dass die zusammengesetzte Äußerung „A ***oder*** B“ *allgemener / umfassender* ist als die Teil-Äußerungen A bzw. B.

„**und**“ hat als Verbindungswörtchen zwischen Äußerungen A, B die Funktion, dass die zusammengesetzte Äußerung „A ***und*** B“ *spezieller / eingeschränkter* ist als die Teiläußerungen A bzw. B

Schreiben wir einmal kürzer:

$A \leq_K B$ für die Feststellung, dass in einem gewissen Kontext K die Äußerung A spezieller / eingeschränkter als die Äußerung B ist, bzw. dass B allgemeiner / umfassender als A ist.

$A \cong_K B$ für die Feststellung, dass sowohl $A \leq_K B$ als auch $B \leq_K A$ der Fall sei; d.h. dass die Äußerungen A, B im Kontext K *gleichwertig* seien,

so können wir für beliebige „verstandene“ Äußerungen A, B im Rahmen des Kontextes K feststellen:

„A ***und*** B“ $\leq_K$ A $\leq_K$ „A ***oder*** B“, „A ***und*** B“ $\leq_K$ B $\leq_K$ „A ***oder*** B“.

Sind aber A, B vergleichbar, so bedeutet $A \leq_K B$ dasselbe wie „A ***und*** B“ $\cong_K$ A und dasselbe wie B $\cong_K$ „A ***oder*** B“.

Schließlich fasst jeder eine zusammengesetzte Äußerung der Form „A ***oder*** A“ bzw. „A ***und*** A“ als redundant auf und interpretiert

sie selbstverständlich als die einfachere Äußerung „A“, denn man geht davon aus, dass jede Äußerung „zu sich selbst gleichwertig“ sei.

Beispiel: Betrachten wir einmal die Äußerungen

A := „*mein Automobil wird morgen früh grün lackiert*“
B := „*mein Automobil wird demnächst lackiert*“
C := „*ich werde eine Tasse Tee trinken*“.

Der „Kontext“ K sei zum Beispiel einer, welcher die Schilderung meiner (derzeitigen) persönlichen Verhältnisse und Tätigkeiten zum Inhalt hat.

A, B sind offensichtlich vergleichbar: Die Äußerung B ist allgemeiner als A; also kann ich feststellen:

$A \leq_K B$, und damit auch „A **und** B“ $\cong_K$ A , B $\cong_K$ „A **oder** B“.

C hat offenbar nichts mit A, B zu tun. C erscheint also mit A und auch mit B unvergleichbar. Trotzdem mag es in einem gewissen Zusammenhang (einem „Subkontext“ von K) einen Sinn haben,

wenn ich A mit C durch „***und***“ bzw. „***oder***“ verbinde. Dann kann ich feststellen:

„A ***und*** C“ $\leq_K$ A $\leq_K$ „A ***oder*** C“, „A ***und*** C“ $\leq_K$ C $\leq_K$ „A ***oder*** C“.

„A ***und*** C“ ist z.B. eine Abkürzung für: „*während mein Auto morgen grün lackiert wird, werde ich eine Tasse Tee trinken*“. „A ***oder*** C“ ist etwa ein Auszug aus der (den Subkontext herstellenden) Äußerung: „*Morgen früh [sehe ich zu, wie] mein Auto grün lackiert wird,* ***oder*** *ich [gehe ins nahegelegene Restaurant und] trinke eine Tasse Tee*“.

Schließlich würde jeder, der mich sagen hört: „*Morgen wird mein Auto lackiert* ***und*** *morgen wird mein Auto lackiert*“, fragen: „Warum sagst du das zwei mal?“

All das ist noch **völlig unabhängig von einer „Bewertung“ der** Äußerungen A, B, C: Bei den eben beschriebenen Einordnungs-

vorgängen kommt es zunächst gar nicht darauf an, ob und in welchem Sinne die Äußerungen „wahr“ oder „falsch“ seien. Es geht erst einmal lediglich um eine gewisse **Klassifizierung** zum Verständnis der Äußerungen. Die eben geschilderte Einschätzung der Bedeutung der beiden Junktoren „***und***“ ($\wedge$) , „***oder***“ ($\vee$) wird sich jedoch auf die Wahl und Struktur des **Bewertungsbereichs B** auswirken (siehe später).

8.1.3 Das Syntax-Schema

Das Syntax-Schema wird genauso definiert wie in Kap.5.4.1 für die 2-wertige Aussagenlogik. Wir entscheiden uns für dieselbe Menge **J**={$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$} von 5 **Junktorenzeichen**. Diese Entscheidung birgt allerdings für die vielfältigen Möglichkeiten der Definition von mehr als nur 2-wertigen Logiken schon eine ***starke Einschräkung*** in sich, was allerdings erst im Semantik-Schema erläutert wird. Aus einer (endlichen) Menge **E** von **EA-Zeichen** (den „elementaren Aussagesymbolen“ oder „Atomen“)**,** sowie den 5 Junktorenzeichen von **J** und den Klammerzeichen), (wird, genau wie in Kap.5.4.1, der *abzähl-*

bar-unendliche Vorrat **P** der **Aussagesymbole** rekursiv konstruiert. Aussagesymbole selbst sind jedoch wieder ***endliche*** Zeichenreihen.

8.1.4 Das Semantik-Schema

Wie bei der 2-wertigen Logik, wollen wir auch hier das **Extensionalitätsprinzip** beibehalten, d.h.: die Bewertung eines zusammengesetzten Aussagesymbols soll sich alleine aus der Bewertung seiner EA-Zeichen und aus der Art der vorkommenden Junktoren ergeben.

Um aus der Kunstsprache **P** eine mehrwertige Logik zu machen, brauchen wir wieder einen festen **Bewertungsbereich B**. Das sei nun eine ***endliche*** m-elementige Menge **B** = $\{\underline{0}, w_2,\ldots,w_{m-1}, \underline{1}\}$ mit den zwei besonderen Elementen $\underline{1}$ und $\underline{0}$. Die Anzahl m sei eine feste, nicht zu große natürliche Zahl >2, die wir aber vorerst noch nicht absolut festlegen. Die Elemente von **B** nennen wir einfach „**Werte**“ (statt wie früher „Wahrheitswerte“. Manche bezeichnen sie auch als „Pseudo-Wahrheitswerte“, aber das Wort ist unnötig lang).

Die **Junktorenabbildung** γ bildet die Junktoren wieder ein-eindeutig auf gewisse Operatoren auf dem Bewertungsbereich **B** ab.

$$\gamma(\neg) = *, \quad \gamma(\wedge) = \bullet, \quad \gamma(\vee) = +, \quad \gamma(\Rightarrow) = \rightarrow, \quad \gamma(\Leftrightarrow) = \leftrightarrow.$$

* ist ein 1-stelliger, und $\bullet$, +, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ sind 2-stellige Operatoren auf **B.** Sei Σ eine ***endliche*** Menge von Aussagesymbolen und :E(Σ) die Menge der in Σ vorkommenden EA-Zeichen. Eine „**Deutung**" von Σ ist wieder ein Tripel (γ, δ, $\beta°$) bestehend aus der Junktorenabbildung γ, einer Abbildung δ der EA-Zeichenmenge E(Σ) in die Menge der Elementaraussagen eines Anwendungsgebietes und einer **Elementarbelegung** $\beta°$, die jedem EA-Zeichen $a \in E(\Sigma)$ einen Wert $\beta°(a) \in$ **B** zuordnet. Die aus $\beta°$ abgeleitete **Belegung** β:**P**$\rightarrow$**B** muss nun ***explizit*** für ***alle*** Junktoren definiert werden. Die Definition lautet (ausführlicher als in Kap.5.4.3) so:

Def. Belegung β zur Elementarbelegung $\beta°$ (rekursive Definition):

(1) Ist a ein EA-Zeichen, $a \in E(\Sigma)$, so sei $\beta(a) := \beta°(a)$ und $\beta(\neg a) := (\beta°(a))^*$.

(2) Sind $a,b \in E(\Sigma)$, so sei $\beta(a \wedge b) := \beta°(a) \bullet \beta°(b)$, $\beta(a \vee b) := \beta°(a) + \beta°(b)$, $\beta(a \Rightarrow b) := \beta(a) \rightarrow \beta(b)$, $\beta(a \Leftrightarrow b) := \beta(a) \leftrightarrow \beta(b)$

(3) Ist X ein zusammengesetztes Aussagesymbol ($X \in \Sigma$), so sei $\beta(\neg X) := (\beta(X))^*$.

(4) Sind X, Y zusammengesetzte Aussagesymbole ($X, Y \in \Sigma$), so sei $\beta(X \wedge Y) := \beta(X) \bullet \beta(Y)$, $\beta(X \vee Y) := \beta(X) + \beta(Y)$, $\beta(X \Rightarrow Y) := \beta(X) \rightarrow \beta(Y)$, $\beta(X \Leftrightarrow Y) := \beta(X) \leftrightarrow \beta(Y)$.

Jede *Deutung* hängt nun ganz davon ab, wie wir die ***algebraische Struktur*** (**B**, *, •, +, →, ↔) wählen. Ist sie einmal festgelegt, so ist die mehrwertige, das *Exensionalitätsprinzip* berücksichtigende, Aussagenlogik **(P, B, γ)** festgelegt. Bei einer schon gegebenen Anwendung δ kann man die ***Belegungen*** β variieren.

8.1.5 Kriterien für die Auswahl einer m-wertigen Logik

Wie wollen wir die Struktur (**B**, *, •, +, →, ↔) des Bewertungsbereichs festlegen? -- Der Mathematiker stellt zunächst einmal fest, dass es auf einer m-elementigen Menge **B** insgesamt

m^m 1-stellige Funktionen n_i: $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ ($i = 1, 2, \ldots, m^m$) und

$m^{m.m}$ 2-stellige Funktionen f_k: $\mathbf{B} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ ($k = 1, 2, \ldots, m^{m.m}$)

gibt. Bei m=2 (2-wertige Logik) gibt es $m^m = 2^2 = 4$ 1-stellige und $m^{m.m} = 2^{2.2} = 16$ 2-stellige Funktionen, von denen aber insgesamt nur fünf logisch relevant sind (vgl. Kap.5.3). Diese fünf bilden sogar eine vollständige Funktionsbasis auf {1, 0}.

Aber schon bei m=3 (eine 3-wertige Logik) gibt es $3^3 =$ **27** 1-stellige und $3^9 =$ **19.683** 2-stellige Funktionen auf **B**.

Wir wollen aber auch für mehrwertige Logiken wieder

- ***nur eine*** mit * bezeichnete 1-stellige und
- ***nur vier*** mit •, +, →, ↔ bezeichnete 2-stellige Funktionen

als logisch relevant ansehen. Warum? – *Das ist rein* ***sprachlich*** *motiviert*: Nur für die entsprechenden Junktoren ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ haben sich in der Umgangssprache gebräuchliche Redewendungen eingebürgert, nämlich „***nicht***“, „***und***“, „***oder***“, „***wenn … dann …***“, „***… genau dann, wenn …***“ (oder „*dann und nur dann, wenn* …“).

Für gegebene Werteanzahl m>2 bildet die Menge {*, •, +, →, ↔} dann aber i.allg. ***keine*** *vollständige Funktionsbasis* auf **B** (d.h. mit den fünf Funktionen *, •, +, →, ↔ kann man nicht alle m^m 1-stelligen und nicht alle $m^{m.m}$ 2-stelligen Funktionen auf **B** ausdrücken). Daher gibt es für jedes feste m>2 grundsätzlich sehr viele verschiedene Algebren auf **B** mit nur einer 1-stelligen Funktion * und nur vier 2-stelligen Funktionen •, +, →, ↔. Also gäbe es bei fester Anzahl m>2 der Werte auch sehr viele verschiedene m-wertige „Logiken“ **(P, B, γ).**

Um nicht allzusehr von der Struktur der 2-wertigen Logik abzuirren, stellen wir ein paar Kriterien auf, welche die 2-wertige Logik erfüllt, und welche auch ein m-wertiges System **(P, B, γ)** mit m>2 erfüllen sollte, damit es mit einigem Recht eine auf dem ***Extensionalitätsprinzip*** basierende „Logik“ genannt werden darf.

Anmerkung-0: Alle im Folgenden aufgelisteten Kriterien werden von der klassischen 2-wertigen Logik **erfüllt**. Die Kriterien sind (stärkere oder schwächere) Vorschläge dafür, wie man eine mehrwertige Logik aus den vielen Möglichkeiten auswählen sollte, so dass sie der klassischen 2-wertigen Logik *nicht zu ferne* liegt. Mit Auflistung der Kriterien ist noch *nicht* gemeint, dass sie in einer bestimmten mehrwertigen Logik *alle zugleich* gelten sollen. Auch sind die Kriterien nicht alle unabhängig von einander.

Krit-1: Die sog. „**Normalbedingung**“: Die Operatoren *, •, +, →, ↔ lassen sich auf die Teilmenge $\{\underline{1}, \underline{0}\} \subset \mathbf{B} = \{\underline{0}, w_2,...,w_{m-1}, \underline{1}\}$ derart beschränken, dass $(\{\underline{1}, \underline{0}\}, *, \bullet, +, \rightarrow, \leftrightarrow)$ die Struktur des Booleschen 2-er-Verbandes der ***klasischen 2-wertigen*** Logik wird.

Anmerkung-1: Das Kriterium-1 bedeutet: Bei jeder der als „vernünftig“ angesehenen m-wertigen Logiken soll die klassische 2-wertige Logik stets inbegriffen sein.

Krit-2: Die sog. „**Standardbedingungen**“: Auf dem Bewertungsbereich $\mathbf{B} = \{\underline{0}, w_2,...,w_{m-1}, \underline{1}\}$ sei eine echte Teilmenge $\mathbf{W} \subset \mathbf{B}$ ausgezeichnet mit $\underline{1} \in \mathbf{W}$, $\underline{0} \notin \mathbf{W}$, so dass die Operatoren *, •, +, → für alle $x, y \in \mathbf{B}$ den 4 folgenden Eigenschaften genügen:

(i)	$x^* \in \mathbf{W}$	genau dann, wenn	$x \notin \mathbf{W}$
(ii)	$x \bullet y \in \mathbf{W}$	genau dann, wenn	$x \in \mathbf{W}$ und $y \in \mathbf{W}$
(iii)	$x+y \notin \mathbf{W}$	genau dann, wenn	$x \notin \mathbf{W}$ und $y \notin \mathbf{W}$
(iv)	$x \rightarrow y \notin \mathbf{W}$	genau dann, wenn	$x \in \mathbf{W}$ und $y \notin \mathbf{W}$.

Anmerkung-2: Die Wertemenge **W** nennt man auch einen „**Designationsbereich**".Die Werte von **W** kann man, in Verallgemeinerung der 2-wertigen Logik, als «*Wahrwerte*» interpretieren. Ob man die anderen Werte, also die x mit $x \in \mathbf{B}$, $x \notin \mathbf{W}$ als «*Falschwerte*» interpretiert, wird dabei offen gelassen. Warum werden diese Bedingungen «*Standard-bedingungen*» genannt ? -- Ersetzt man in (i) bis (iv) « … $\in \mathbf{W}$ » durch « …=$\underline{1}$ » bzw. « … $\notin \mathbf{W}$ » durch « … =$\underline{0}$ » so kommt man gerade auf die Definition der Operatoren für die klassische 2-wertige Logik.
Die Kriterien 1 und 2 habe ich aus [SG_MWL] übernommen und hier in meine Terminologie übersetzt.

Krit-3: Auf **B** gibt es eine Ordnung $\leq$, so dass die Struktur **(B, $\leq$)** ein m-elementiger **vollständiger Verband** wird, mit $\underline{1}$ = sup**B** als größtem und $\underline{0}$ = inf**B** als kleinstem Element. Die beiden Operatoren $\bullet$, + werden wie folgt festgelegt: $x \bullet y := \inf\{x,y\}$, $x+y := \sup\{x,y\}$ für alle $x,y \in$ **B.**

Anmerkung-3: Mit Krit-3 gilt, wie man leicht nachweist, für alle $x,y \in \mathbf{B}$:

$x \leq y$ genau dann, wenn $x \bullet y = x$ und $y = x+y$.

Es darf aber auch „unvergleichbare“ x,y geben. Zwei Werte $x,y \in \mathbf{B}$ heißen „***unvergleich-bar***“, wenn weder $x \leq y$ noch $y \leq x$ gilt. Die anderen drei Operatoren *, →, ↔ sind dadurch im Fall m>2 noch ***nicht*** festgelegt! Das Kriterium-3 gilt natürlich im Fall m=2: Auf der Teilmenge {1, 0} drückt sich die „Ordnung“ einfach durch 0 < 1 aus

Anmerkung-4: Warum führe ich das Kriterium-3 an? – Es ist eine mathematische Formalisierung meines Sprachverständnisses über den Gebrauch der Verbindungswörtchen „***und***“ u. „***oder***“, das ich in Kap. 8.1.2 geschildert habe; und das ist noch unabhängig von irgendeiner Bewertung von Äußerungen als „wahr“ / „falsch“ / oder irgendeinem anderen „Wert“. In der klassischen 2-wertigen Logik ist es gegeben mit Festlegung einer „trivialen“ Ordnung durch $0 \leq 1$, $0 \neq 1$ auf der Wertemenge {1, 0}.

Weitere „vernünftige“ (d.h. 2-wert-Logik-nahe) aber etwas schwächere Kriterien sind:

Krit-4: Im Fall, dass auf **B** eine Ordnung ≤ eingeführt ist mit $0<1$, „***respektiert***“ der 1-stellige Verneinungsoperator * die Ordnung ≤. „Respektieren“ soll heißen: Für alle $x,y \in \mathbf{B}$ gilt: Wenn $x \leq y$ dann $y^* \leq x^*$.

Krit-5: Der Verneinungsoperator * ist eine **Involution** auf **B**, d.h.: *** : B →B** ist eine Abbildung mit x**=x für alle x∈ **B.** (Das entspräche dem Prinzip „doppelte Verneinung ist Bejahung“).

Krit-6: Für den Implikationsoperator → gilt x→x=1 für alle x∈ **B.** (D.h. die „triviale Implikation“ sei „allgemeingültig“, sofern man 1 als „Wahr-Wert“ interpretiert.)

Krit-7: Der Implikationsoperator → leitet sich aus * und + ab durch x→y := x*+y für alle x,y∈ **B.** (So wird → ja in der klassischen Logik definiert.)

Krit-8: Der Äquivalenzoperator ↔ leitet sich aus → und • ab durch x↔y := (x→y)•(y→y) für alle x,y∈ **B.**

Man könnte noch weitere (schwächere) Kriterien aufstellen, die alle durch die klassische 2-wertige Logik erfüllt werden. Wir belassen es bei der obigen Liste.

8.1.6 Metasprachliches zu mehrwertigen Logiken

Bevor wir die o.a. Kriterien zur Auswahl mehrwertiger Logiken verwenden, wollen wir andeuten, was an Metasprachlichem aus der klassischen Logik übernommen werden kann, und was abgeändert werden muss.

Bei den metasprachlichen Begriffen orientieren wir uns an den Definitionen in Kap.5.4.4.1 - 5.4.4.3 für die 2-wertige Aussagenlogik. Wir werden hier nicht besonders ausführlich sein und begnügen uns mit den notwendigsten Analogien.

Wie in Kap.5.4.4.1 heißen zwei Aussagesymbole X, Y **logisch äquivlent**, in Zeichen: $X \cong Y$, wenn $\beta(X)=\beta(Y)$ für *jede* Belegung. Ob jedoch der Zusammenhang zwischen der Relation $X \cong Y$ und dem Aussagesymbol $X \Leftrightarrow Y$ so wie in Kap.5.4.4.1 ist, hängt davon ab, wie der Junktor $\Leftrightarrow$ und wie eine „Tautologie“ definiert werden. Für eine Definition des Tautologie-Begriffs gibt es z.B die zwei folgenden Möglichkeiten:

Def.1: Ein Aussagesymbol T heiße eine „**c-Tautologie**“, wenn es eine Konstante $c \in \mathbf{B}$ gibt mit $\beta(T)=c$ für *alle* Belegungen β des Aussagesymbols T.

Für die Definition der zweiten Möglichkeit benötigen wir die Auszeichnung eines ***Designationsbereichs*** $\mathbf{W} \subset \mathbf{B}$ wie in Kriterium-2 angegeben. Es müssen aber nicht alle Standardbedingungen [Krit-2: (i) bis (iv)] erfüllt sein:

Def.2: Ein Aussagesymbol T heiße eine **Tautologie** (besser: *„W-Tautologie“*), wenn $\beta(T) \in \mathbf{W}$ gilt für *alle* Belegungen β.

Ob es überhaupt *c-Tautologien* in einer mehrwertigen Logik **(P, B, γ)** gibt, hängt ganz von der gewählten Struktur des Bewertungsbereichs **B** ab. Ob es W-*Tautologien* gibt, hängt

darüber hinaus noch von der Wahl des *Designationsbereichs* **W** ab. Der Begriff „Antilogie“ bleibe undefiniert, weil mit **W** nur „*Wahrwerte*“ aus **B** ausgewählt werden.

Def.3: Sei Σ eine ***endliche*** Menge von Aussagesymbolen und A ein einzelnes Aussagesymbol. Eine Belegung β heißt ein **Modell** für Σ, wenn $\beta(X) \in$ **W** für *alle* $X \in \Sigma$. Σ heißt **erfüllbar**, wenn es ein Modell für Σ gibt, ansonsten **unerfüllbar**. Man sagt: „A **folgt semantisch** aus Σ“, in Zeichen $\Sigma \models A$, wenn *jedes* Model für Σ auch ein Modell für A ist. Ist T eine **W**-Tautologie, so schreibt man $\models T$ (Begründung dafür wie in Kap.5.4.4.1).

Wie in Kap.5.4.4.2 gilt: Eine mehrwertige Aussagenlogik ist **entscheidbar**. Denn, sobald die fünf Operationen *, •, +, →, ↔ auf **B** festgelegt sind, kann man für jedes gegebene Aussagesymbol X mit einer *endlichen* Wertetabelle alle Belegungen $\beta(X)$ ausrechnen.

Die Definition dafür, was ein **syntaktischer Beweis** ist, ist gleichlautend wie in Kap.5.4.4.3. Es kommt aber darauf an, was für ein System **SR** von Herleitungsregeln man zur Logik **(P,B,γ)** wählt. Das Herleitungssystem **SR** heißt wieder **korrekt**, wenn für jedes Paar Σ, A gilt: Ist A aus Σ mit **SR** herleitbar (in Zeichen $\Sigma \vdash_{SR} A$), so folgt A auch semantisch aus Σ (in Zeichen $\Sigma \models A$). **SR** heißt wieder *adäquat* oder **semantisch vollständig**, wenn umgekehrt für jedes Paar Σ, A gilt: Folgt A aus Σ semantisch ($\Sigma \models A$), so ist A mit **SR** auch aus Σ herleitbar ($\Sigma \vdash_{SR} A$).

Mathematiker streben besonders solche mehrwertigen Logiken **(P,B,γ)** an, für die es ein Herleitungssystem **SR** gibt, das **korrekt *und* semantisch vollständig** ist. (In [SG_MWL] / S.39ff sind solche angegeben.) Für die Praxis jedoch sind auch mehrwertige Logiken interessant, für die das nicht der Fall ist.

8.1.7 Verbandslogiken

Mit Hilfe einiger Kriterien aus Kap. 8.1.5 schränken wir nun den Bereich der vielen möglichen mehrwertigen Logiken **(P, B, γ)** schrittweise ein. Zuerst entscheiden wir uns aus den in Kap.8.1.2 genannten Gründen für das **Kriterium-3** und nennen eine m-wertige Logik **(P, B, γ)**, deren Bewertungsbereich **B**={$\underline{0}$, w_2, …,w_{m-1}, $\underline{1}$} ein **Verband** (**B**, ≤, •, +) mit $\underline{0}$=inf**B**, $\underline{1}$=sup**B** ist, eine „**Verbandslogik**“. Die beiden Operatoren γ(∧)=•, γ(∨)=+ sind damit festgelegt. Die anderen Operatoren γ(¬)=*, γ(⇒)=→, γ(⇔)=↔ sind noch *völlig frei wählbar*. Wir unterscheiden noch zwei Unterfälle:

(i) Die Ordnung $\leq$ bzw. der Verband **B** heiße „**linear**“ (oder „*total*“), wenn jedes Paar $x,y \in \mathbf{B}$ vergleichbar ist, d.h. wenn für *alle* $x,y \in \mathbf{B}$ entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.
(ii) Andernfalls, d.h. wenn es unvergleichbare $x,y \in \mathbf{B}$ gibt (d.h. weder $x \leq y$ noch $y \leq x$), heiße $\leq$ bzw. **B „nicht-linear“**.

Zu (i): Ist **B** *linear*, so seien die **B**-Werte $\underline{0}$, w_2, …,w_{m-1}, $\underline{1}$ stets in der Form

$\underline{0} < w_2 < \ldots < w_{m-1} < \underline{1}$ geordnet.

Ein *linearer* Verband ist übrigens, wie man leicht zeigt, **distributiv**, d.h. für alle $x,y,z \in \mathbf{B}$ gilt $x \bullet (y+z) = (x \bullet y)+(x \bullet z)$, $x+(y \bullet z) = (x+y) \bullet (x+z)$.

Zu (ii): Ist **B** *nicht-linear*, so gibt es bei jedem m mehrere Möglichkeiten für die Ordnung $\leq$. Nicht-lineare Verbände kann man aus linearen Verbänden leicht folgendermaßen konstruieren: Seien (**B**, $\leq$, $\bullet$,+), (**B**‘, $\leq$‘, $\bullet$‘, +‘) zwei lineare Verbände. Wir bilden das direkte Produkt **B‘‘:=B×B‘,** und definieren auf **B**‘‘ eine Relation $\leq$‘‘ und zwei Verknüpfungen $\bullet$‘‘, +‘‘ so: $(x,y) \leq‘‘ (u,v)$:genau dann wenn $x \leq u$ und $y \leq‘ v$,

$(x,y) \bullet‘‘ (u,v) := (x \bullet y , u \bullet‘ v)$, $(x,y)+‘‘(u,v) := (x+y , u+‘v)$ für alle $x,u \in \mathbf{B}$, $y,v \in \mathbf{B}$‘.

Dann ist die Struktur (**B**‘‘, $\leq$‘‘, $\bullet$‘‘, +‘‘) ein nicht-linearer Verband. (Nichtlineare Verbände sind i. allg. nicht mehr distributiv.) Diese Konstruktion kann man auch wiederholen und kann so aus n Verbänden $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, …, $\mathbf{B_n}$ einen komplexeren nichtlinearen Verband $\mathbf{B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n}$ herstellen. Das kann man auch für Logiken ausnutzen, um aus zwei schon

gegebenen Verbandslogiken **(P, B_1, γ_1), (P, B_2, γ_2)** über der formalen Sprache **P** eine komplexere mehrwertige Verbandslogik **(P×P, B_1×B_2, $\gamma_1 \circ \gamma_2$)** über der „Paar-Sprache“ **P×P** herzustellen. – Wir werden dazu später in Kap.8.1.7.5 ein Anwendungsbeispiel aus der *indischen Logik* geben.

8.1.7.1 Bestimmung der Operatoren *, →, ↔

Das Kriterium-1 gilt wegen der Wahl des Krit-3 schon für • und +.

(a) Wir fordern Krit-1, also die „*Normalbedingung*“, auch für die restlichen drei Operatoren *, →, ↔.

(b) Zur Festlegung von * und → wählen wir zwei Alternativen Alt-1, Alt-2 aus (s.u.).

(c) Zur Festlegung des Operators ↔ nehmen wir das Krit-8:
also: $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \bullet (y \rightarrow x)$.

Alt-1: (i) Krit-4 und Krit-5 für den Verneinungsoperator *, also:
* *respektiert* die Ordnung ≤ auf B, und $x^{**} = x$ für alle $x,y \in$ **B.**

(ii) Krit-7 für den Implikationsoperator $\rightarrow$, also: $x \rightarrow y := x^* + y$ für alle $x,y \in$ **B.**
Mit dem so definierten Implikations- und Verneinungsoperator wird der Verband **B** zu einem sogenannten **Kleene-Verband.** Die *Normalbedingung* (Krit-1) ist hierbei für alle Operatoren erfüllt.

Alt-2: Setze für beliebige $a, b \in$ **B**: $H(a,b) := \{x: \in \mathbf{B} \mid a \bullet x \leq b\}$.
Da jeder endliche Verband vollständig ist, existiert in **B** das Supremum der Menge H(a,b) für jedes Paar $a,b \in$ **B**. Damit wollen wir die Operatoren $\rightarrow$ und * wie folgt definieren:

(i) $a \rightarrow b \quad := \sup H(a,b)$ (Inplikationsoperator).
(ii) $a^* \quad := a \rightarrow \underline{0}$ (Verneineinungsoperator)

Mit dem so definierten Implikations- und Verneinungsoperator wird der Verband **B** zu einem so genannten **Heyting-Verband.** Die *Normalbedingung* (Krit-1) ist hierbei für alle Operatoren erfüllt.

Wir haben somit für jedes m zwei „einigermaßen vernünftige“ m-wertige Logiken ausgewählt. („Vernünftig“ heißt anwendbar.)

Mit Auswahl (a),(b),(c)/Alt-1 nennen wir **(P,B,γ)** eine „**Kleene-Logik**“,
Mit Auswahl (a),(b),(c)/Alt-2 nennen wir **(P,B,γ)** eine „**Heyting-Logik“.**

Setzt man m:=2, so sind beide Logiken identisch mit der klassischen 2-wertigen Aussagenlogik. In was unterscheiden sich die beiden m-wertigen Logiken für m>2 von der klassischen 2-wertigen Logik? – Zusammenfassung:

- Eine *Kleene-Logik* erfüllt die Kriterien 1, 3, 4, 5, 7, 8.
- Eine Heyting-Logik erfüllt die Kriterien 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8.

8.1.7.2 Merkmale linearer Kleene- und Heyting-Logiken

Wir geben einige Merkmale an und beschränken uns dabei zunächst auf den Fall, dass der Bewertungsverband ***linear*** ist, denn für den *nicht-linearen* Fall können wir durch Produktbildungen $\mathbf{B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n}$ (vgl. S. 182) jederzeit genügend viele ***nicht-lineare*** Kleene- und Heyting-Logiken und auch deren Mischformen herstellen.

Merkmale einer Kleene-Logik: Wir zeichnen hier *keinen* Designationsbereich **W** aus. Statt des Begriffs der „W-Tautologie“ können wir also nur den Begriff der ***„c-Tautologie“*** verwenden. In einer m-wertigen *linearen* Kleene-Logik mit m>2 ermittelt man für beliebige Aussagesymbole X, Y:

(i) $\neg\neg X \cong X$**,** doppelte Verneinung ist Bejahung; Krit-5 ist also erfüllt.
(ii) $X \Rightarrow Y \cong \neg X \vee Y$, mit Krit-7 ist $\Rightarrow$ bis auf Äquivalenz aus $\neg$ und $\vee$ abgeleitet.

(iii) $\neg(X \vee Y) \cong \neg X \wedge \neg Y$, $\neg(X \wedge Y) \cong \neg X \vee \neg Y$, Regeln von De-Morgan.

(iv) $X \wedge Y \cong \neg(\neg X \vee \neg Y)$, $X \vee Y \cong \neg(\neg X \wedge \neg Y)$, d.h. der Junktor $\wedge$ kann bis auf Äquivalenz aus $\vee$ und $\neg$ abgeleitet werden; ebenso der Junktor $\vee$ aus $\wedge$ und $\neg$.

(v) $\neg(X \wedge \neg X)$ ist ***keine*** c-Tautologie, d.h.: der *„Satz vom Widerspruch“* gilt ***nicht***.

(vi) $\neg X \vee X$ ist ***keine*** c-Tautologie, d.h.: das „*tertium non datur*“ gilt ***nicht***.

(vii) Ist m ***ungerade***, so gibt es zu jeder Aussage X eine Belegung β mit $\beta(X) = \beta(\neg X)$; „Verneinung“ hat hier also eine von der 2-Wert-Logik abweichende Bedeutung!

(viii) $(\neg Y \Rightarrow \neg X) \cong (X \Rightarrow Y)$, d.h. der „Umkehrschluss“ (Kontraposition) gilt.

(ix) $X \Rightarrow X$ („triviale Implikation“) ist ***keine*** c-Tautologie, denn $X \Rightarrow X$ ist ja mit Krit-7 äquivalent zu $\neg X \vee X$, und $\neg X \vee X$ ist keine c-Tautologie.

(x) Wenn $X \cong Y$, dann muss $(X \Leftrightarrow Y)$ ***keine*** c-Tautologie sein! Der Zusammenhang zwischen logischer Äquivalenz $\cong$ und dem Junktor $\Leftrightarrow$ ist also ein *anderer* als in der 2-wertigen Logik!

(xi) Ist X ein Aussagesymbol, in dem der Junktor $\Leftrightarrow$ *nicht* vorkommt, so kann X ***keine*** c-Tautologie sein. D.h.: Ohne „$\Leftrightarrow$“ gibt’s keine c-Tautologien.
(Das beweist man durch mathematische Induktion über den Aufbau der Aussagesymbole.)

Merkmale einer Heyting-Logik: Die Merkmale einer Heyting-Logik zeigt man zunächst leichter an den Gesetzen des Bewertungsverbands. Als Designations-bereich kann man **W**={1} wählen; als Tautologiebegriff die „1-Tautologie“.

In einem m-wertigen *linearen* Heyting-Verband (**B**, ≤; *, +, •,→) mit m>2 gilt für alle a,b ∈ **B**:

(i) a →b = 1 für a≤b
= b für b<a -- speziell: a →a = 1 ("triviale Implikation“ ist 1-Tautologie)

(ii) a* = 1 für a=0
= 0 für 0<a -- speziell: 1*=0, 0*=1 (Negation)

(iii) a** = 0 für a=0
= 1 für 0<a (* ist für *keine* Involution; doppelte Verneinung ist *keine* Bejahung)

(iv) a•a* = 0, (a•a*)*= 1 (d.h., der *„Satz vom Widerspruch“ ist eine 1-Tautologie*)

(v) a+a* = 1 für a=0
= a für 0<a (das *„tertium non datur“* ist *keine* 1-Tautologie)

(vi) (a•b)* = a*+b* , (a+b)* = a*•b* (die Regeln von De Morgan gelten)

(vii) $a+b = (a^*\bullet b^*)^*$, $a\bullet b = (a^*+b^*)^*$ (+ ist durch • und * definierbar, ebenso ist • durch + und * definierbar)

(viii) $a \rightarrow b = a^*+b$ (Krit-7 gilt d.h.: → ist aus * und + ableitbar)

In die Terminologie der Aussagenlogik übersetzt heißt das:

(a) Wie in der klassischen Logik gelten die 1-Tautologien des „*Satzes vom Widerspruch*“ $\neg(X\wedge\neg X)$ und der „*trivialen Implikation*“ $X\Rightarrow X$, ebenso die Äquivalenzen der *De-Morgan-Regeln* $X\wedge Y\cong\neg(\neg X\vee\neg Y)$, $X\vee Y\cong\neg(\neg X\wedge\neg Y)$, und die Äquivalenz $X\Rightarrow Y\cong\neg X\vee Y$ für die Implikation.

(b) Abweichung v.d. klassischen Logik: Das „*tertium non datur*“ $X\vee\neg X$ ist ***keine*** 1-Tautologie. Die doppelte Verneinung $\neg\neg X$ ist ***nicht*** äquivalent zur Bejahung X. Diese Abweichungen von der klassischen Logik befürworten auch die sog. *Intuitionisten* oder *Konstruktivisten* unter den Mathematikern.

8.1.8 Beispiel-1: Eine Meinungslogik

Wir betrachten eine 6-wertige lineare ***Kleene-Logik***. Die 6 Elemente des linearen Bewertungsverbands seien so geordnet

$\underline{0} < w_2 < ... < w_5 < \underline{1}$,

wobei „x<y“ soviel wie „x≤y und x≠y“ bedeutet.

Eine dazu passende Anwendung ist z.B. eine **Meinungsumfrage**, in der viele Meinungen zu einem gewissen – etwa politischen – **Thema** in 6 Klassen eingeteilt werden sollen. Die Gesamtheit **M** aller zu erhebenden Meinungen entspricht einer Teilmenge der formalen Sprache **P**. Da nicht jeder Befragte seine eigene Meinung zum Thema des Langen und Breiten in die Umfrageerhebung einbringen kann, formuliert das Meinungsinstitut 6 „Vorbewertungen“ zum Thema und nimmt die Meinung der Befragten dadurch auf, dass es jeden Befragten eine (oder mehrere) der 6 Vorbewertungen ankreuzen lässt. Nach Auswertung der Statistik hat nun jeder der 6 Vorwerte eine Häufigkeit, ein „Gewicht“. Ordnet man die Vorwerte nach diesem Gewicht, so bekommt man (nach Normierung

auf 0 ... 1) als Ergebnis eine Skala $0 < w_2 < ... < w_5 < 1$ als die Ordnung eines *linearen Verbandes* **B**.

Jedem Wert w dieser Skala entspricht eine Klasse M(w) von Meinungen in **M**. Der Wert 0 gibt an, dass die wenigsten der Befragten eine Meinung der Klasse M(0) vertreten, 1 gibt an, dass die meisten der Befragten eine Meinung der Klasse M(1) vertreten. Eine Meinung der Klasse M(0) kann man als *„am wenigsten mehrheitsfähig“*, eine der Klasse M(1) als *„am mehrheitsfähigsten“* bezeichnen. Und als Verallgemeinerung dazu: Sind v, w zwei Skalenwerte mit v<w, so kann man eine Meinung der Klasse M(w) im Sinne der erhobenen Umfrage *„mehrheitsfähiger“* nennen als eine Meinung aus der Klasse M(v).

Bei der weiteren Interpretation des Umfrageergebnisses wird sich das Umfrageinstitut nicht nur der „primitiven“ wahr/falsch-Logik,

sondern auch der des linearen Verbandes (**B**, $\leq$, +, $\bullet$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) bedienen: Operiert es mit $X \vee Y$ bzw. $X \wedge Y$ für Meinungen $X, Y \in$ **M,** so benutzt es die Deutungen $\gamma_\vee$ = +, $\gamma_\wedge = \bullet$ des Verbandes **B,** d.h.:

„*Die Mehrheitsfähigkeit von $X \vee Y$ ist der **größere** der beiden Mehrheitsfähigkeitswerte von X, Y; die Mehrheitsfähigkeit von $X \wedge Y$ ist der **kleinere** der beiden Mehrheitsfähigkeitswerte von X, Y“* im Sinne der linearen Verbandsordnung $\leq$.

Zur Analyse des Umfrageergebnisses wird auch eine „*Verneinung*“ einer Meinung von Nöten sein. Eine recht einfache ist: „*Ist X weniger mehrheitsfähig als Y, so sei $\neg X$ mehrheitsfähiger als $\neg Y$“.*

Um bei dieser Interpretation von „Verneinung“ nicht in die Verlegenheit zu kommen, dass ein X genauso mehrheitsfähig ist wie $\neg X$, kann man, wie hier geschehen, die Anzahl m der Meinungsklassenan als ***gerade*** Zahl wählen.

Schließlich wird das Umfrageinstitut mit den Umfrageergebnissen auch Implikationsaussagen der Form $X \Rightarrow Y$ („wenn X dann Y“) aussprechen wollen.

Welche **B**-Verknüpfung → könnte man dem **Implikations-Junktor** $\Rightarrow$ zuweisen? -- Verfolgt das Umfrageinstitut die Strategie, dass es aus einer Meinung X möglichst *keine Aussage folgern will, die „weniger mehrheitsfähig“ als die Prämisse X* ist, so wird es der Festlegung $X \Rightarrow Y$ durch $\neg X \vee Y$ folgen (wie im klassischen Fall).

Wir geben nun für das Beispiel, die **Verknüpfungstabellen** des 6-wertigen Verbandes **B** für $\gamma_\neg = *$, $\gamma_\vee = +$, $\gamma_\wedge = \bullet$ und $\gamma_\Rightarrow = \rightarrow$ an, welche das Umfrageinstitut auf Grund der bisherigen Überlegungen benutzen mag. Dabei schreiben wir gleich statt der abstrakt anmutenden Wertebezeichnungen $\underline{0}$, w_2, w_3, w_4, w_5, $\underline{1}$ die Werte als 0, 20%, 40%, 60%, 80%, 1, so wie es der lesbaren Darstellung

eines Umfrageergebnisses entspricht. Daraus ergeben sich folgende Verknüpfungstabellen:

Der Verneinungsoperator x*=?

x	0	20%	40%	60%	80%	1
x*	1	80%	60%	40%	20%	0

Die „oder“ Operation x+y =?

		y	y	y	y	y	y
	x+y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	0	20%	40%	60%	80%	1
x	20%	20%	20%	40%	60%	80%	1
x	40%	40%	40%	40%	60%	80%	1
x	60%	60%	60%	60%	60%	80%	1
x	80%	80%	80%	80%	80%	80%	1
x	1	1	1	1	1	1	1

Die „und“ Operation x•y =?

		y	y	y	y	y	y
	x•y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	0	0	0	0	0	0
x	20%	0	20%	20%	20%	20%	20%
x	40%	0	20%	40%	40%	40%	40%
x	60%	0	20%	40%	60%	60%	60%
x	80%	0	20%	40%	60%	80%	80%
x	1	0	20%	40%	60%	80%	1

Die Implikation x→y = x*+y=?

		y	y	y	y	y	y
	x→y	0	20%	40%	60%	80%	1
x	0	1	1	1	1	1	1
x	20%	80%	80%	80%	80%	80%	1
x	40%	60%	60%	60%	60%	80%	1
x	60%	40%	40%	40%	60%	80%	1
x	80%	20%	20%	40%	60%	80%	1
x	1	0	20%	40%	60%	80%	1

Die Verknüpfungstabellen für + und • sind natürlich dieselben wie bei *jedem* beliebigen 6-elementigen *linearen* Verband.

Nur die Tabelle für → hängt von der speziellen Wahl der *Kleene*-Logik ab.

Schaut man sich die Tabelle für → an, so kann man $X \Rightarrow Y$ folgendermaßen interpretieren, wenn man bei einer gegebenen Belegung β sagt: X sei *„weniger mehrheitsfähig“* bewertet als Y genau dann, wenn $\beta(X)<\beta(Y)$ ausfällt:

„Je weniger mehrheitsfähig die Prämisse X bewertet ist, desto weniger mehrheitsfähig darf auch die Konklusion Y bewertet sein, damit die Implikation $X \Rightarrow Y$ selbst als nicht zu wenig mehrheitsfähig bewertet erscheint“.

Oder (was auf dasselbe hinausläuft):

„Je mehrheitsfähiger die Prämisse X bewertet ist, desto mehrheitsfähiger muss auch die Konklusion Y bewertet sein, damit die Implikation $X \Rightarrow Y$ selbst als hinreichend mehrheitsfähig bewertet erscheint“.

Diese Interpretation entspricht, meine ich, ganz gut dem, wie Meinungsforscher mit Meinungsergebnissen umgehen, wenn sie aus einer Meinung(sklasse) auf eine andere Meinung(sklasse) schließen.

Bei diesem Beispiel für die Anwendung einer Kleene-Logik sind wir ohne explizite Designation einer Wertemenge $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{B}$ ausgekommen; vielmehr haben wir bei gegebener Belegung β die durch die lineare Ordnung $x \leq y$ (auf **B**) induzierte Quasiordnung $X \blacktriangleleft_\beta Y$ interpretiert als: „*X ist nicht mehrheitsfähiger als Y*“.

8.1.9 Beispiel-2: Eine Heyting-Logik

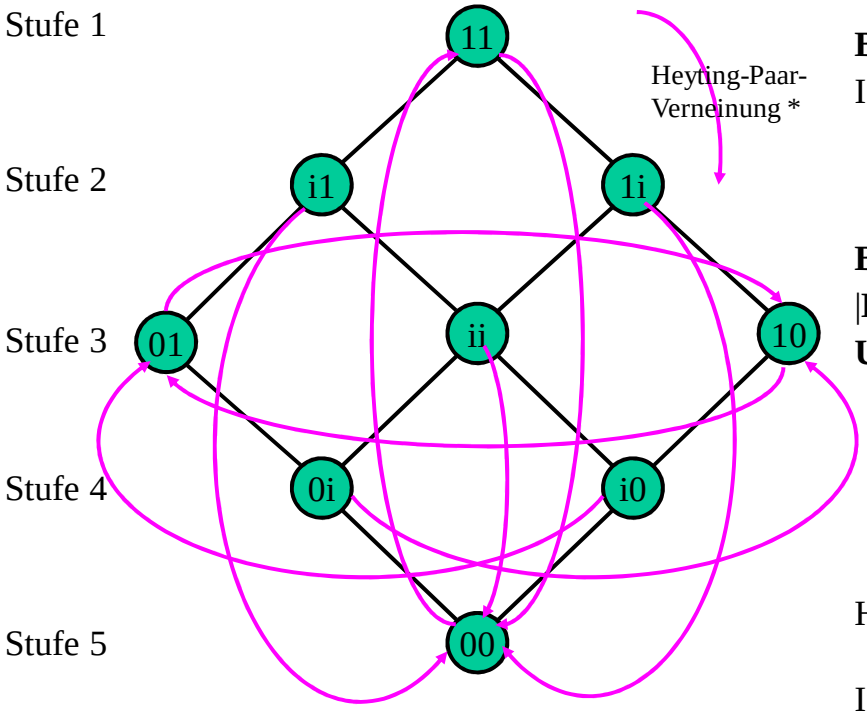
Sei (**B**, ≤; *, +, •, →) ein 3-wertiger Heyting-Verband, **B**={1, i, 0}, mit 0<i<1. Wir bilden das Produkt $\mathbf{B}^2$:= {(x,y) | x,y∈ **B**} und übertragen die Halbordnung ≤ sowie alle Verknüpfungen von **B** „komponentenweise“ auf $\mathbf{B}^2$ durch die Definitionen

(i) (x, y)≤(u, v) :gdw. x≤u und y≤v
(ii) (x, y)* := (x*, y*)
(iii) (x, y)+(u, v) := (x+u, y+v)
(iv) (x, y)•(u, v) := (x•u, y•v)
(v) (x,y)→(u, v) := (x→u, y→v)

Damit bekommen wir in natürlicher Weise einen ***nichtlinearen*** 9-wertigen Heyting-Verband ($\mathbf{B}^2$, ≤, *, +, •, →) für die Bewertung von **Paaren** (X,Y) von Aussagesymbolen.

Die Wertepaare (x,y)∈ $\mathbf{B}^2$ schreiben wir einfach als „xy“. Zum Beispiel ist dann (0i)* = 10, (i1)* = 00 usw...(vgl. die Abbildung).

Der Verband **B²** („Heyting-Paar“)



B={0 ,i, 1} Heyting-Dreier-Verband

Interpretation:
1: zutreffend
i: möglich
0: unzutreffend
Wir schreiben xy statt (x,y).

B²={xy | x,y in {0, i, 1}}.

|**B²**| = 3² = 9

Unvergleichbar sind u.a.: alle auf derselben Horizontale liegenden Knoten:
i1, 1i unvglb.,
01, ii, 10 paarweise unvglb.,
0i, i0 unvglb.
Aber auch z.B. 01, 1i unvglb.

Heyting-Verneinung:
1*=0, 0*=1, i*=0 (!)

Interpretationsprinzip:
„Was weder *zutreffend* noch *möglich* ist, ist *unzutreffend* “

Die Abbildung zeigt den Graphen des nichtlinearen Heyting-Verbandes, wobei die Ordnung xy<uv durch „xy weiter unten, uv weiter oben“ sichtbar gemacht ist. ***Unvergleichbare*** Elemente liegen u.a. auf derselben Horizontalen; man könnte sie auch als „***gleichrangig***“ bezeichnen. Aber auch z.B. 01 und 1i sind unvergeichbar usw…Die roten Pfeile symbolisieren die „Heyting-Paar-Verneinung“ jedes Elements; z.B. (10)*= 01, (0i)*=10.

Ein Anwendungsbeispiel:

Ein Manager muss sich zu **zwei Aufgaben X, Y** entscheiden, welche Bewertung er ihnen für den nächsten Schritt eines Projekts beimisst. Dabei soll er die **B**-Werte
1 („*machbar*“), i („*möglicherweise-machbar*“), 0 („*nicht-machbar*“) unterscheiden und dazu die 3-wertige **Heyting-Logik** benutzen. Die ***Verneinung*** geht hier so:

- Ist X *machbar* oder auch nur *möglicherweise-machbar*, so ist ¬X *nicht-machbar.*
- Ist aber X *nicht-machbar,* so ist ¬X *machbar*.

Für jedes Paar (X,Y) gibt es dementsprechend $3^2=9$ Bewertungs-möglichkeiten $\underline{\beta}(X,Y) := (\beta X, \beta Y)$.

Die Abbildung hilft dem Manager, das Problem erst einmal in 5 Stufen der „Machbarkeit“ einzuteilen:

vom Stufe 1 „*beides machbar*“ im günstigsten Fall
bis Stufe 5 „*keines von beiden machbar*“ im ungünstigsten Fall.

Dazwischen liegen drei Machbarkeitsstufen, bei denen entweder eine der beiden Aufgaben X, Y „*nicht-machbar*“ oder mindestens eine der beiden Aufgaben nur „*möglicherweise-machbar*“ ist. Der Manager erkennt (anhand der Abbildung) aber auch, dass es auf diesen drei Zwischenstufen „*gleichrangige*“ Bewertungen gibt. Zum Beispiel sind auf Stufe 3 die Bewertungen

10 X „*machbar*“, Y „*nicht-machbar*“
ii beide nur „*möglicherweise-machbar*“

01 X „*nicht-machbar*“, Y „*machbar*“

ins Auge zufassen. Es ist auf dieser Stufe abzuwägen, ob man eine der beiden Aufgaben in der Einschätzung „ganz sausen lassen“ oder ob man beide Aufgaben als „*möglicherweise-machbar*“ bewerten soll. Die vorgegebene Heyting-Logik allein nimmt dem Manager natürlich seine letztendliche Bewertungs-Entscheidung nicht ab; (dazu muss er die Projektbedingungen heranziehen). Sie hilft ihm aber, systematischer als nur „rein intuitiv“, sein Problem anzugehen – und damit Fehlurteile besser auszuschalten und Zeit zu sparen.

8.1.10 Beispiel-3: Eine Indische Logik

8.1.10.1 Einführung

Hier geht es um den Versuch, das sogenannte „**Tetralemma**" [*tetra* gr. = vier; *lemma* gr. = Annahme, Ansicht], im Sanskrit auch ***catuskoti*** (= vier Ecken) genannt, mathematisch zu modellieren durch einen ***nicht-linearen*** Boole-Verband.

In der Form wie ich das hier versuche, habe ich es in der Literatur nicht gefunden. Der Grund ist vielleicht, dass das „Tetralemma" (*catuskoti*) hauptsächlich bei Indologen, Buddhologen und Therapeuten, also in nicht-mathematischen Kreisen, Beachtung findet.

Mit folgenden Worten führt *Matthias Varga von Kibéd*, [Kib.2003, S.77], der zusammen mit seiner Frau *Insa Sparrer* die **systemische Therapie** um die **„Systemischen Strukturaufstellungen"** erweitert hat, in das Thema ein:

„Das Tetralemma („vier Ecken“ im Sinne von vier Positionen oder Standpunkten) ist eine Struktur aus der traditionellen indischen Logik zur Kategorisierung von Haltungen und Standpunkten. Es wurde im Rechtswesen verwendet zur Kategorisierung der möglichen Standpunkte, die ein Richter in einem Streitfall zwischen zwei Parteien einnehmen kann. Er kann der einen Partei recht geben oder der anderen Partei oder beiden (jede hat recht) oder keiner von beiden. ***...*** *Das Tetralemma ist ein außerordentlich kraftvolles allgemeines Schema zur Überwindung von „Erstarrungen“ im schematischen Denken. Es stellt also eine Synthese von schematischem Denken und Querdenken auf höherer Ebene dar.“*

Die Methode der 4 Positionen der *Catuskoti* ist uralt. Bereits *Siddhartha Gautama*, der *Buddha* (6. Jh. v.C.), benutzte sie immer wieder, um sowohl philosophische Ansichten als auch deren Gegenansichten, die beide seinen eigenen Erfahrungen nicht entsprachen, ad absurdum zu führen.

Später verwendete sie der buddhistische Erneuerer und „Wiederhersteller der Lehre Buddhas“, *Nâgârjuna* (ca. 2. Jh. n.C.), ausgiebig, ging aber schließlich über die 4 Po-

sitionen hinaus mit einer 5. Position, die manchmal als „*Nâgârjuna-Schritt*“ bezeichnet wird.

Das Tetralemma oder *catuskoti* wird meist kurz in folgender Form zitiert:

„Das Eine“	Position des Proponenten (A)
„Das Andere“	Gegenposition des Opponenten (B)
„Beides“	inklusive Schlichterposition (C)
„Keines von beiden“	exklusive Schlichterposition (D)

Zwei Kontrahenten (A), (B) streiten sich und gehen vor einen Richter / Schlichter. Abgesehen von dem „Normalfall“, dass der Schlichter einem von beiden recht geben kann, ist aber auch eine „inklusive“ Position (C) oder eine „exklusive“ Position (D) möglich, die dann zu einem „Kompromiss der Kontrahenten „auf höherer Einsichtsebene“ führen mag.

Anmerkung-1: Alle heutigen (westlichen) Interpretationsversuche von antiken Texten, die angeblich die *Catuskoti* benutzen, sind mit Vorsicht zu genießen, denn für eine angemessene Deutung müsste man sich in die altertümliche Denkweise der antiken östlichen Philosophen noch besser einfühlen können; sie erschließt sich leider nicht ganz aus den antiken Sprachen (Pâli, Prakrit, Sanskrit, ...), welche – so hat man beim Lesen oft den Eindruck – der revolutionären Denkweise dieser Großen gar nicht gewachsen waren. Andererseits kann man *Buddha* und *Nâgârjuna* den fähigen Umgang mit einer gewissen „Logik“ nicht absprechen; dazu gibt es zu viele schlagende Textbeispiele aus dem *Ti Pitaka* (dem theravâda-buddhistischen „Dreikorb“) und den überlieferten Schriften des *Nâgârjuna*, die einen äußerst eleganten Umgang mit „Logik“ verraten.

Anmerkung-2:
(1) Eine erste Interpretation in Wikipedia, http://de.wikipedia.org/wiki/Tetralemma , geht ***völlig am Thema vorbei***, da sie *„Das Eine“* als „wahr“, *„Das Andere“* als „falsch“, *„Beides“* als „wahr und falsch“ und *„Keines von beiden“* als „weder wahr noch falsch“ interpretiert.
(2) Eine andere Interpretation, [Ga/Pr.2004], macht zwar einen angemesseneren Ansatz, verwendet aber dazu eine 4-wertige Logik, welche die belegte Anwendbarkeit der *Catuscoti* im indischen Rechtswesen nicht wiederzugeben vermag.

8.1.10.2 Mein Formalisierungsvorschlag zum Tetralemma

Ich stelle deshalb eine Modellierung vor, die auf der klassischen 2-wertigen Aussagelogik basiert, die aber die „*und/oder*-Problematik der Interpretation (1) einfach **umgeht:**

Der Proponent (A) vertrete die Ansicht A, der Opponent (B) die Ansicht B. Ein jeder Schlichter/Richter muss im Streit *zweier* Kontrahenten, ausgehend von *zwei* Wahrheitswerten $\underline{1}$ („wahr“), $\underline{0}$ („falsch“), stets $2^2=4$ Bewertungsmöglichkeiten $\beta_1,.., \beta_4$ ins Auge fassen, um ein Urteil fällen zu können – alles ganz „normal“ nach der klassischen 2-wertigen Aussagenlogik **(P, {$\underline{0}$,$\underline{1}$}, γ)**:

1. Möglichkeit β_1: Proponent (A) hat recht, Opponent (B) hat unrecht: $\beta_1(A)=\underline{1}$, $\beta_1(B)=\underline{0}$
2. Möglichkeit β_2: Proponent (A) hat unrecht, Opponent (B) hat recht: $\beta_2(A)=\underline{0}$, $\beta_2(B)=\underline{1}$
3. Möglichkeit β_3: Beide, Proponent (A), Opponent (B), haben recht: $\beta_3(A)=\underline{1}$, $\beta_3(B)=\underline{1}$
4. Möglichkeit β_4: Keiner der beiden hat recht: $\beta_4(A)=\underline{0}$, $\beta_4(B)=\underline{0}$.

Es handelt sich also um die 4 möglichen Bewertungen (Belegungen) eines **Paares** (A,B) von Aussagen**.** Mit der **Paar-Schreibweise $\underline{\beta}$(A,B) := (β(A), β(B))** wird nun alles klar.

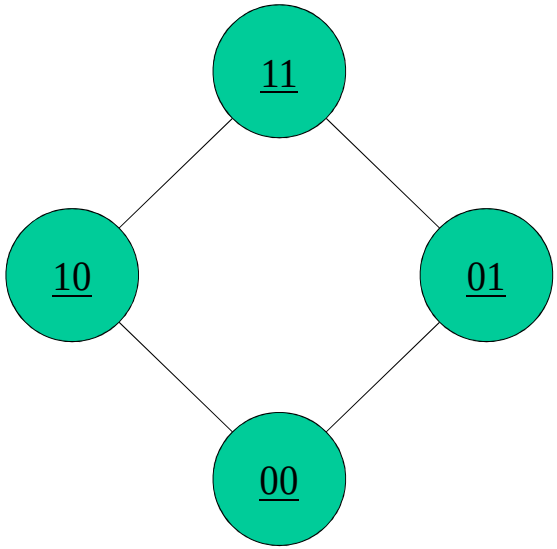
Statt der formalen Sprache **P** der „Aussagesymbole“ haben wir es hier mit der **Paarmenge P^2=P×P** zu tun. Ein Paar $(X,Y)\in P^2$ nenne ich eine „**Äußerung**“ und bezeichne sie mit einem unterstrichenen Buchstaben, etwa $\underline{A}$=(X,Y).

Die Junktoren der Sprache kann man auf Äußerungen komponentenweise übertragen; entsprechend verfährt man mit den Operatoren auf den Werten :

auf **P^2=P×P**		auf **B^2=B×B**	
$\neg(X, Y)$	$:=(\neg X, \neg Y)$,	$(x, y)^*$	$:= (x^*,y^*)$
$(X, Y)\wedge(U, V)$	$:= (X\wedge U, Y\wedge V)$,	$(x,y)\bullet(u,v)$	$:= (x\bullet u, y\bullet v)$
$(X, Y)\vee (U, V)$	$:= (X\vee U, Y\vee V)$	$(x,y)+(u,v)$	$:= (x+u, y+v)$
$(X, Y)\Rightarrow(U, V)$	$:= (X\Rightarrow U, Y\Rightarrow V)$	$(x,y)\rightarrow(u,v)$	$:= (x\rightarrow u, y\rightarrow v)$
$(X, Y)\Leftrightarrow(U, V)$	$:= (X\Leftrightarrow U, Y\Leftrightarrow V)$	$(x,y)\leftrightarrow(u,v)$	$:= (x\leftrightarrow\rightarrow u, y\leftrightarrow\rightarrow v)$
		$(x,y)\leq(u,v)$	:gdw. $x\leq u$ und $y\leq v$

Für die Werte(paare) auf **B^2** schreiben wir der Einfachheit halber xy statt (x,y).

Aus der 2-wertigen Aussagenlogik **(P,B,γ)** wird somit in natürlicher Weise die 4-wertige „**Paarlogik**“ **(P^2,B^2,γ)**. Aus dem *Boole*-schen 2-er-Verband (**B**={1, 0}, ≤, *, +,•, -→, ↔) wird entsprechend der Boole-sche 4-er-Verband (**B^2**={11, 10, 01, 00}, ≤, *, +,•, -→, ↔). Die Ordnung ≤ auf **B^2** ist nicht-linear. Sie ist im nebenstehenden Bild verdeutlicht. 11 ist der größte, 00 der kleinste Wert, und 10, 01 sind unvergleichbar bezüglich ≤.



Der 4-elementige Boole-Verband **B^2**

Die Verknüpfungstabellen für **B^2** lauten dann so:

Der Verneinungsoperator $\underline{x}^*$=?

x	11	10	01	00
x^*	00	01	10	11

Der „oder“-Operator x+y=?

		y	y	y	y
	x+y	11	10	01	00
x	11	11	11	11	11
x	10	11	10	11	11
x	01	11	11	01	01
x	00	11	10	01	00

Der „und“-Operator x•y =?

		y	y	y	y
	x•y	11	10	01	00
x	11	11	10	01	00
x	10	10	10	00	00
x	01	01	00	01	00
x	00	00	00	00	00

Der „wenn..dann“ Operator x→y=?

		y	y	y	y
	x^*+y	11	10	01	00
x	11	11	10	01	00
x	10	11	11	01	01
x	01	11	10	10	10
x	00	11	11	11	11

Beachte: Die Werte(paare) 11 bzw. 00 sollten ***nicht*** einfach als „wahr“ bzw. „falsch“ interpretiert werden, sondern alle vier – eben wie in der antiken Sprechweise der *Catuscoti* – so:

$\underline{11}$:= „beides“,
$\underline{10}$:= „das eine“,
$\underline{01}$:= „das andere“,
$\underline{00}$:= „keines von beiden“.

8.1.10.3 Anwendungsbeispiel

Eine Äußerung $\underline{A}$:=(X,Y) nennen wir

- eine ***Ansicht***, wenn sie mit $\underline{\beta A}$ =$\underline{10}$ oder mit $\underline{\beta A}$ = $\underline{01}$ bewertet ist;
- eine **inklusive Einsicht**, wenn sie mit $\underline{\beta A}$ = $\underline{11}$ bewertet ist;
- eine **exklusive Einsicht**, wenn sie mit $\underline{\beta A}$ = $\underline{00}$ bewertet ist.

Ein Geschäftsmann (G) bekommt einen „*burn-out*“, weil er es nicht fertig bringt, die Alternativen X := „*sich der Familie zu widmen*“, Y := „*sich im Beruf einzusetzen*“, zu vereinbaren, denn er verbindet X unwillkürlich mit ¬Y und ¬X unwillkürlich mit Y. Es ringen in ihm also die beiden Komponenten des Gesamtproblems $\underline{G}$:=(X,Y), das

er entweder mit $\underline{\beta_1}\underline{G}$= $\underline{10}$ oder mit $\underline{\beta_2}\underline{G}$= $\underline{01}$ bewertet; und das macht ihn fertig. Er geht zu einem Therapeuten. Im Verlauf des Therapieprozesses sieht (G) folgende Möglichkeiten ein: Eine inklusive Einsicht $\underline{\beta_3}\underline{G}$= $\underline{11}$ und eine exklusive Einsicht $\underline{\beta_4}\underline{G}$= $\underline{00}$. Die Einsicht $\underline{\beta_3}$ ist die „bürgerliche“, die Einsicht $\underline{\beta_4}$ ist die „unbürgerliche“, die man auch als „Aussteiger-Einsicht“ bezeichnen könnte. (G) mag sich schließlich z.B. für die Bewertung $\underline{\beta_3}$ entscheiden.

Dasselbe Beispiel kann man auch *ganz* in der Sprache **P²** ausdrücken, *ohne Bewertungen* (Belegungen $\underline{\beta}$) *explizit zu notieren*: Die Alternativen X, Y seien wie oben. Wir setzen jetzt $\underline{A}$:=(X,¬Y), $\underline{B}$:=(¬X,Y). $\underline{A}$ und $\underline{B}$ sind also die beiden „entweder-oder-Ansichten“, mit denen sich der Geschäftsmann (G) anfänglich herumschlägt: In der Logik **(P²,B²,γ)** ist**:**

(i) $\neg\underline{A} \cong \underline{B}$ und $\neg\underline{B} \cong \underline{A}$ – *unabhängig von irgendeiner speziellen Bewertung* β.

Anders ausgerückt: Bei einer anfänglichen Bewertungsmöglichkeit β_1 mit $\beta_1 X=\beta_1 Y=\underline{1}$ oder auch der „gegenteiligen“ Bewertungsmöglichkeit β_2 mit $\beta_2 X=\beta_2 Y=\underline{0}$ sind die beiden Urteile $\underline{A}:=(X,\neg Y)$, $\underline{B}:=(\neg X,Y)$ für (G) ***unvergleichbar*** (man kann auch sagen „*gleichrangig*“).

Im Verlauf der Therapie kommt (G) zur inklusiven Einsicht $\underline{C}:=\underline{A}\vee\underline{B}$ („*beides*“) bzw. sogar zur exklusiven Einsicht $\underline{D}:=\neg\underline{A}\wedge\neg\underline{B}$ („*keines von beiden*“). Nach der obigen Erzählung hat sich der Geschäftsmann mit Hilfe der Therapie für die Einsicht $\underline{C}$ entschieden. – Man beachte, dass wegen (i) gilt

(ii) $\underline{D} = \neg\underline{A}\wedge\neg\underline{B} \cong \underline{A}\wedge\underline{B} \cong \neg(\underline{A}\vee\underline{B})\cong \neg\underline{C}$.

Statt durch $\neg\underline{A}\wedge\neg\underline{B}$ darf man – wegen (i) – die Einsicht $\underline{D}$ auch durch $\underline{A}\wedge\underline{B}$ ausdrücken.

8.1.10.4 Der Nâgârjuna-Schritt

Bleiben wir noch eine Weile beim obigen Beispiel: Die Ausgangsbelegung $\underline{\beta}$ des Geschäftsmannes (G) war $\underline{\beta A}=\underline{10}$ und $\underline{\beta B}= \underline{01}$, womit $\underline{A}$ und $\underline{B}$ als **Ansicht** und **Gegenansicht** gekennzeichnet sind. Mit derselben Belegung $\underline{\beta}$ folgt damit $\underline{\beta C} = \underline{\beta}(\underline{A}\vee\underline{B}) = \underline{\beta A}+\underline{\beta B} = \underline{11}$, $\underline{\beta D}=\underline{\beta}(\neg\underline{C})=[\underline{\beta C}]^* =\underline{00}$, womit $\underline{C}$ und $\underline{D}$ als **Einsicht** und **Gegenseinsicht** gekennzeichnet sind.

Im Lauf der Zeit – nach der ersten Therapie – mag etwas eintreten, was man in der Systemischen Strukturaufstellung manchmal ein „*Reframing*“ nennt: Der Geschäftsmann

(G), der sich nach der ersten Therapie ja für $\underline{C}$ entschieden hat, gibt dieser Entscheidung eine *neue Bewertung* mit der Belegung $\underline{\beta}'\underline{C}:=\underline{10}$; damit wird $\underline{\beta}'\underline{D}=\underline{01}$. Die bisherigen **Einsichten** $\underline{C}$, $\underline{D}$ werden damit zu neuen *unvergleichbaren* („unvereinbaren“ / „*gleichrangigen*“) **Ansichten**. Mit der neuen Bewertung $\underline{\beta}'$ könnte (G) wieder in einen Konflikt, diesmal zwischen $\underline{C}$ und $\underline{D}$, geraten, was im Extremfall einen erneuten Gang zum Therapeuten erforderlich machen und „neue Einsichten“ $\underline{E} :\cong \underline{C}\vee\underline{D}$, $\underline{F}\cong :\neg\underline{C}\wedge\neg\underline{D} \cong \underline{C}\wedge\underline{D}$ zur Folge haben könnte ... usw. usf.

Man sieht, das könnte beliebig so weitergehen, **ohne wirklich was Neues zu bringen**, denn es ist $\underline{E} \cong \underline{C}\vee\underline{D} \cong \underline{A}\vee\underline{B} \cong \underline{C}$, $\underline{F} \cong \underline{C}\wedge\underline{D} \cong \underline{D}$.

Diesen endlosen Kreislauf hat bereits der mittelindisch-buddhistische Philosoph ***Nâgârjuna*** (ca. 2. Jh. n.C.) durchschaut. Über die *Catuskoti* hinaus setzte er daher einen „***fünften Schritt***“, den er mit *„weder dies noch das noch beides noch keines von beiden“* beschrieb, und der heute im Mâhâyana-Buddhismus als **„Nâgârjuna-Schritt“** bekannt ist.

Dieses Hinausgehen über alle 4 Positionen der *Catuskoti* hat aber auch bereits der ***Buddha* selbst** (ca. 6.Jh. v.C.) mehrfach angewendet. Beispiel aus dem theravâdischen Pâli-Kanon: [Ti Pitaka / Sutta Pitaka /Samyutta Nikāya SN 12.17].

Ein Asket namens *Kassapa* fragt den Buddha „*Ist das dukkha* (Pâli-Wort für „Leid“) …

- *selbst verursacht?*
- *von anderen verursacht?*
- *sowohl selbst als auch von anderen verursacht?*
- *weder selbst noch von anderen verursacht?“*

Der Buddha **verneint alle vier Fragen.** Damit will er den *Kassapa* darüber aufklären, dass die in allen 4 Fragen tendenziell versteckten Grundansichten über das *dukkha* und über das menschliche Dasein zu „Extremen“ führen (ausgedrückt in 4 verschieden damals im Umlauf befindlichen philosophischen Spekulationen), welche der Buddha auf seinem *mittleren Weg der Weisheit* vermeidet.

Kann man den *Nâgârjuna-Schritt* formalisieren? ➔ **Formalisierungsvorschlag:**

Der „triviale“ Verband besteht aus nur ***einem*** Element; es sei mit e bezeichnet. In ihm ist 1_e =sup{e}=inf{e}= 0_e . Ist $\mathbf{B^2}$ unser *Boole*scher Viererverband, so gibt es genau einen Verbandshomomorphismus ω:$\mathbf{B}^2 \rightarrow$\{e\}, den „trivialen“ Homomorphismus. Ist β:$\mathbf{P^2 \rightarrow B^2}$ eine beliebige Belegung, so kann man $\omega \circ \beta$: $\mathbf{P^2} \rightarrow$\{e\} als die „triviale Belegung“ bezeichnen: Für alle Aussagesymbole der „Logik“ **($\mathbf{P^2}$,{e}, γ)** gibt es überhaupt nur die eine Bewertung, nämlich e.

Den „fünften Schritt“ des *Nâgârjuna* kann man so interpretieren: Nâgârjuna bewertet gar nicht mehr im Viererverband **B²**, sondern **im trivialen Verband {e}**. (Man kann auch sagen: Er bewertet überhaupt nicht mehr.)

Die buddhistisch-philosophische Interpretation ist die mâhâyana-buddhistische Lehre von der ***LEERE***: „*Alle Dinge sind ohne Substanz*“.
Dies ist in der Tat die Essenz, der Lehre des Buddha, welche der große Philosoph und Mystiker ***Nâgârjuna*** mit äußerster Prägnanz aus dem Wust scholastischer Spekulationen der vielen buddhistischen Schulen, die den Buddha nicht mehr verstanden hatten, im 2.Jh.n.C. wieder hervorgeholt hat und damit der erste Patriarch der „**Zen-Richtung**“ geworden ist.

Von dieser „Übereinsicht“ her sind auch sämtliche Paradoxien, denen man in *Nâgârjunas* Texten zu begegnen scheint, zu verstehen. **Diese „Übereinsicht“** (die übrigens auch im berühmten mâhâyana-buddhistischen „*Herz-Sutra*“ klar zum Ausdruck kommt) **widerspricht allen westlichen, christlich- oder islamisch-dualistischen Philosophien, welche vom Aristotelischen „Substanz-Denken“ geprägt sind.** Derjenige, der eine solche „Übereinsicht“ (nicht nur mit dem Verstand sondern auch in der Meditation) *nachhaltig* erlangt hat und danach handelt, wird im östlichen Kulturraum als „erleuchtet“ bezeichnet.

8.2 Kurzer Einblick in die Zeitlogik

8.2.1 Vorbemenkung

In der bisher vorgestellten Aussagen- und Prädikatenlogik wird das Zeitliche (zwar nicht als Inhalt, jedoch als strukturstiftendes Element) ausgeklammert. Die Zeitlogik beschäftigt sich mit Aussagen, die zu einer Zeit zutreffen können, zu einer anderen Zeit aber nicht. „Zeit“ mag eine Reihe von „Zeitpunkten“ sein, aber auch eine Reihe von „Zeiträumen“ (Zeitspannen).

Beispiel: *„Peter besitzt ein Haus“* ist eine Aussage. Aber *„Peter besitzt ein Haus* ***im Jahr 2004****“* ist eine *zeitbezogene* Aussage: Die Aussage mag im Jahr 2004 zutreffen, im Jahr 2010 aber nicht mehr. Hier tritt die „Zeit“ als Zeitspanne (Einheit: das Jahr) auf.

Auf jeden Fall sei „Zeit“ eine Reihe mit einer früher-später-Ordnung, wie zum Beispiel die Jahre ..., 2003, 2004, 2005, … usw. Im Folgenden formalisieren wir „Zeit“ als eine **Ordnung** (**T**,≤), wobei **T** = {… s, t, u, …} eine endliche oder höchstens abzählbar-unendliche Menge von sog. **Referenzzeiten** (kurz „*Zeiten*“ genannt) und ≤ eine **lineare nicht-strikte Ordnungsrelation** auf **T** sei mit folgenden Eigenschaften für beliebige s,t,u∈ **T:**

Linearität:	$s \leq t$ oder $t \leq s$,
Reflexivität:	$t \leq t$,
Antisymmetrie:	wenn $s \leq t$ und $t \leq s$, dann $s=t$,
Transitivität:	wenn $s \leq t$ und $t \leq u$, dann $s \leq u$.

Zu jeder *nicht-strikten* Ordnungsrelation ≤ gehört die **strikte** Ordnungsrelation <, definiert durch $s < t$: genau dann, wenn $s \leq t$ und $s \neq t$. Für die strikte lineare Ordnungsrelation < gelten dann für beliebige s, t, u∈ **T** die Eigenschaften:

Linearität: $s < t$ oder $s=t$ oder $t < s$,
Irreflexivität: nicht $(t < t)$,
Transitivität: wenn $s < t$ und $t < u$, dann $s < u$.

Der Ausdruck „s<t“ wird gelesen wie: „(Referenz-)Zeit s ist ***früher als*** (Referenz-)Zeit t“ oder auch „(Referenz-)Zeit t ist ***später als*** (Referenz-)Zeit s“.

In der Zeitlogik bewertet man nicht Aussagen, sondern stets **Paare** (A,t), wo A eine Aussage und t eine Referenzzeit ist. Beispiel A:= „Peter besitzt ein Haus“, t:= 2004, (A,t):= „Peter besitzt ein Haus im Jahr 2004“. Ein Wahrheitswert 1 (wahr) oder 0 (falsch) wird also nicht der Aussage A, sondern dem Paar (A,t) zugeordnet.

Der Bezug auf eine Referenzzeit ermöglicht eine Präzisierung der Äußerungen über die „**Zukunft**“ mit Hilfe der sogenannten **Modi**

□ „***immer***“ und ◊ „***manchmal***“.

Beispiel: Sei A die Aussage „Peter besitzt ein Haus“, t die Referenzzeit 2004, dann liest sich

(□A, t) wie „Peter besitzt ab 2004 ***immer*** ein Haus“,
d.h.: für jede Referenzzeit s später als t gilt, dass A;
(◊A, t) wie „Peter besitzt ab 2004 ***manchmal*** ein Haus“
d.h.: Es gibt eine Referenzzeit s später als t, sodass A;

□A bzw. ◊A nennt man **modale Aussagen.**

Wie bei der klassischen Aussagen- und Prädikatenlogik geben wir nun den **Kalkül der Zeitlogik** an, mit dem die bisher metasprachlich eingeführten Definitionen in Computerprogramme umgesetzt werden können. Wir beschränken uns auf ***Aussagenlogik***. Ohne weiteres kann man aber auch die ***Prädikatenlogik 1.Stufe*** zu einer Zeitlogik ausbauen, was wir der Kürze halber hier unterlassen.

8.2.2 Syntax-Schema der Zeitlogik

Das Alphabet **AlphZ** der Zeitlogik besteht aus

- einer endlichen (oder höchstens abzählbaren) Menge **E** = {a, b, c, …} von sog. *Elementaraussagezeichen*, kurz: **EA-Zeichen**,
- der Menge J = {¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔} der schon bekannten **Junktorenzeichen**,

- zwei sogenannten **Modus-Zeichen** $\Box$, $\Diamond$, sowie
- den Klammern), (als Trennzeichen.

Aus dem Alphabet **AlphZ** bauen wir *rekursiv* den (abzählbar-unendlichen) Sprachvorrat **P** auf, dessen Elemente *zeitlogiche Aussagesymbole*, oder einfach **Aussagesymbole** heißen sollen. Die Elemente von **P** notieren wir mit Großbuchstaben. Die Menge **P** entsteht durch ***endlichmalige*** Anwendung der folgenden Regeln:

- Ist a ein EA-Zeichen, so ist a auch ein Assagesymbol.
- Ist A ein Aussagesymbol, so ist auch $\neg$A ein Aussagesymbol.
- Sind X, Y Aussagesymbole, so sind auch (X$\wedge$Y), (X$\vee$Y), (X$\Rightarrow$Y), (X$\Leftrightarrow$Y) Aussagesymbole.
- Ist X ein Aussagesymbol, so sind auch $\Box$X und $\Diamond$X Aussagesymbole.

Keine weiteren zeitlogischen Aussagesymbole. Aussagesymbole sind die nach diesen Regeln gebildeten aus den EA-Zeichen zusammengesetzten **endlichen** Zeichenreihen. Vermöge dieser Definition darf man auch modale Aussagesybole bilden, wo die **Modi** $\Box$, $\Diamond$ „geschachtelt“ vorkommen.

Beispiele: $\Box\Box X$, $\Box(X \wedge \Diamond Y)$, $(\Diamond X \vee \Diamond(\Box X \wedge Y))$ usw… – Zum Beispiel liest sich
$\Box(\Box X \wedge \Diamond Y)$ wie „*immer*-(*immer*-X *und manchmal*-Y)“.

8.2.3 Semantik-Schema der Zeitlogik

Für das Semantik-Schema brauchen wir zwei Strukturen, sowie die Junktorenabbildung:

- Eine endliche (oder höchstens abzählbar-unendliche) **Ordnung** (**T**, <), deren Elemente „*Referenzzeiten*“ heißen, und auf der eine **lineare strikte Odnungsrelation** < besteht.
- Einen **Bewertungsbereich** (**B**,*, •, +, →,↔); das ist – wie in der zweiwertigen Logik – die Wertemenge **B =** {1, 0} zusammen mit den schon bekannten Operatoren auf **B**: dem 1-stelligen „Verneinungsoperator“ * und den 2-stelligen Operatoren • (für „*und*“), + (für „*oder*“), → (für „*wenn…dann*“) und ↔ (für „*genau dann, wenn…*“). (**B**,*, •, +, →,↔) ist also der bekannte Boole-sche Zweierverband mit den Hauptoperatoren *, •, + und den Zusatzoperatoren →, ↔, wobei – wie in der Aussagenlogik besprochen – als *vollständige Funktionsbasen* {*,•} oder auch {*, +} oder auch {*, →) infragekommen und die anderen Operatoren aus der jeweilgen Funktionsbasis ableitbar sind.

- Die **Junktorenabbildung** γ: $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \rightarrow \{*, \bullet, +, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, welche die fünf Junktoren von **P** den fünf Operatoren von **B** zuordnet.

  $\gamma(\neg) = *$, $\gamma(\wedge) = \bullet$, $\gamma(\vee) = +$, $\gamma(\Rightarrow) = \rightarrow$, $\gamma(\Leftrightarrow) = \leftrightarrow$.

Def.Deutung: Sei $\Sigma \subset$**P** eine endliche Menge von Aussagesymbolen. Eine „**Deutung**“ von Σ ist ein Abbildungstripel $(\gamma, \delta, \beta°)$, bestehend aus der **Junktorenabbildung** γ, einer **Anwendungsabbildung** δ, welche Σ in eine gegebene „Theorie“ zeitbezogener Aussagen abbildet und welche die Ordnung **T** der Referenzzeiten auf eine geeignete Zeitordnung (Zeitpunkte od. Zeitspannen mit den in der Anwendung benutzten Zeiteinheiten) abbildet; zur Deutung von Σ gehört schließlich eine **Elementarbelegung** $\beta°$: $E(\Sigma)\times$**T** $\rightarrow$**B,** wobei $E(\Sigma) \subset$**E** die Menge der in Σ vorkommenden **EA-Zeichen**, **T** die Referenzzeitskala und der **B**={1, 0} der Bewertungsbereich der 2-wertigen Logik ist, d.h.: Ist $a \in E(\Sigma)$, $t \in$ **T**, so ist $\beta°(a,t)$ einer der Werte $\underline{1}$, $\underline{0} \in$ **B**. Aus der Elementarbelegung $\beta°$ leitet man eine **Belegung** β: $\Sigma\times$**T** $\rightarrow$**B** rekursiv durch folgende *endlichfach* anzuwendenden Regeln ab:

Def.Belegung (rekursive Definition):

- Ist $a,b \in E(\Sigma)$, $t \in$ **T**, so sei $\beta(a,t) := \beta°(a,t)$ – d.h. jede Elementarbelegung sei eine *Belegung*.

- Ist $a,b \in E(\Sigma)$, $t \in \mathbf{T}$, so sei $\beta(\neg a,t) := [\beta°(a,t)]^*$, $\beta((a \wedge b),t) := \beta°(a,t) \bullet \beta°(b,t)$, $\beta((a \vee b),t) := \beta°(a,t) + \beta°(b,t)$, $\beta((a \Rightarrow b),t) := \beta°(a,t) \rightarrow \beta°(b,t)$, $\beta((a \Leftrightarrow b),t) := \beta°(a,t) \leftrightarrow \beta°(b.t)$.
- Ist $X,Y \in \Sigma$, $t \in \mathbf{T}$, so sei $\beta(\neg X,t) := [\beta(X,t)]^*$, $\beta((X \wedge Y),t) := \beta(X,t) \bullet \beta(Y,t)$, $\beta((X \vee Y),t) := \beta(X,t) + \beta(Y,t)$, $\beta((X \Rightarrow Y),t) := \beta(X,t) \rightarrow \beta°(Y,t)$, $\beta((X \Leftrightarrow Y),t) := \beta(X,t) \leftrightarrow \beta(Y,t)$.
- Ist $X \in \Sigma$, $t \in \mathbf{T}$, so sei $\beta(\Box X,t) := \beta(X,s)$ für ***alle*** $s \in \mathbf{T}$ mit $t<s$
  und $\beta(\Diamond X,t) := \beta(X,s)$ für ***wenigstens ein*** $s \in \mathbf{T}$ mit $t<s$.

Bewertungen nimmt man also – wie schon erwähnt – nicht an zeitlogischen Aussagesymbolen, sondern stets an ***Paaren*** (X,t) vor, bestehend aus einem zeitlogischen Aussagesymbol X und einer Referenzzeit t. Das ist der wesentliche Unterschied zur einfachen Aussagenlogik. Die Modi $\Box$ („*immer*“), $\Diamond$ („*manchmal*“) jedoch werden nicht auf solche Paare, sondern auf modallogische Aussagesymbole angewendet.

Bei jeder Deutung (γ, δ, $\beta°$) ist γ immer dieselbe Junktorenabbildung und ($\mathbf{B}$, *, $\bullet$, +, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) immer dieselbe Bewertungsbereichsstruktur; bei gegebener Anwendungsabbildung δ kann aber die Elementarbelegung $\beta°$ noch variiert werden.

8.2.4 Metasprachliches zur Zeitlogik

Die in Kap.5.4.4 vorgestellten metasprachlichen Begriffe der Aussagenlogik müssen wir ein bisschen modifizieren. Sei Σ eine endliche Menge von zeitlogischen Aussagesmbolen und X, Y zwei einzelne zeitlogische Aussagesymbole. Eine Deutung (γ, δ, β) heißt ein **Modell** für X, wenn $\beta(X,t)=\underline{1}$ gilt für *alle* $t\in$ **T**. Sie heißt ein **Modell** für Σ, wenn sie ein Modell für alle $X\in\Sigma$ ist. Man sagt *„Y folgt semantisch aus Σ"*, in Zeichen $\Sigma \models Y$, wenn gilt: *Jedes* Modell von Σ ist auch Modell für Y. X und Y heißen äquivalent, in Zeichen $X\cong Y$, wenn $\beta(X,t) = \beta(Y,t)$ gilt in *jeder* zu X und Y passenden Deutung. X heißt allgemeingültig oder eine **Tautologie**, wenn $\beta(X,t)=\underline{1}$ gilt für *alle* $t\in$ **T** in *jeder* zu X passenden Deutung. Die Metaaussage, dass X eine Tautologie ist, schreibt man $\models X$.

Neben den in Kap.5.4.4 aufgezählen Äquivalenzen und Tautologien berechnet man für die Zeitlogik noch die folgenden Gesetze: Seien X, Y zwei zeitlogische Aussagesymbole; dann gilt:

- $\neg\Box X \cong \Diamond\neg X$, $\neg\Diamond X \cong \Box\neg X$ — was nicht *immer* gilt, gilt *manchmal* nicht; was nicht *manchmal* gilt, gilt *nie*. – *Dualität* der Modi $\Box$ und $\Diamond$.

- $\Box(X \Rightarrow Y) \models (\Box X \Rightarrow \Box Y)$ — aus *immer*-(X impliziert Y) folgt semantisch, dass *immer*-X impliziert *immer*-X.
  – *Distributivität* des Modus $\Box$ beim Junktor $\Rightarrow$).
- $\Diamond(X \Rightarrow Y) \cong (\Box X \Rightarrow \Diamond Y)$ — *manchmal*-(X impliziert Y) ist äquivalent zu (immer-X impliziert *manchmal*-Y).
- $\Box(X \Rightarrow Y) \models (\Diamond X \Rightarrow \Diamond Y)$ — Aus *immer*-(X impliziert Y) folgt semantisch (*manchmal*-X impliziert manchmal-Y)
- $\Box(X \wedge Y) \cong (\Box X \wedge \Box Y)$ — *immer*-(X und Y) ist äquivalent zu (*immer*-X und *immer*-Y).
  – Distributivität des Modus $\Box$ beim Junktor $\wedge$.
- $\Diamond(X \vee Y) \cong (\Diamond X \vee \Diamond Y)$ — *manchmal*-(X oder Y) ist äquivalent zu (*manchmal*-X oder *manchmal*-Y).
  – Distributivität des Modus $\Diamond$ beim Junktor $\vee$.
- Ist X eine Tautologie, so ist auch $\Box X$ eine Tautologie.

Anmerkung: Hier sieht man deutlich, dass die umgangssprachlichen Möglichkeiten bei der Formulierung zeitlogischer Gesetze ***an ihre Grenzen stoßen***: Wenn man nicht die formelmäßigen Ausdrücke hinzufügt, kommt es leicht zu Missverständnissen! Besonders das ***Fehlen der Klammersetzung,*** die in den Formeln benutzt wird, führt in der rein sprachlichen Formulierung, wo Klammern nicht üblich sind, zu fatalen Mehrdeutigkeiten. Außerdem ist bei Formeln der *objektsprachliche* Junktor $\Rightarrow$ zu unterscheiden vom *meta-sprachlichen* $\models$ („aus … folgt semantisch …“). Daher:
Logik – welcher Art auch immer – bleibt ohne Formeln im Stadium der „Steinzeit“.

8.2.5 Anmerkung zu anderen Modallogiken

Die Zeitlogik ist ein besonderer Typ der sogenannten **Modallogiken**. Wir haben sie als „***Zukunftslogik***“ vorgestellt. Nimmt man durchgehend statt der Zeitrelation < die dazu duale Zeitrelation > so bekommt man eine „***Vergangenheitslogik***“. Alles andere bleibt gleich.

Allgemeiner kann man die Modal-Zeichen □, ◊ auch so lesen:

□X wie *„notwendigerweise X“,*

◊X wie *„möglicherweise X“.*

Eine weitere Lesart ist:

□X wie *„X **soll** der Fall sein“* oder *„es ist **geboten**, dass X“*

◊X wie *„X **darf** der Fall sein“* oder *„es ist **erlaubt**, dass X“.*

Mit dieser Lesart bekommt man sogenannte „***Deontische Logiken***“; diese sind z.B. im **Rechtswesen** oder in der **Morallehre** anwendbar.

Noch eine Lesart ist:

□X wie *„Man **weiß**, dass X“* oder *„es ist **gewiss**, dass X“*

◊X wie *„Man **vermutet,** dass X“* oder *„es ist **möglich**, dass X“.*

Mit dieser Lesart bekommt man sogenannte ***„Epistemische Logiken“***; diese sind z.B. in den **Naturwissenschaften** anwendbar.

Dann muss man die Zeitreferenzordnung (**T**, <) durch einen allgemeineren sog. **Referenzrahmen** (**W**, R) ersetzen. Dabei ist **W** eine Menge von sog. **Referenzpunkten** (die nennt man auch „*Situationen*“ oder „*Welten*“) und R⊂**W×W** eine 2-stellige Relation auf **W**, die sog. **Erreichbarkeitsrelation**. (Ein Referenzpunkt t∈**W** heißt „von s∈**W** aus erreichbar“, wenn (s,t)∈R.) Je nachdem, welche Eigenschaften die Erreichbarkeitsrelation R hat, ergeben sich dann unterschiedliche **Modallogiken**. Literatur: vgl. z.B. [KrKü_LI] oder [Wiki_ModL].

8.2.6 Anmerkung zu mehrwertigen Zeitlogiken

Ohne weiteres kann man eine Zeitlogik (oder eine andere Modallogik) auch über einer ***mehrwertigen Aussagenlogik*** (vgl. Kap.8.1.3ff) definieren. Dazu braucht man nur den 2-wertigen Bewertungsbereich zu ersetzen durch eine m-wertige Struktur (**B**, *, •, +, →, ↔)

mit **B** = {$\underline{0}$, w_2, ..., w_{m-1}, $\underline{1}$}. Was eine ***Belegung*** β ist, kann man dann genauso wie in Kap.8.2.3 definieren. Ist der Bewertungsbereich **B** ein ***endlicher*** (linearer oder nicht-linearer) ***Verband***, (**B**, $\leq_B$), (vgl. Kap.8.1.7: z.B. ein *Kleene*- oder ein *Heyting*-Verband), so kommen neben den *Modi* $\Box$ („*immer*“), $\Diamond$ („*manchmal*“) noch zwei **„Pseudo-Modi“** hinzu, die ich mit $\oplus$ („*supremal*“) und $\otimes$ („*infimal*“) bezeichne. Zur Definition einer *Belegung* β kommen dann noch die beiden folgenden Regeln hinzu:

- Ist $X \in \Sigma$, $t \in \mathbf{T}$, so sei $\beta(\oplus X,t) := \sup\{\beta(X,s) \mid s \in \mathbf{T},\ t<s\}$
  und $\beta(\otimes X,t) := \inf\{\beta(X,s) \mid s \in \mathbf{T},\ t<s\}$,

wobei supM das ***Supremum*** (kleinste obere Schranke bzgl. $\leq_B$), infM das ***Infimum*** (größte untere Schranke bzgl. $\leq_B$) einer Wertemenge $M \subseteq \mathbf{B}$ bezeichnet. Diese beiden Wertezuweisungen sind wohldefiniert, da in einem endlichen Verband **B** zu jeder Teilmenge $M \subseteq \mathbf{B}$ das Supremum und das Infimum als Elemente in **B** existieren.

Achtung: Die (ggf. nicht-lineare) Ordnungsrelation $\leq_B$ auf dem Bewertungsbereich **B** hat nichts zu tun mit der linearen Zeitordnungsrelation < auf der Zeitskala **T**. – Man könnte jedoch die lineare Zeitordnung (**T**,<) ersetzen durch eine *Verbandsstruktur* (**V**,$\leq_V$) und bekäme damit eine ganze Reihe weiterer „zeitähnlicher“ mehrwertiger Modallogiken. Brauchbare Anwendungen hierzu sind mir z.Z. aber nicht bekannt.

[Ergiebige Literatur habe ich zum Thema „*Mehrwertige* Zeitlogiken“ / „*Mehrwertige* Modallogiken“ bisher keine gefunden, was nicht heißt, dass es keine gäbe.]

9 Schlussbemerkung

Das was ich hier unter „Logik“ zusammengefasst habe, hat eine Geschichte, ist sprachbedingt und ist in besonders starkem Maße durch die Mathematik geprägt. Mathematik unter Logik zu subsummieren (wie es z.B. der große Logiker *Gottlob Frege* vorhatte), erscheint mir einseitig. Logik umgekehrt nur unter die Mathematik zu

subsummieren wäre ebenfalls nicht angemessen, denn anwendbare Logik ist mehr auf die Umgangssprache angewiesen als Mathematik. Beide Gebiete – Mathematik und Logik – stellen Formalisierungswerkzeuge zur Verfügung, die stehen und fallen mit den *Interpretationsmöglichkeiten*, also mit ihrer Schnittstelle zur menschlichen Lebenswelt. Das sogenannte „Semantik-Schema“ einer (wertebasierten) Logik stellt nur eine „dürre Brücke“ zur Verfügung, die selbst noch ganz der Welt der angebotenen Strukturen angehört. „Logik“ sollte nicht als ein „Naturgesetz“, sondern stets nur als Angebot für die (möglicherweise von nur bescheidenem Erfolg krönbare) Verwendung in der menschlichen Lebenswelt verstanden werden.

10 Literaturverzeichnis

Ref.-Id.	Autor, Titel, Verlag, Erscheinungsjahr
	Lehrbücher / Monographien:
[KrKü_LI]	M. Kreuzer / S. Kühling: "Logik für Informatiker", Vgl. Pearson Studium, 2006
[EFT_mL]	G.-D Ebbinghaus / J. Flum / W. Thomaas: "Einführung in die mathematische Logik", Spektrum Akadem.Vlg., 2007
[GaWi_BA]	B. Ganter / R. Wille: "Formale Begriffsanalyse", Springer, 1996
[SG_MWL]	S. Gottwald: „Mehrwertige Logik“, Akademie-Verlag Berlin, 1989

Ref.-Id.	Autor, Titel, Verlag, Erscheinungsjahr
[CL_MWL]	C. Lübbert: „Mehrwertige Logiken“, V11, Darmstadt, 2011, http://www.cl-diesunddas.de/
[CL_O]	C. Lübbert: “Ontologie-Defintion auf Basis der Formalen Begriffsanalyse (FBA)“, V3.13, Darmstadt, 2012, http://www.cl-diesunddas.de/
[FiVo_Ph]	E. Fischer / W. Vossenkuhl (Hrsg.): "Die Fragen der Philosophie", Beck-sche Reihe, 2003
[LW_1930-35]	Ludwig Wittgenstein: „Vorlesungen 1930-1935“, Suhrkamp, 1989
[LW_TS]	Ludwig Wittgenstein: „The Big Typescript“, Wiener Ausgabe, 2000

Ref.-Id.	Autor, Titel, Verlag, Erscheinungsjahr
[Kib.2003]	Matthias Varga von Kibéd und Insa Sparrer: „Ganz im Gegenteil“ – „Tetralemmaarbeit und andere Grundformen Systemischer Strukturaufstellung für Querdenker und solche, die es werden wollen“. Carl-Auer-Systeme Verlag, Heidelberg 2003
[Ga/Pr.2004]	Jay L. Garfield / Graham Priest: „Mountains are Just Mountains“. Central Institute of Higher Tibetan Studies, University of Melbourne / Smith College, University of St Andrews. 2004
[AF_Gö2001]	André Fuhrmann: „ ‚G‘ wie Gödel – Kurt Gödels axiomatische Theologie“ Aus: „Logik in der Philosophie“ Hrsg.: P. Schroeder-Heister, W. Spohn, E. Olsson, 2001. (Die letzte Fassung von Gödels Note ist von 1970)

Ref.-Id.	Autor, Titel, Verlag, Erscheinungsjahr
[FM_1913]	Fritz Mauthner: „Sprache und Logik, Beiträge zu einer Kritik der Sprache“, Dritter Band (1913) http://www.textlog.de/mauthner-logik-begriff-wort.html
	Aus Wikipedia:
[Wiki_Lo]	Wikipedia: „Logik“, last modified: 8.11.2012, http://de.wikipedia.org/wiki/Logik
[Wiki_GL]	Wikipedia: "Geschichte der Logik", last modified: 15.1.2013, http://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_Logik
[Wiki_MWL]	Wikipedia: "Mehrwertige Logik", last modified: 9.9.2012 http://de.wikipedia.org/wiki/Mehrwertige_Logik
[Wiki_ModL]	Wikipedia: Modallogik, last modified: 28.3.2013 http://de.wikipedia.org/wiki/Modallogik

Ref.-Id.	Autor, Titel, Verlag, Erscheinungsjahr
[Wiki_Ar]	Wikipedia: "Aristoteles", last modified: 24.2.2013 http://de.wikipedia.org/wiki/Aristoteles
[Wiki_B]	Wikipedia: "Begriff", last modified: 16.2.2013 http://de.wikipedia.org/wiki/Begriff
[Wiki_BPh]	Wikipedia: "Begriff (Philosophie)", last modified: 12.2.2013, http://de.wikipedia.org/wiki/Begriff_(Philosophie)
[Wiki_BL]	Wikipedia: "Begriffslogik", last modified: 1.2.2013, http://de.wikipedia.org/wiki/Begriffslogik
[Wiki_Kat]	Wikipedia: "Kategorie (Philosophie)", last modified: 13.2.2013, http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie_(Philosophie)
[Wiki_ExIn]	Wikipedia: "Extension und Intension", last modified: 14.3.2013, http://de.wikipedia.org/wiki/Extension_und_Intension

Ref.-Id.	Autor, Titel, Verlag, Erscheinungsjahr
[Wiki_Univ]	Wikipedia: „Universalienproblem”, last modified: 14.04.2013, http://de.wikipedia.org/wiki/Universalienproblem
[Wiki_ Lambda]	Wikipedia: „Lambda-Kalkül“, last modified: 24.04.2013, http://de.wikipedia.org/wiki/Lambda-Kalk%C3%BCl

Dokumentkontrollen

Datum	Vers.	Maßnahme (Aktuelles oben!)
28.06.13	V5.4	Weitere Korrekturem + Ergänzungen, u.a. zu „Sachverhalt“. Lit.Verz. ergänzt.
22.06.13	V5.4	Missverständlichen Text auf S. 147 (Def. f-Begriff) ersetzt (Hinweis von K.E. Wolff)
20.06.13	V5.3	Tippfehler korrigiert; ein paar Ergänzungen für das WS2013/14 zugefügt. Diese Version an Freunde der FBA als pdf-File geschickt.
13.05.13	V5.2	Diese Version an die Aka55plus-Teilnehmer ausgegeben.
12.05.13	V5.2	Text ergänzt und Beispiele+Übungen hinzugefügt.
02.05.13	V5.2	Kap. „Zeitlogik“ fertig
23.04.13	V5.2	„Indische Logik“ fertig.
22.04.13	V5.2	Das ganze Skript fast fertig. – Fehlt nur noch das Bsp. einer „Indischen Logik“.
13.04.13	V5.2	FBA fertig. Nicht-klassische Logiken angefangen.

11.04.13	V5.2	Ich bin von Word2000 (*.doc) jetzt doch zu Word 2010 (*.docx) umgestiegen, weil das alte Word2000 beim Zufgriff auf integrierte Abbildungen abstürzt und Textänderungen verloren gehen. Zum Glück sind die math. Sonderzeichen, die ich mir selbst eingerichtet habe, nach Word2010 übernommen worden. Nur die Ansicht aller Textsteuerzeichen (aut. Trennstrich, Blank, etc…) hab ich noch nicht gefunden. (→ das **P**-Zeicnen unter Sart!)
10.03.13	V5	CL_LOGIK-TEIL2_v5_4BlattBunt.pdf erstellt u. an Teilnehmer verschickt.
21.03.13	V4	Kap. "Aussagenlogik" vorerst abgeschlossen.
19.03.13	V4	Weiter mit "Objektsprache / Metasprache"
18.03.13	V3	V3 in pdf ausgedruckt für die Seminarteilnehmer
17.03.13	V3	Bis Kap. "Formalisierung der Aussagenlogik" + Syntaktik-+ Semantik-Schema i.w. fertig. - Fehlt zur Aussagelogik noch: "Objektsprache, Metasprache".
03.03.13	V3	Fertig bis "Syllogistik - die alte Begriffslogik".
26.02.13	V3	Text-Folien angefangen.

17.11.12 V1 Dokument begonnen: Eigene **Formate für Foliendarstellung** im File selbst gespeichert, d.h. die Vorlage „Arbeiten_CL.dot“ damit überschrieben. Folgendes wurde ggüb. „Arbeiten_CL.dot“ geändert: Querformat (0 –25cm) (statt Hochformat), Standardtext: 24, Üb1: 36, Üb2: 28, Üb3: 26, Üb4: 24, Verzeichnis-Stufen angepasst.