Glossar und Literatur

Version: V2.0 vom 01.01.08

Inhaltsverzeichnis

1 GLOSSAR

Hier werden Begriffe und Abkürzungen alphabetisch aufgelistet, die in der Untersuchung vorkommen. Das Glossar dient unter anderem zur Entlastung des Haupttextes. In den Erläuterungen wird auf bekannte Definitionen und Sätze, historische Zusammenhänge und auf einige Ergebnisse dieser Untersuchung hingewiesen. Das Zeichen "→" verweist auf andere im Kontext verwendete Begriffe und Abkürzungen des Glossars.

Begriff / Abkürzung	Definition / Erläuterungen / Sätze
[A:K]	Dimension (oder Rang) einer →Algebra A über dem →Körper K. Wird A nur als Vektorraum über K aufgefasst, so schreiben wir statt [A:K] auch →$\dim_K A$ oder dimA. Ist A selbst ein Körper, so heißt [A:K] auch der "Grad" von A über K; A ist dann eine →Körpererweiterung von K
$\mathbb{A}$	→anomal-komplexe Zahlen
$A \oplus B$	direkte Summe (zweier Vektorräume / Algebren / Ideale): A+B mit $A \cap B=\{0\}$
$A \otimes B$	→direktes Produkt (von Vektorräumen / von Algebren)
A/J	→Faktorraum oder → Faktoralgebra
adjungierte Bewegung	die lineare Transformation ad(u): $x \in A$ → $ad(u)x := u^{-1}xu \in A$ zu einer →Einheit u einer →Algebra A mit Eins. ad(a) wird auch der durch a gegebene innere Automorphismus von A genannt
Algebra	→Ring (A,+,**.**), der zugleich Vektorraum über einem kommutativen Körper K ist, wobei noch gilt: ka=ak und k(a.b)=(ka).b=a.(kb) für alle $k \in K$, a, $b \in A$, und die Null von K mit der Null von A gleichgesetzt ist und mit 0 bezeichnet wird. Hinweis: In dieser Untersuchung wird A als K-Vektorraum durchweg ***endlichdimensional***, $[A:K]<\infty$, vorausgesetzt.
algebraische Körpererweiterung	→K(e)
Algebra mit Eins	assoziative Algebra (A, K), mit einem $e \in A$, so dass ea=ae=a für alle $a \in A$. Wenn keine Missverständnisse auftreten können, betten wir den Körper K isomorph ins Zentrum von A ein, so dass die Eins von K mit der Eins von A gleichgesetzt ist und meist mit 1 (satt e) bezeichnet wird. Aus **$[A:K]<\infty$** folgt, dass jeder Nichtnullteiler $u \in A$ eine →Einheit ist, d.h. genau ein Inverses $u' \in A$ besitzt (uu'=u'u=1).
Algebraerweiterung	das direkte Produkt $A_S := S \otimes A$ einer →Körpererweiterung $S \supseteq K$ mit einer K-Algebra (A, K) mit $[A:K]<\infty$. A_S erzeugt man aus A, idem man in einer beliebigen Basisdarstellung $A=Ka_1 \oplus ... \oplus Ka_n$ die „Skalare" aus K durch die „Skalare“ aus S ersetzt: $A_S = S \otimes a_1 \oplus ... \oplus S \otimes a_n$; der Vorgang ist basisunabhängig. Ist z.B. Algebra (A, K) Algebra mit Eins und $S=K(\alpha) = K \oplus \alpha K$ eine einfache quadratische Körpererweiterung ($\alpha \notin K$, definiert durch ein in K irreduzibles →Polynom $X^2-\lambda=0$, $\lambda \in K$ mit „Wurzel“ α), so wird A_S wieder Algebra über K. Man kann $K \otimes A$ mit A identifizieren, falls A eine Eins hat (Eins von K = Eins von S = Eins von A): $A_S = S \otimes A = (K \oplus \alpha K) \otimes A = A \oplus \alpha A$. (Bem.: Falls A eine zu S isomorphe Teilalgebra $A' = K \oplus \beta K \subseteq A$ enthält, muss man bei dieser Vereinbarung α von β unterscheiden: $\beta \in A$, $\alpha \notin A$. Beispiel: Die →Hamilton-Quaternionen $Q(\mathbb{R})=\mathbb{R}+e_1\mathbb{R}+e_2\mathbb{R}+e_3\mathbb{R}$ mit $e_i^2=-1$, $e_ie_j=-e_je_i=e_k$ (i,,j,k zykl. 1,2,3) kann man auch schreiben $Q(\mathbb{R})= \mathbb{C}'+e_2\mathbb{C}'$, wobei $\mathbb{C}' = \mathbb{R}+e_1\mathbb{R}$ isomorph zum Körper $\mathbb{C}=\mathbb{R}+i\mathbb{R}$ der komplexen Zahlen ist. In der Algebraerweiterung $Q(\mathbb{R})$ → $Q(\mathbb{C})= \mathbb{C} +e_1\mathbb{C} +e_2\mathbb{C} +e_3\mathbb{C}$, die den Schiefkörper $Q(\mathbb{R})$ zu einer Algebra $Q(\mathbb{C})$ mit Nullteilern macht, muss man natürlich die „imaginäre Einheit“ i von jedem der e_k (k=1,2,3) unterscheiden
Algebraradikal $\mathcal{R}_A$	nilpotentes 2-seit-Ideal, das alle nilpotenten Links- oder auch Rechtsideale enthält. Satz: In einer →Algebra A mit Eins ist $\mathcal{R}_A$ der Durchschnitt aller maximalen Linksideale. Bem.: In einer →AMN (A,K,N) gilt immer $\mathcal{R}_A \subseteq RadN \subseteq \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$. In einer →KA: $\mathcal{R}_A = RadN \subseteq \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ und →NilExp$\mathcal{R}_A \leq 3$.
AMN - "Algebra mit multiplikativer Norm"	***assoziative*** K-Algebra (A,K,N) mit Eins und $[A:K]<\infty$ und →Char $K \neq 2$ und mit nicht identisch verschwindender **quadratischer Form** N:A→K ("Norm"), die die Multiplikativität **N(xy) = N(x)N(y)** für alle $x,y \in A$ erfüllt. Für jede AMN gilt: $\mathcal{S}(N) \subseteq \mathcal{NT}(A)$, $\mathcal{U}(A) \subseteq \mathcal{P}(N)$; Gleichheit gilt i.allg. nicht. Vgl. auch →$\mathcal{S}$ (N), $\mathcal{NT}$ (A), $\mathcal{U}$ (A), $\mathcal{P}$(N)
anomal-komplexe Zahlen	die kommutative $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{A}=\mathbb{R} \oplus e\mathbb{R}$ mit $e \notin \mathbb{R}$, $e^2=1$

Begriff / Abkürzung	Definition / Erläuterungen / Sätze
assoziative Algebra	→Algebra (A,+,.,K) über dem Körper K mit *Assoziativgesetz* a.(b.c) = (a.b).c $\forall$a,b,c$\in$A. Hinweis: Wenn nicht anders vermerkt, meinen wir mit "Algebra" in dieser Untersuchung stets eine **assoziative** Algebra.
assoziativer Ring	→Ring (R, +,•), in dem das Assoziativgesetz a•(b•c) = (a•b)•c gilt
Ausartungsgrad einer Norm	die Dimension des →Normradikals RadN:={r$\in$A| <r,a>=0 $\forall$a$\in$A}, wobei N quadratische Form (Norm) N:A→K eines (endlichdimensionalen) Vektorraumes (A, K), und <,> das zu N gehörige →Skalarprodukt ist
ausgeartete AMN	eine →AMN (A, K, N) mit dimRadN = r > 0 heißt ausgeartet vom Grad r (→RadN)
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$= $\mathbb{R}$+i$\mathbb{R}$ mit i$\notin\mathbb{R}$, i²= -1
char K	Charakteristik eines Körpers K: Entweder charK =0, wenn n.1 $\neq$0 für alle natürlichen Zahlen n, oder charK =p = kleinste Primzahl p mit p.1=0
charakteristisches Polynom	das Polynom $\chi_a\in$K[X], χ_a := det(X.**1** -a) = $X^n + \alpha_1(a) X^{n-1} + ... + \alpha_{n-1}(a) X + \alpha_n$, für einen Endomorphismus a: A →A eines K-Vektorraums A ($\dim_K$A=n<∞) mit von a abhängigen Größen $\alpha_i(a)\in$K, wobei $(-1^n)\alpha_n(a)$ = **det**(a) (**Determinante** von a) und $-\alpha_1(a)$ =**tr**(a) (**Spur** von a) ist. Substituiert man a für X, so erhält man die "charakteristische Gleichung" χ_a (a) = 0 des Endomorphismus a. Ist A eine →K-Algebra so ist jedem a$\in$A ein Endomorphismus L_a:A→A mit L_a(x):= ax zugeordnet, den man wieder mit a bezeichnen kann, wodurch χ_a (a) = 0 Auskunft über die Elemente von A gibt.
$\mathbb{D}$	→Dualzahlen
det	Determinante; vgl. auch →charakteristisches Polynom
dimA, $\dim_K$A	Dimension eines Vektorraumes A über einem Körper K. Ist A ein Oberkörper oder eine Algebra über K, so schreiben wir auch [A:K] statt $\dim_K$A
direktes Produkt von Vektorräumen	(auch Tensorprodukt genannt). Sind (A,+,.,K), (B,+,.,K) **Vektorräume** über demselben Körper K, so wird das direkte Produkt A$\otimes$B := {a$\otimes$b | a$\in$A, b$\in$B} durch die Rechenregeln ξ(a$\otimes$b):= ξa$\otimes$b= a$\otimes\xi$b, (a+a')$\otimes$b:= a$\otimes$b+a'$\otimes$b, a$\otimes$(b+b'):=a$\otimes$b+a$\otimes$b' (für $\xi\in$K, a,a'$\in$A, b,b'$\in$B) erklärt und ist wieder ein K-Vektorraum; insbesondere ist a$\otimes$0= 0$\otimes$b=0 (Null von A$\otimes$B). Ist {a_1,..., a_m} eine Basis von A, {b_1,..., b_n} eine Basis von B, so ist {$a_i\otimes b_k$ | i=1,...,m, k=1,...m} eine Basis von A$\otimes$B.
direktes Produkt von Algebren	Sind A, B assoziative **Algebren** über K, so gelten zunächst die Additionsregeln für das Verktorraumprodukt. A$\otimes$B wird darüber hinaus zu einer assoziativen K-Algebra durch die Produktdefinition (a$\otimes$b).(a'$\otimes$b') := aa'$\otimes$bb'. A$\otimes$B kann man auch als n-Modul A$\otimes b_1$ +...+A$\otimes b_n$ mit Linksoperatorenbereich A bzw. als m-Modul $a_1\otimes$B+...+$a_m\otimes$B mit Rechtsoperatorenbereich B auffassen. Ist speziell A ein (algebraischer) Erweiterungskörper von K (d.h. A=K(α)=K+α²K+...+α^mK), B eine K-Algebra, so schreibt man auch A$\otimes$B=B_A und nennt B_A die entsprechende →Algebraerweiterung. Hat B eine Eins **1**, so kann man K in B und B in B_A in einbetten indem man K$\otimes$**1** mit K identifiziert (Eins von K = Eins von B = Eins von B_A)
Divisionsalgebra	→Schiefkörper A, aufgefasst als K-Algebra, wobei K ein kommutativer Teilkörper von A ist. (So ein K gibt es immer; man nehme z.B. den Primkörper)
Dualzahlen	die kommutative Algebra $\mathbb{D}$:= $\mathbb{R}$+ e$\mathbb{R}$ mit e$\notin$ $\mathbb{R}$, e²=0
echtes Ideal	Ideal in einer Algebra A, das $\neq$A ist
einfache Algebra	assoziative Algebra (A,K) mit {0} und A als einzigen →2-seit-Idealen. (Jede einfache Algebra ist →halbeinfach und hat eine Eins)
einfache Körpererweiterung	→K(e)
Einheit	ein u$\in$A in einer Algebra (A,K) mit Eins heißt Einheit, wenn es ein u'$\in$A gibt (Inverses) mit uu'=u'u=1. (Setzt man [A:K]<∞ voraus, so folgt, dass die Einheiten genau die Nichtnullteiler sind)
Einheitengruppe $\mathcal{U}$(A)	multiplikative Gruppe $\mathcal{U}$(A) der invertierbaren Elemente ("Einheiten") einer assoziativen Algebra A mit Eins
Erweiterungskörper	→K(e), Körpererweiterung
Faktoralgebra A/J	A/J :={x+J | x$\in$A}, wobei (A,+,.,K) eine Algebra und J$\subseteq$A ein →echtes →2-seit-Ideal A ist. (A/J,+,•, K) ist bezüglich „+“ ein →Faktorraum. A ist bezüglich „•“ wieder eine K-Algebra, wenn man für die Restklassen x' =x+J definiert: x'•y' := (xy)', sowie ξ.x' :=(ξx)' für $\xi\in$K, was wegen der 2-Seitigkeit von J und wegen x'=y' ⇔ x-y$\in$J sinnvoll ist. Ist A eine K-Algebra mit Eins 1, und K in A eingebettet (1_K=1_A=1), so ist auch A/J eine K-Algebra mit Eins 1' = 1+J. Da J echtes Ideal in A ist, ist 1$\notin$J, und 1' hat genau einen Repräsentanten, d.h. K.1' ist zu K isomorph. Also darf man K auch in A/J einbetten durch Identifikation von 1' und 1_K. Satz: Ist (A,K,N) eine →AMN, so ist A/RadN eine →reguläre KA mit N'(x') =N(x), und daher ist (Satz!) die Dimension [A/RadN : K] = 1, 2 oder 4

Begriff / Abkürzung	Definition / Erläuterungen / Sätze
Faktorraum	$A/T := \{x+T \mid x\in A\}$, wobei A ein K-Vektorraum und $T\subseteq A$ echter Teilraum ist. A/T ist wieder ein K-Vektorraum, wenn man für die Restklassen x'=x+T definiert: x'+y' :=(x+y)', ξ.x' := (ξx)' für $\xi\in K$, was wegen der Teilraumeigenschaft von T und wegen x'=y' ⇔ $x-y\in T$ sinnvoll ist
Fastinvolution	die mit einer →AMN $\mathscr{A} = K\oplus\mathcal{V}$ verbundene lineare Abbildung x =ξ +v → x*= ξ -v ($\xi\in K$, $v\in\mathcal{V}$)
geschlitzte KA	→kinematische Algebra A mit dimA =n und dimRadN = n-2
GL(n,K)	Gruppe der invertierbaren nxn-Matrizen über dem Körper K, Einheitengruppe der Matrixalgebra →L(n, K)
halbeinfache Algebra	assoziative Algebra (A,K) "ohne" →Algebraradikal, $\mathscr{R}_A = \{0\}$. Satz: Jede halbeinfache Algebra hat eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige Zerlegung in eine direkte Summe von →einfachen, sich gegenseitig annullierenden →Zweiseitidealen J_i mit je einer Eins e_i, und A hat als Eins die Summe der $e_i\in J_i$
Hamilton-Quaternionen	→Q(K) (für K=$\mathbb{R}$), Über $\mathbb{R}$ sind die "Hamilton-Quaternionen" $Q(\mathbb{R})=\mathbb{R}+e_1\mathbb{R}+e_2\mathbb{R}+e_3\mathbb{R}$ mit $e_i^2=-1$, $e_ie_j=-e_je_i=e_k$ (i,,j,k zykl. 1,2,3) der einzige →Schiefkörper über $\mathbb{R}$. Vgl. auch →reguläre IA mit $\mathscr{NT}$ ={0}
IA	→Involutionsalgebra
Ideal	Sammelbegriff für →Links- oder →Rechts- oder →2-seit-Ideal
Idealdurchschnitt	Für Linksideale L, L' $\subseteq$A ist $L\cap L'$ wieder ein Linksideal (A Ring oder Algebra. Entsprechendes für Rechts- und 2-seit-Ideale)
Idealprodukt	Für B,C $\subseteq$A-{$\emptyset$} (A Ring oder Algebra) ist B.C:={endliche Summen $\sum b_ic_i \mid b_i \in B, c_i \in C$} ein Links-ideal (bzw. Rechtsideal), sobald B ein Linksideal (bzw. C ein Rechtsideal) ist. B.C ist 2-seit-Ideal, wenn B Links- *und* C Rechtsideal ist. Für B.B, B.B.B, etc... schreibt man B², B³, etc...
Idealsumme	Für Linksideale L, L' $\subseteq$A (A Ring oder Algebra) ist L+L' :={x+y| $x\in L$, $y\in L'$} wieder ein Linksideal. Entsprechendes für Rechts- und 2-seit-Ideale
idempotentes Element	Element $a\in A$ (A Ring oder Algebra) mit a²=a
Index	→Nilexponent
innerer Automorphismus	→adjungierte Bewegung
inseparabel	→separables Polynom
Involution	Vektorraumisomorphismus ***:** A→A einer Algebra (A,K) mit x**=x, (xy)*= y*x* für alle x,y $\in$A. Zwei Arten findet man i.d. Literatur: (1) "**Involution erster Art**": z=z* für $z\in Z(A)$ (→Zentrum von A); (2) "**Involution zweiter Art**": $*\|_{Z(A)}$ ist Automorphismus von Z(A). In dieser Untersuchung kommen nur Involutionen mit der speziellen Eigenschaft x*=x ⇔ $x\in K$ vor.
Involutionsalgebra (IA)	hier stets in folgender eingeschränkter Definition: Assoziative Algebra (A, K, *) mit Eins über Körper K (Char K $\neq$2), wobei ***:**A→A eine →Involution 2. Art mit der speziellen Eigenschaft x*=x ⇔ $x\in K$ ist. Satz 1: Jede IA ist eine →KA und umgekehrt. Satz 2: Jede KA ist eine →AMN mit der Norm N(x)=xx*
irreduzibles Polynom	→reduzibles Polynom
K	hier verwendetes Standardzeichen für einen kommutativen →Körper
K(e)	einfache (algebraische oder transzendente) Körpererweiterung des Körpers K. ∫m algebraischen Fall ist $e\notin K$ Nullstelle eines über K irreduziblen Polynoms $p_e\in K[X]$ minimalen Grades, und K(e) ist isomorph zu K[X]/<p_e>, wobei <p_e> das von p_e erzeugte Ideal in K[X] ist. Im transzendenten Fall ist K(e) isomorph zu dem über K[X] gebildeten Körper der "Brüche" p/q; $p,q\in K[X]$, q$\neq$**0**)
K[X]	Ring der Polynome endlichen Grades in einer "Unbestimmten" X mit Koeffizienten im Körper K. K[X] ist die Menge aller *abbrechenden* Folgen f: $\mathbb{N}_0$:= {0, 1, 2,...} → K. Mit den Rechenregeln (f+g)(n) := f(n)+g(n), (fg)(n) := f(0)g(n)+f(1)g(n-1)+...+f(n)g(0) ($n\in\mathbb{N}_0$) ist K[X] eine kommutative assoziative K-Algebra mit Eins. Definiert man die drei speziellen Polynome **0, 1, X** durch **0**($\mathbb{N}_0$) :=(0,0,...) ("Nullpolynom"), **1**($\mathbb{N}_0$) :=(1,0,0,...) ("Einspolynom"), **X**($\mathbb{N}_0$) :=(0,1,0,0,...) ("Unbestim-mte"), so schreibt sich jedes Polynom in der üblichen Form f = f_0**1**+ f_1**X** +...+ f_m **X**^{m} mit f_m :=f(m) $\neq$0 und f(n)=0 für alle n>m. Die f_i :=f(i)$\in$K heißen die Koeffizienten von f und m heißt der Grad von f. Da jede endliche Teilmenge aus {**1**, **X, X², X³**, ...} linear unabhängig über K ist, ist K[X] ein K-Vektorraum unendlicher Dimension, [K[X] : K] = ∞
KA	→kinematische Algebra
K-Algebra	→Algebra über dem (kommutativen) →Körper K

Begriff / Abkürzung	**Definition / Erläuterungen / Sätze**
kinematische Algebra (KA)	assoziative Algebra A mit Eins über K mit der Eigenschaft $x^2 \in Kx+K$ für alle $x \in A$. Satz: eine KA (charK≠2) ist eine →konische AMN, wenn als →"Norm" die *von der KA-Eigenschaft induzierte* quadratische Form genommen wird. Umgekehrtes gilt nicht, d.h. es gibt konische AMNs die keine KAs sind. Beispiel: die AMN →L(2,$\mathbb{D}$). Es gibt aber auch KAs mit →"schiefer" Norm, die nicht konisch sind; Beispiel: Die →anomal-komplexen Zahlen ($\mathbb{A}$, N') =$\mathbb{R}f \oplus \mathbb{R}g$ mit fg=0, f+g=1 und RadN'=$\mathbb{R}$f
kinematischer Raum	der →projektive Raum PA einer →kinematischen Algebra A mit der Produktdefinition P(ab):= P(a)**.**P(b) für a,b∈A und ab≠0. Historische Anmerkung: PA wurde "*kinematischer Raum*" genannt, weil die →Einheitengruppe $\mathcal{U}$(A) in der adjungierten Darstellung ad(a): P(x) →ad(a)P(x)=P(a^{-1}xa) auf die Hyperebene P$\mathcal{V}$⊆PA als eine "Bewegungsgruppe" wirkt, und weil außerdem P$\mathcal{U}$(A) den Raum PA bis auf eine (eventuell ausgeartete) Hyperquadrik P$\mathcal{S}$ ausfüllt. (Vgl. auch:→$\mathcal{U}$,→$\mathcal{S}$, →$\mathcal{V}$)
Kompositionsalgebra	K-Algebra (A,K,N) mit *nicht entarteter* quadratischer, multiplikativer Form N:A→K, N(xy)=N(x)N(y). Beachte: Eine *assoziative* Kompositionsalgebra ist nichts anderes als eine →reguläre AMN. In der Literatur werden jedoch auch *nicht-assoziative* Kompositionsalgebren betrachtet, wobei aber N *nicht-entartet* bleibt. Vgl. zum Beispiel [Knu98]
konische AMN	AMN mit $\mathcal{S}$(N)=$\mathcal{NT}$(A), d.h. alle Nullteiler liegen auf den →Nullkonus, folglich sind auch alle →normregulären Elemente Einheiten, $\mathcal{P}$(N)= $\mathcal{U}$(A). Satz 1: Jede →reguläre AMN ist konisch. Satz 2: Jede →halbeinfache ausgeartete AMN ist **nicht-konisch;** die konischen ausgearteten AMNs sind also alle nicht-halbeinfach. Satz 3: Eine nicht-halbeinfache ausgeartete AMN A=B+$\mathcal{R}$ (wobei $\mathcal{R}$ das Algebraradikal von A, und (B,N_B,K) die halbeinfache Teil-AMN ist) ist genau dann konisch, wenn RadN_B={0} ist.
Körper	assoziativer und ***kommutativer*** →Ring (K, +, •) mit Null 0 und Eins 1 ≠ 0, so dass (K-{0}, •) kommutative Gruppe ist. Zu jedem a≠0 gibt es genau ein Inverses a^{-1} mit aa^{-1}= a^{-1}a =1. "Körper" heißt hier stets "*kommutativer* Körper"; andernfalls →"Schiefkörper". Von einem Körper K wird in dieser Untersuchung durchgehend →Char K ≠ 2 vorausgesetzt
L(2,$\mathbb{D}$)	Algebra der 2x2-Matrizen über dem Ring der "Dualzahlen" $\mathbb{D}$:= $\mathbb{R}$+ e$\mathbb{R}$ mit e∉ $\mathbb{R}$, e²=0. Als Algebra über $\mathbb{R}$ ist L(2,$\mathbb{D}$)=L(2,$\mathbb{R}$)⊕eL(2,$\mathbb{R}$) ein Beispiel für eine →konische aber nicht-kinematische →AMN (A,N,$\mathbb{R}$) wobei die →multiplikative Norm N ausgeartet ist und durch N(a+eb) :=det(a) (a,b∈L(2,$\mathbb{R}$)) definiert wird.
L(2,K)	Algebra der 2x2-Matrizen über dem Körper K
Liealgebra	→Algebra (A, +, [,], K) über dem →Körper K mit K-bilinearer Multiplikation [,]: AxA→A, sowie [b,a] = -[a,b] und [a,[b,c]] +[b,[c,a]] +[c,[a,b]] = 0 (Jakobi-Identität) für alle a,b,c ∈A. (Bem.: Liealgebren werden in dieser Untersuchung nicht behandelt)
linkseinfache Algebra	Algebra (A,K), in welcher {0} und A die einzigen →Linksideale sind
Linksideal	K-linearer Teilraum L einer Algebra (A,K) mit aL ⊆ L für alle a∈A (a steht links)
Linksnullteiler	Element a∈A (A Ring oder Algebra), zu welchem es ein b∈A-{0} gibt mit ab=0 (a steht links)
Linksschiebung	Vektorraumisomorphismus L_z:x∈A → zx∈A einer →AMN (A,K,N) mit z∈$\mathcal{U}$(A) (Einheitengruppe) und N(z)=1
maximales 2-seit-Ideal	→2-seit-Ideal J⊆A (A Ring oder Algebra) mit J ≠ A, so dass für jedes 2-seit-Ideal J' ⊇ L folgt: J'=J oder J'=A
maximales Linksideal	→Linksideal L⊆A (A Ring oder Algebra), mit L ≠ A, so dass für jedes Linksideal L' ⊇ L folgt: L'=L oder L'=A
maximales Rechtsideal	→Rechtsideal R⊆A (A Ring oder Algebra) mit R ≠ A ist, so dass für jedes Rechtsideal R' ⊇ R folgt: R'= R oder R'=A
minimales (oder einfaches) 2-seit-Ideal	→2-seit-Ideal J⊆A (A Ring oder Algebra), das keine 2-seit-Ideale von A außer {0} und J enthält
minimales (oder einfaches) Linksideal	→Linksideal L⊆A (A Ring oder Algebra), das keine Linksideale von A außer {0} und L enthält
minimales (oder einfaches) Rechtsideal	→Rechtsideal R⊆A (A Ring oder Algebra), das keine Rechtsideale von A außer {0} und R enthält
Minimalpolynom	→Polynom p_a∈K[X] kleinsten Grades für ein a∈A (A Algebra über K) mit der Eigenschaft p_a(a) = 0
multiplikative Norm	Quadratische Form N: A →K einer →AMN (A, K, N) mit der Eigenschaft N(xy) = N(x)N(y) für alle x,y∈A. (Hinweis: Wegen ihrer Verwandtschaft der Determinante bzw. dem absoluten Koeffizienten im →Minimalpolynom wird N "Norm" genannt. Für die "geometrischen Eigenschaften" einer AMN ist aber genau so maßgebend, dass N eine *quadratische Form* ist. Standardbeispiel: Die Algebra

Begriff / Abkürzung	Definition / Erläuterungen / Sätze
	A=L(2,$\mathbb{R}$) der reellen 2x2-Matrizen ist eine AMN mit N(x) = det(x)
nicht-konische AMN	AMN (A,K,N) mit $\mathcal{S}$(N)≠ $\mathcal{NT}$(A) (und somit auch $\mathcal{P}$(N)≠ $\mathcal{U}$(A)) (→$\mathcal{S}$, $\mathcal{NT}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{U}$)
Nilexponent	kleinste natürliche Zahl s mit $J^s = \{0\}$ für ein →nilpotentes Ideal J. (Statt „Nilexponent" ist auch das Wort „Index" gebräuchlich)
nilpotentes Element	Element a∈A (A Algebra) mit $a^m=0$ für ein m>1. Nilpotente Elemente von A erzeugen i.allg. *kein* →nilpotentes Ideal; Beispiel: Jede Matrix x∈L(2,$\mathbb{R}$) mit det(x) =tr(x) =0 ist nilpotent, zusammen erzeugen diese x jedoch ganz L(2,$\mathbb{R}$), einzeln erzeugen sie 2-dimensionale nicht-nilpotente Linksideale L(2,$\mathbb{R}$)x bzw. Rechtsideale xL(2,$\mathbb{R}$)
nilpotentes Ideal	ein (Links- / Rechts- /2-seit-)Ideal J ⊆A (A Ring oder Algebra) mit $J^n = \{0\}$ für ein n>1. Sind J, J' nilpotente (Links- /Rechts- /2-seit-)Ideale, so auch J+J' und J.J'. Ist s der →Nilexponent von J, so gilt $J \supseteq J^2 \supseteq \ldots \supseteq J^{s-1} \supseteq J^s = \{0\}$ und für $1 \leq k \leq s-1$: $J^k \neq \{0\}$, $J^k \neq J^{k+1}$
Norm	hier stets Synonym für "quadratische Form" N: A→K eines K-Vektorraums A (charK≠2). Mit N ist stets eine → symmetrische Bilinearform <,>: AxA→K gegeben durch 2<x,y> = N(x+y) -N(x) -N(y)
normale Algebra	→zentrale Algebra
Normradikal	Die Menge RadN :=$\{r \in A \mid \langle r,x \rangle=0$ für alle $x \in A\}$ (A Vektorraum oder →AMN). RadN besteht aus den Elementen, die →'orthogonal' sind zu allen Elementen von A bezüglich der gegebenen →symmetrischen Bilinearform <,>. Satz: In einer AMN ist RadN ein zweiseitiges Ideal, welches das →Algebraradikal $\mathcal{R}_A$ enthält
normreguläres Element	Element a einer →AMN mit N(a)≠0
$\mathcal{NT}$(A)	die Menge der →Nullteiler einer Algebra (A,K).
Nullkegel	→Nullkonus
Nullkonus	die Menge $\mathcal{S}$:=$\{x \in A \mid N(x)=0\}$ in einer →AMN (A,K,N)
Nullteiler	Element a∈A (A Ring oder Algebra), welches →Rechtsnullteiler *und* →Linksnullteiler in A ist. Bem.: Ist (A,K) Algebra mit [A:K]<∞, so ist jeder Rechtsnullteiler auch ein Linksnullteiler und umgekehrt, und es gilt: (i) Jedes →*echte* Ideal besteht nur aus Nullteilern. (ii) Hat A eine Eins 1 und ist J ein Ideal mit 1∈J, so ist J=A.
orthogonal	zwei Vektoren x,y mit <x,y,>=0 bezgl. eines gegebenen, *symmetrischen* →Skalaproduktes <,> heißen orthogonal zueinander, in Zeichen: x⊥y. Ist (V,K,<,>) ein K-Vektorraum mit (eventuell entartetem) Skalarprodukt und T⊆V Teilraum, so heißt $T^\perp := \{y \in V \mid \langle x,y \rangle=0$ f.a. $y \in T\}$ das orthogonale **Komplement** von T; es gilt $T+T^\perp=V$, $T \cap T^\perp \subseteq V^\perp$ =:Rad<,>, $T^{\perp\perp}$=T+Rad<,>. Ist $T \oplus T^\perp$ =V, so heißt $T^\perp$ das orthogonale **Supplement** von T.
$\mathcal{P}$(N)	Menge $\mathcal{P}$:=$\{a \in A \mid N(x) \neq 0\}$ der →normregulären Elemente einer →AMN (A, N, K)
Polynome	→K[X] (Ring der Polynome über einem Körper K)
projektiver Raum	Ist A ein K-Vektorraum, so heißt PA := A-{0}/K-{0} :=$\{(K-\{0\})x \mid x \in A-\{0\}\}$ der aus A abgeleitete projektive Raum. Mit der "Projektion" P: A-{0}→PA werden die 1- , 2-, 3-dimensionalen Teilräume und quadratische (Hyper-)Kegel von A auf die Punkte, Geraden, Ebenen und (Hyper-)Quadriken abgebildet. Ist in A eine symmetrische Bilinearform gegeben, so werden orthogonale Elemente in A auf Elemente in PA abgebildet, die bezüglich einer Hyperquadrik *polar* sind. Da durch die "Projektion" die Raumdimension um 1 verringert wird, eignen sich projektive Räume, dazu, geometrische Sachverhalte anschaulicher zu machen, besonders für dimA=3 oder 4.
Q(K)	Algebra der Quaternionen über dem Körper K. Q(K) ist eine reguläre →AMN ($RadN_Q=\{0\}$) mit der Dimension [Q(K):K] = 4. Für K=$\mathbb{R}$ (reelle Zahlen) ist Q($\mathbb{R}$) ein →Schiefkörper, genannt 'Hamilton-Quaternionen'. Für andere Körper (z.B. K=$\mathbb{C}$, komplexe Zahlen) kann Q(K) echte →Nullteiler enthalten.
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathcal{R}_A$	→Algebraradikal
Radikal	→Algebraradikal, →Normradikal, →s-Radikal
RadN	→Normradikal einer →AMN (A,K,N)
rechtseinfache Algebra	Algebra (A,K) in welcher {0} und A die einzigen →Rechtsideale sind
Rechtsideal	K-linearer Teilraum R einer Algebra (A, K) mit Ra ⊆ R für alle a∈A (a steht rechts)
Rechtsnullteiler	Element a∈A (A Ring oder Algebra), zu welchem es ein b∈A-{0} gibt mit ba=0 (a steht rechts)
Rechtsschiebung	Vektorraumisomorphismus R_z:x∈A→ xz∈A einer →AMN (A,K,N) mit z∈$\mathcal{U}$(A) (Einheitengruppe)

Begriff / Abkürzung	Definition / Erläuterungen / Sätze
	und N(z)=1
reduzibles Polynom	→Polynom $p\in K[X]$-K.**1**, das *im Körper K* vollständig in (nicht notwendig verschiedene) Linearfaktoren zerlegbar ist: $p=\beta(X-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(X-\alpha_m)$; β, $\alpha_i\in K$. Tut es das nicht, d.h. sind einige $\alpha_i \notin K$, so heißt p **irreduzibel** über K. Vereinbarung: Hat p selbst schon die Form eines Linearfaktors $p=\beta(X-\alpha)$ ($\beta\in K$, $\beta\neq 0$), so heißt p ebenfalls **irreduzibel**.
reguläre AMN	→AMN mit nicht ausgearteter multiplikativer →Norm: RadN={0} (Satz: Eine reguläre AMN ist eine IA; Umgekehrtes gilt nicht, da es ausgeartete IAs gibt)
reguläre IA	→Involutionsalgebra (A,K,*) mit nicht-entarteter Norm N:AxA→K, N(x):=xx* (RadN={0}). Im Fall K=$\mathbb{R}$ gibt es für eine reguläre IA (bis auf Isomorphie) nur die Fälle $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (→komplexe Zahlen), $\mathbb{A}$ (→anomal-komplexe Zahlen), →L(2,$\mathbb{R}$) (reelle 2x2-Matrizen), Q($\mathbb{R}$) (→Hamilton-Quaternionen)
Ring	(R, +,•) heißt Ring, wenn (R,+) kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 ist und wenn für die Miltiplikation •: RxR→R beide Distributivgesetze a•(b+c)=a•b+a•c, (b+c)•a=b•a+c•a gelten. Daraus folgt 0•a=a•0=0. Gilt a•b=b•a, so heißt R kommutativer Ring; gilt auch das Assoziativgesetz a•(b•c)= (a•b)•c), so heißt R assoziativer Ring; gilt statt dessen nur a•(b•b)=(a•b)•b) und a•(a•b)= (a•a)•b), so heißt R Alternativring; ist • eine Lieklammer [,], d.h.: [a,b]=-[b,a], **[**a,[b,c]**]**+**[**b,[c,a]**]**+**[**c,[a,b]**]** =0, so heißt R Liescher Ring.
s-ausgeartet	Ist $\mathcal{N}$ eine →symplektische (nilpotente) Algebra, V$\subseteq\mathcal{N}$ ein linearer Teilraum so heiße, V „s-ausgeartet", wenn das → s-Radikal von V verschieden von {0} ist.
$\mathcal{S}$(N)	→Nullkonus / Nullkegel einer →AMN (A,N,K)
schiefe Norm	→Norm N' einer nicht-konischen →AMN, d.h. es gibt →normreguläre Nullteiler: $\mathcal{NT}\neq\mathcal{S}$ (und somit auch $\mathcal{P}\neq\mathcal{U}$) (→$\mathcal{NT}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{U}$). Bem.: Eine →KA (A,N,K) mit der durch die KA-Eigenschaft induzierten Norm N kann man zu einer AMN (A,N',K) mit schiefer Norm N' machen, wenn der Ausartungsgrad der Norm vergrößert wird unter Beibehaltung der Multiplikativität.
Schiefkörper	nicht notwendig kommutativer Körper S; als Algebra über einem kommutativen Teilkörper K$\subseteq$S auch →"**Divisionsalgebra**" genannt.
separable Algebra	→halbeinfache Algebra (A, K), für die bei jeder →Körpererweiterung S $\supseteq$K die →Algebraerweiterung A_S halbeinfach bleibt
separable Körpererweiterung	Körpererweiterung K'$\supseteq$K, so dass *jedes* über K →*irreduzible* →Polynom $p\in K[X]$-K.**1** →separabel ist, d.h. über K' nur *einfache* Nullstellen hat. Beispiel für inseparable Körpererweiterung →Beispiel **(2)** im nächsten Absatz.
separables Polynom	über K →<u>*irreduzibles*</u> →Polynom $p\in K[X]$-K.**1** mit lauter <u>*einfachen*</u> Nullstellen. Ein *separables* Polynom $p\in K[X]$-{0} zerfällt also in einem geeigneten Oberkörper S$\supseteq$K *vollständig* in <u>*verschiedene*</u> Linearfaktoren: $p=\beta(X-\alpha_1.\mathbf{1})\cdot\ldots\cdot(X-\alpha_n.\mathbf{1})$ ($\beta\neq 0$; $\beta,\alpha_i\in S$; $\alpha_i\neq\alpha_k$ für i≠k - „keine Doppelwurzeln"). Beispiele: **(1)** Ist charK=0 oder ist K ein endlicher Körper mit charK= q (Primzahl), so hat *jedes* über K *irreduzible* Polynom $p\in K[X]$-{**0**} nur *einfache* Nullstellen, ist also separabel; („die meisten wichtigen" Körper gestatten nur separable Körpererweiterungen). **(2)** Beispiel für ein **inseparables** Polynom: Sei K= $\mathbf{Z_2}(\theta)$ transzendente Körpererweiterung des Primkörpers $\mathbf{Z_2}$= {0,1}. Das Polynom $p= X^2-\theta\in K[X]$ ist in K[X] irreduzibel, da K ja nur rationale Funktionen in θ aber nicht die Wurzel α von θ enthält. Mit charK=2 ist andererseits: $p= X^2-\theta = (X-\alpha)^2$, d.h. α ist eine Doppelwurzel; ➔ p ist inseparabel über K, und der Körper $\mathbf{Z_2}(\alpha)$ ist inseparabel über $\mathbf{Z_2}(\theta)$.
Skalarprodukt	hier stets Synonym für →*symmetrische* K-Bilinearform mit Werten *im Körper K*
s-orthogonal	zwei Elemente u,v einer (nilpotenten) Algebra $\mathcal{N}$ mit uv=0 nennen wir „s-orthogonal" zu einander. Vgl. auch →symplektische Algebra, →s-Radikal.
Spur	→charakteristisches Polynom
Spurraum	→$\mathcal{V}$(N)
s-Radikal	Ist $\mathcal{N}$ eine →symplektische (nilpotente) Algebra, V$\subseteq\mathcal{N}$ ein linearer Teilraum, so heiße sradV:={x∈V|xy=0 für alle y∈V} das s-Radikal von V. V heißt „nicht-s-ausgeartet", wenn sradV={0}
symmetrische Bilinearform (SBLF)	Abbildung <, >:AxA→K eines K-Vektorraumes A mit <x,y>=<y,x>, <x+y,z> =<x,z>+<y,z>, ξ<x,y> =<ξx,y> für alle x,y,z∈A, $\xi\in$K. (Die zugehörige quadratische Form N(x):=<x,x> heißt auch „Norm". Für gewisse x∈A, x≠0 darf N(x)=0 sein). Anmerkung: Manchmal wird in dieser Note „SBLF" auch allgemeiner als K-bilineare Abbildung AxA→T definiert, wobei T ein Teilraum von A ist.
symplektische Algebra	(nilpotente) Algebra $\mathcal{N}$ mit x^2=0 für alle x$\in\mathcal{N}$. Äquivalent dazu ist die Eigenschaft xy=-yx für alle x,y$\in\mathcal{N}$
Teilalgebra	K-linearer Teilraum B einer Algebra (A,+,**.**,K) mit ab∈B für alle a,b∈B (B ist i.allg. kein Ideal in A)

Begriff / Abkürzung	Definition / Erläuterungen / Sätze
Tensorprodukt	→direktes Produkt von Vektorräumen
total ausgeartete AMN	AMN (A,N,K) mit RadN =$\mathcal{V}$ (→AMN, RadN, →$\mathcal{V}$)
tr(a)	Spur (*trace*); →charakteristisches Polynom
transzendente Körper-erweiterung	→K(e)
$\mathcal{U}$(A)	→Einheitengruppe einer Algebra A mit Eins
$\mathcal{V}$(N)	das zur Eins orthogonale Supplement $1^{\perp}$ = $\mathcal{V}$(N):={x∈A | <1,x>=0} einer →AMN (A,N,K). $\mathcal{V}$(N) heißt auch „**Spurraum**“, denn z.B. für die AMN A=L(2,ℝ) ist <1,x> die →***Spur*** der Matrix x∈L(2,ℝ). $\mathcal{V}$ besteht also in Fall L(2,ℝ) als allen 2x2-Matrizen mit Spur Null
vollkommener Körper	Körper, der nur → separable algebraische Körpererweiterungen gestattet. Alle Körper mit →charK=0 und alle endlichen Körper mit charK=p (Primzahl) sind vollkommen.
zentrale Algebra	Algebra (A, K) mit Z(A)=K als →Zentrum (früher z.T. auch "normale Algebra" genannt)
Zentrum von A	Z(A):={z∈A | zx=xz für alle x∈A} (A Ring oder Algebra)
Zerfällungskörper eines Polynoms p	→Körpererweiterung K'⊇K, in welcher das Polynom p∈K[X]-{0} vollständig in (nicht notwendig verschiedene) Linearfaktoren zerfällt: $p=\beta(X-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(X-\alpha_m)$ ($\beta\in K$, $\alpha_i\in K'$)
Zweiseitideal, 2-seit-Ideal	Ideal, das sowohl →Rechts- als auch →Linksideal ist

2 Literaturverzeichnis

Referenz-ID	Autor, Titel, Verlag, Erscheinungsjahr
[Alb61]	A. A. Albert: Structure of Algebras. American Mathematical Society, Colloquium Puplications, Vol.24, 1961
[Art.I.60]	E. Artin: Analytische Geometrie und Algebra I, Univ. Hamburg, 1960
[Art.II.60]	E. Artin: Analytische Geometrie und Algebra II, Univ. Hamburg, 1960/61
[Bla11]	W. Blaschke: Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Zeitschr. Math. Phys. 60 (1911), 61-91, 203-204
[Bla38]	W. Blaschke: Ebene Kinematik. Hamburger Math. Einzelschriften 25 (1938), Berlin-Leipzig, Teubner
[Bla42]	W. Blaschke: Nichteuklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Berlin-Leipzig, Teubner 1942
[Bla60]	W. Blaschke: Kinematik und Quaternionen. Berlin, VEB Deutscher Vlg. der Wiss. 1960
[Brau73]	Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen. Monatsh. Math. 77 (1973), 10-20
[Brö73]	L. Bröcker: Kinematische Räume. Geometriae Dedicata 1, 1973, 241-278
[Eck23]	L. Eckhart: Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie. Sb. Akad. Wiss., Wien IIa 132 (1923), 177-192
[Eck26]	L. Eckhart: Konstruktive Abbildungsverfahren. Wien, Springer 1926
[Fub04]	Il paralelismo di Clifford negli spazi ellittici. Anali della Scuola Normale, Pisa 9 (1904)
[Grö69]	W. Gröbner: Matrizenrechnung. BI 103/103a, 1966
[Grü11]	J. Grünwald: Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Sb. Akad. Wiss. Wien IIa, 80 (1911) 677-741
[Hje00]	J. Hjelmslev: Geometrie des droites dans l'espace non euclidien. Kopenhagen Verhandl. Akad. (1900), 308-330
[Ka64]	Bericht über projektive Inzidenzgruppen. Jahresber. DMV 67 (1964), 58-92
[Ka65]	H. Karzel: Zweiseitige Inzidenzgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 29 (1965), 118-136
[Ka70]	H. Karzel: Bericht über geschlitzte Inzidenzgruppen. Jahresber. DMV 72 (1970), 70-114
[Ka73]	H. Karzel: Kinematic Spaces. Ist. Naz. Alta Math. Symposia Mathemática, 11, 1973
[Ka74]	H. Karzel: Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 41, 1974, 158
[Knu98]	M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol: The Book of Involutions. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 44, 1998
[Lü76]	C. Lübbert: Die kinematischen Geradenabbildungen. Habilitationsschrift, Preprint 278, TH-Darmstadt, 1976
[Lü77]	C. Lübbert: Differentialgeometrische Kennzeichnung einer Klasse von Algebren. Abh. d. Braunschweigischen Wiss. Gesellschaft, 28, 1977
[Lü79]	C. Lübbert: Über kinematische Geradenabbildungen. Abh. d. Braunschweigischen Wiss. Gesellschaft, 30, 1979
[Lü80]	C. Lübbert: Zerlegungen der Grenzgruppe des einfach-isotropen Raumes J_n. Journal of Geometry, 14/1, 1980
[Lü83]	C. Lübbert: Algebras con norma multiplicativa hermítica. Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. 31, 1983
[Mü61]	H.R. Müller: Die kinematischen Abbildungen im dreidimensionalen Raum. Monatsh. Math. 65 , 1961, S.252-258
[Mü62]	H.R. Müller: Sphärische Kinematik. Berlin, VEB Deutscher Vlg. d. Wiss. 1962
[Mu63]	H.R. Müller: Kinematik. Berlin. Göschen, Bd, 584/584°, 1963
[Re31]	F. Rehbock: Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. Monatsh. Math. u. Phys. 38, 1931
[Rei69]	H.-J. Reiffen, G. Scheja, U. Vetter: Algebra. BI 110/110a, 1969
[Wae.I.67]	B.L. van der Waerden: Algebra Erster Teil, Springer 1967
[Wae.II.67]	B.L. van der Waerden: Algebra Zweiter Teil, Springer 1967