Kapitel 6 - Nicht-halbeinfache AMN

Version: V2.3 vom 27.05.2008

Inhaltsverzeichnis

6 Bestimmung der nicht-halbeinfachen separablen AMNs

6.1 Vorbemerkungen

Wir gehen nun an die Bestimmung der nicht-halbeinfachen AMNs, d.h. der AMNs, die ein nichtverschwindendes Algebraradikal $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \neq \{0\}$ haben.

Bisher hatten wir über den kommutativen Grundkörper K nur charK $\neq 2$ vorausgesetzt. Nun aber machen wir folgende weitere Einschränkung:

(6.1) **Voraussetzung**: Der Grundkörper der betrachteten AMN soll „vollkommen" sein, d.h. jedes über K *irreduzible* Polynom $p \in K[X]$ (p nicht konstant) soll ***separabel*** sein, d.h. es soll in einer geeigneten algebraischen Körpererweiterung $K' \supseteq K$ nur ***einfache*** Nullstellen haben. Solche Körpererweiterungen $K' \supseteq K$ nennt man ebenfalls „separabel".

Diese Einschränkung erscheint nicht so schwerwiegend, da die "wichtigsten" Körper, z.B. alle mit charK=0 und alle Galois-Felder (endliche Körper mit charK =q =Primzahl) vollkommen sind. Mit dieser Einschränkung gelingt es aber, auch die AMNs über solchen Körpern näher zu bestimmen, die ein nichtverschwindendes Algebraradikal haben.

Zur Bestimmung aller nicht-halbeinfachen AMNs über separablem Körper K benutzen wir einige Definitionen und Sätze aus [Alb61]:

(6.2) **DEF.**: Eine halbeinfache Algebra (B,K) heißt ***separabel*** über dem Körper K, wenn für *jede* Körpererweiterung $K' \supseteq K$ die Algebraerweiterung $B_{K'}$ ebenfalls halbeinfach ist.

Zur Motivation dieser Definition einige Bemerkungen, welche bekannte Sätze aus der Literatur - vgl. [Wae.II.67]/§103 - zusammenfassen. Zweck ist, die Separabilität bei Algebren auf die eines kommutativen Körpers zurückzuführen.

1. Eine halbeinfache Algebra (B,K) (mit Eins **1**) ist direkte Summe von einfachen Algebren (A_i, K) (mit Einsen $\mathbf{1}_i$). Wir können daher die weitere Betrachtung auf einfache Algebren (A,K) beschränken.

2. Eine einfache Algebra (A, K) ist nach einem fundamentalen Satz von **WEDDERBURN** isomorph zu einem *vollen* Matrixring L(n,S) über einem Schiefkörper S.

3. Das Zentrum von A ~ L(n,S) besteht aus den kommutativen Vielfachen der Einheitsmatrix **1**, kann also mit dem Zentrum von S gleichgesetzt werden, Z(A) ~ Z(S), und enthält den kommutativen Grundkörper K.**1**; somit kann man eine einfache Algebra (A, K) stets als Produkt $A \sim S \otimes L(n,K)$ schreiben.

4. Nun sind der Schiefkörper S und der volle Matrixring L(n,K) selbst einfach (Spezialfall des Satzes von WEDDERBURN).

5. Ist nun K' ein beliebiger kommutativer Oberkörper von K, so ist die Algebraerweiterung $A' = A_{K'}$ isomorph zu $A \otimes K' \sim S \otimes L(n,K') \sim (K' \otimes S) \otimes L(n,K)$.

6. Wenn $K' \otimes S$ einfach bzw. halbeinfach ist, also direkte Summe von vollen Matrixringen, so ist auch $A' \sim (K' \otimes S) \otimes L(n,K)$ einfach bzw. halbeinfach, und damit ist auch die Algebraerweiterung $B_{K'}$ der Ausgangsalgebra (B,K) als direkte Summe einfacher bzw. halbeinfacher Algebren halbeinfach. Es bleiben also nur die Separabilitätsbedingungen für $K' \otimes S$ zu untersuchen.

7. Schließlich führt der sogenannte **Reduktionssatz** den nicht-kommutativen Fall auf den kommutativen Fall zurück. Er besagt: Sei S Schiefkörper über K, Z=Z(S) sein Zentrum (also $K \subseteq Z$) und R eine beliebige K-Algebra (alle Dimensionen über K endlich!). Setzt man $T := R \otimes S$, $Z' := R \otimes Z$, so wird jedes Zweiseit-Ideal von T von einem Zweiseit-Ideal von Z' erzeugt.

8. Aus dem Reduktionssatz folgt für $K' \otimes S$ (K' beliebiger Oberkörper von K ($K \subseteq Z(S) \subseteq S$): Ist $Z' := K' \otimes Z(S)$ einfach, so auch $K' \otimes S$; ist Z' halbeinfach, so auch $K' \otimes Z(S)$, und zwar ist $K' \otimes Z(S)$ direkte Summe von ebenso vielen einfachen Algebren wie

Z'. Die Separabilität der Algebren (A,K) - und damit auch die der Ausgangsalgebra (B,K) - hängt offenbar nur von der Art des Zentrums Z(S) ab. Weiter brauchen wir also nur Z(S) zu untersuchen.

9. Setze Z:=Z(S), Z ist einfach und enthält den Grundköper K.
(a) Entweder ist Z **separable** (endlichdimensionale) Erweiterung von K. Ist $p\in K[X]$ ein in K[X] irreduzibles Polynom vom Grad n und $\alpha \in Z - K$ eine Nullstelle von p, so ist $Z = K(\alpha) = K + K\alpha + ... + K\alpha^{n-1}$ und das ist bekanntlich isomorph zu K[X]/<p>. An der Struktur ändert sich bei Körpererweiterung $K'\supseteq K$ nichts: Für die Algebraerweiterung $Z_{K'}$ gilt entsprechend $Z_{K'} = K' + K'\alpha + ... + K'\alpha^{n-1} \sim K'[X]/<p>$. Da p auch in K'[X] keinen mehrfachen Linearfaktor besitzt, kann ein Polynom $q\in K'[X]$ für das mit einem m>1 $(q(\alpha))^m = 0$ gelten soll, nur das Nullpolynom sein; ➔ in $Z_{K'}$ gibt es außer 0 keine Nilpotenten Elemente ➔ das Algebraradikal von $Z_{K'}$ ist $=\{0\}$ ➔ $Z_{K'}$ ist *halbeinfach*.
(b) Oder Z ist **inseparabel** über K, d.h. es gibt ein $\alpha\in Z$, welches m-fache Nullstelle (m>1) eines in K[X] irreduziblen Polynoms $p\in K[X]$ ist, z.B. $p=(X-\alpha)^m$. Z enthält den Teilkörper $K' := K(\alpha)$ und $Z_{K'}$ enthält den Teilring $K'(\alpha) \sim K'[X]/<p>$, und es gilbt in K'[X]-{0} ein Polynom f, z.B. $f = X-\alpha$, das selbst nicht teilbar durch p ist, während f^m teilbar durch p ist; ➔ in $Z_{K'}$ gibt es nilpotente Elemente $\neq 0$ und diese erzeugen (wegen der Kommutativität) nilpotente 2-seit-Ideale $\neq\{0\}$ in $Z_{K'}$ ➔ das Algebraradikal von $Z_{K'}$ ist $\neq\{0\}$ ➔ $Z_{K'}$ ist *nicht* halbeinfach.

10. Im Fall **9.a** sind dann auch die Erweiterungen $A_{K'}$, und somit die Erweiterung $B_{K'}$ der Ausgangsalgebra B wieder halbeinfach bei jeder beliebigen Körpererweiterung $K' \supseteq K$. Im Fall **9.b** ist die Erweiterung $B_{K'}$ der halbeinfachen Ausgangsalgebra B nach Konstruktion der Körperweiterterung $K'\supseteq K$ nicht mehr halbeinfach.

Hieraus folgt der folgende Satz [vgl. **Alb61**, Chapter III, Theorem 23], der zur Bestimmung aller nicht-halbeinfachen, separablen AMNs führen wird.

(6.3) **Satz**: Sei (A,K) nicht-halbeinfache Algebra mit Eins 1 und mit Algebraradikal $\mathcal{R}_A \neq\{0\}, \neq A$. Ist $A/\mathcal{R}_A$ separabel, so hat A die Form $A = T\oplus\mathcal{R}_A$, wobei T eine zu $A/\mathcal{R}_A$ isomorphe ***Teilalgebra*** von A ist.

Beweisidee: **(a)** Es gibt immer eine Zerlegung $A= T\oplus\mathcal{R}_A$ mit geeignetem linearen Teilraum T. Jede Restklasse $x' = x+\mathcal{R}_A$ hat genau einen Repräsentanten in T. Denn $x'=y' \Leftrightarrow x-y \in\mathcal{R}_A$; und da mit $x, y\in T$ auch $x-y\in T$, folgt x=y aus $T\cap\mathcal{R}_A=\{0\}$. Ist T sogar Teilalgebra, also $x,y\in T$ ➔ $xy\in T$, so folgt mit dem natürlichen Homomorphismus π: $A= T\oplus\mathcal{R}_A \rightarrow A' = (T\oplus \mathcal{R}_A)/\mathcal{R}_A = \pi(T) \sim T$.
(b) Zu zeigen ist, dass es eine solche Teilalgebra T gibt. Beweis durch Induktion über die Dimension $m= \dim_K A - \dim_K\mathcal{R}_A$: Da K.**1** zu K isomorpher Körper und damit Teilalgebra von A ist, gilt der Satz für die Teilalgebra $B:= A_1 :=K.1\oplus \mathcal{R}_A$. Annahme, der Satz sei schon für Teilalgebra $B:= A_n =T_n \oplus \mathcal{R}_A$. (n<m) bewiesen. Dann kann man ihn auch für n+1 beweisen, wenn $\mathrm{NilExp}(\mathcal{R}_A)>2$ ist. **(b)** Für den Fall $\mathrm{NilExp}(\mathcal{R}_A)=2$ ist ein separater Beweis erforderlich; nur in diesem Fall wird die Separabilität explizit benötigt: Man zeigt, dass damit für eine algebraische Körpererweiterung $S\supseteq K$ die Algebra $(A/\mathcal{R}_A)\otimes S$ halbeinfach ist, dass $A\otimes S$ eine zu $(A/\mathcal{R}_A)\otimes S$ isomorphe Teilalgebra T' enthält, und konstruiert damit nach geeigneter Basiswahl eine zu $(A/\mathcal{R}_A)$ isomorphe Teilalgebra in A.

6.2 Die nichthalbeinfachen separablen AMNs

Sei $(\mathscr{A},K,N)$ eine nicht-halbeinfache AMN, also mit (4.13): $\{0\} \neq\mathcal{R}_{\mathscr{A}}\subseteq \mathrm{RadN} \subseteq\mathcal{V}\cap\mathcal{S}$. Dann ist nach (5.7), (5.8) die Faktoralgebra $\mathscr{A}' = \mathscr{A}/\mathcal{R}_{\mathscr{A}}$ eine halbeinfache AMN der Form $\mathscr{A}'=$**A'**$\oplus$**R'**, wobei A' und R' halbeinfache Algebren (beides Ideale von $\mathscr{A}$) mit A'.R'=R'.A' ={0'} und $1_{\mathscr{A}'} =1_{A'} +1_{R'}$ sind, **A'** eine reguläre KA, **R'** =RadN' das Normradikal von $\mathscr{A}'$ ist und für die Norm $N' :\mathscr{A}'\rightarrow K$ gilt: N'(x') = N(x) ($x':=x+\mathcal{R}_{\mathscr{A}}$; $x\in\mathscr{A}$), (*)

Wenn $\mathscr{A}'=\mathscr{A}/\mathcal{R}_{\mathscr{A}}$ separabel ist, können wir (6.3) anwenden, und es folgt $\mathscr{A}=B\oplus\mathcal{R}_{\mathscr{A}}$, wobei B eine zu A'⊕R' isomorphe **Teilalgebra** von $\mathscr{A}$ ist. Nun müssen wir nur zeigen, dass es einen Isomorphismus j: B→ A'⊕R' gibt, der die Norm respektiert, d.h. für den gilt N(b)=N'(j(b)). f sei der natürliche Homomorphismus f: $\mathscr{A} =B\oplus\mathcal{R}_{\mathscr{A}} \rightarrow \mathscr{A}'=\mathscr{A}/\mathcal{R}_{\mathscr{A}}$. Jedem $b\in B$ wird dabei eine Restklasse $f(b)=b+ \mathcal{R}_{\mathscr{A}}\in\mathscr{A}'$ zugeordnet, und f(b)=f(x) genau, wenn $x-b\in\mathcal{R}_{\mathscr{A}}$. Speziell werden alle $r\in\mathcal{R}_{\mathscr{A}}$ auf die Restklasse $0'=0+\mathcal{R}_{\mathscr{A}}$ abgebildet.

(6.4) Lemma: Der natürliche Homomorphismus f, beschränkt auf B, also $j := f_{|B}$, ist ein Isomorphismus $B \rightarrow \mathcal{A}'$, der die Norm respektiert.

Bew.: Dazu müssen wir nur zeigen, dass aus $b,c \in B$, $j(b)=j(c)$ folgt $b=c$: Sei also $b,c \in B$ mit $j(b)=j(c)=x+\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ➔ $j(b-c) = j(b)-j(c) = 0+\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ .Nach Def. von f werden aber genau alle $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ und nur diese auf $0+\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ abgebildet, also $b-c \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Aber es gilt auch $b-c \in B$, da B Teilalgebra ist. Da nun $\mathcal{A} = B \oplus \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ direkte Summe ist, also B mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ nur die 0 gemeinsam hat, folgt $b-c=0$, d.h. $b=c$ ➔ j ist Isomorphismus vom B auf $\mathcal{A}' = \mathcal{A}/\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Gemäß Def. der Norm auf $\mathcal{A}' = \mathcal{A}/\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ durch $N'(j(b)) := N(b)$ folgt $N'(j(b).j(c)) = N'(j(bc)) = N(bc) = N(b)N(c) = N'(j(b)).N'(j(c))$, also respektiert f die Norm. q.e.d.

(6.5) Korollar: In einer nicht-halbeinfachen AMN $\mathcal{A} = B \oplus \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \neq \{0\}$ mit separablem $\mathcal{A}/\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ist

(i) die Eins von $\mathcal{A}$ gleich der Eins von B, $1=1_B$

(ii) Es ist stets $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}.B \neq \{0\}$, $B.\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \neq \{0\}$

(iii) B ist *kein* 2-seit-Ideal (sondern nur Teilalgebra) von $\mathcal{A}$.

Bew.(i): $\mathcal{A}$ und B haben nach Voraussetzung beide eine Eins, 1 bzw. 1_B. Ansatz: sei $1=b+r$ ($b \in B$, $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$) ➔ $1_B = 1.1_B = b.1_B + r.1_B = b + r.1_B \in B$ ➔ $r.1_B = 0$, da $b \in B$, $r.1_B \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ und $B \cap \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \{0\}$; entsprechend $1_B.r=0$. Daraus folgt: $1=b+r=1^2=b^2+r^2$ ➔ $b^2=b$, $r^2=r$ ➔ r idenpotent; da aber r zugleich nilpotent ist, folgt r=0, und damit $b=1=1_B$.
Bew. (ii) ergibt sich sofort aus (i), denn für $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}-\{0\}$ ist $1_B.r=1.r=r \neq 0$.
Bew. (iii): Wäre B ein Ideal von $\mathcal{A}$, so würde aus $B \cap \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \{0\}$ folgen: $xr=rx=0$ für alle $x \in B$, $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, im Widerspruch zu (ii).

6.3 Bestimmung der nicht-halbeinfachen KAs

Zunächst gehen wir an die Bestimmung der speziellen AMN-Klasse der nicht-halbeinfachen *kinematischen Algebren* (KA). Für KAs gilt nach (4.17) $\mathrm{RadN} = \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, also mit (6.5): $\mathcal{A} = B \oplus \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, wobei B eine nichtentartete KA-Teilalgebra ist. Mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim_K \mathcal{A} = \dim_K B + \dim_K \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ über dem Grundkörper K unterscheidet man drei Fälle:

(I) $\dim \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \leq \dim \mathcal{A} - 3$: „regulärer“ Fall.
Nach Satz (3.20) folgt $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $\mathcal{A} = B$ ist eine nichtentartete KA der Dimension 1, 2 oder 4 über K. (Beispiele für $K=\mathbb{R}$ finden sich in Tabelle (3.5).)

(II) $\dim \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \dim \mathcal{A} - 2 \geq 0$: „geschlitzter“ Fall.
Damit wird dimB=2, wegen der orthogonalen Zerlegung $\mathcal{A} = K \oplus \mathcal{V}(N)$ gibt es daher eine Einheit $e \in \mathcal{V}(N) \cap \mathcal{U}(\mathcal{A})$, mit der sich $B = K \oplus eK$ schreibt, d.h. B ist eine 2-dimensionale, nichtentartete, *kommutative* KA über K. ($\mathcal{A}$ selbst braucht dagegen nicht kommutativ zu sein.)

(III) $\dim \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \dim \mathcal{A} - 1 \geq 0$: „total ausgearteter“ Fall.
Damit wird B=K, $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \mathcal{V}$, also $\mathcal{A} = K \oplus \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. (Auch hier ist $\mathcal{A}$ selbst nicht kommutativ.)

6.3.1 Die geschlitzten KAs

Die „geschlitzten“ KAs wurden für $K=\mathbb{R}$ bereits in [Lü76] behandelt. Hier wollen wir das für allgemeines K tun und zugleich die Herleitungen verbessern. Im „geschlitzten“ Fall (II) $\mathcal{A} = B \oplus \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, B=K+eK, ist e eine Einheit in $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ mit $-e^2 = ee^* = N(e) \in K-\{0\}$, und daher ist nach (4.18) $\mathrm{NilExp}\ \mathcal{R}_{\mathcal{A}} = 2$, d.h. es gilt $uv=-vu=0$ für alle $u,v \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Es gibt zwei Unterfälle:

(II.1) Entweder hat $e^2 \in K$ *keine* Wurzel in K; dann ist B=K(e) ein (quadratischer) Erweiterungskörper von K mit definierendem Polynom $p(X)=X^2-e^2$, und man kann K(e) als Körper der „komplexen Zahlen“ über K bezeichnen.

(II.2) Oder e^2 hat eine Wurzel $\varepsilon \in K-\{0\}$, d.h. $e^2-\varepsilon^2=0$. Man kann auf 1 normieren, indem man $e':=e/\varepsilon$ setzt und e' danach in e umbenennt; dann gilt $e^2-1=(e-1)(e+1)=0$. B=K+eK zerlegt sich in die beiden Nullteiler-Ideale $J_1=(1-e)K$, $J_2=(1+e)K$, $B=J_1\oplus J_2$. Dann kann man B als die „anomal-komplexen Zahlen“ über K bezeichnen, $B=\mathbb{A}(K)$.

(6.6) **Satz**: Im Fall (II.1) ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ von gerader Dimension 2m über K und wird von m zweidimensionalen Idealen aufgespannt:
$\boldsymbol{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=T_1\oplus...\oplus T_m}$ mit $\boldsymbol{T_k=Kv_k\oplus Kev_k}$ (k=1,...,m).

Bew. durch Induktion: Wegen $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\neq\{0\}$ gibt es ein $v_1\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}-\{0\}$. **(a)** Mit v_1 ist auch $ev_1\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}-\{0\}$. v_1 und ev_1 sind linear unabhängig über K, denn gäbe es ein $\alpha\in K$ mit $ev_1=\alpha v_1$, so wäre $(e-\alpha)v_1=0$. Da B=K+Ke=K(e) ein Körper ist, ist $e-\alpha$ eine von 0 verschiedene Einheit also $v_1=0$ im Widerspruch zu $v_1\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}-\{0\}$. $T_1:=Kv_1\oplus Kev_1$ ist also ein 2-dimensionales Ideal in $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ mit aT_1, $T_1a\subseteq T_1$ für alle $a\in\mathcal{A}=B+\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. **(b)** Wir nehmen an, wir hätten auf diese Weise für ein k mit $2k<\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ bereits ein 2k-dimensionales Ideal $V_{2k}:=T_1\oplus...\oplus T_k\subseteq\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ mit $T_i=Kv_i\oplus Kev_i$ für i=1,...,k gefunden: Wegen $2k<\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ gibt es dann ein v_{k+1} in $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, das nicht in V_{2k} liegt. Dann sind v_{k+1}, ev_{k+1} linear unabhängig (Bew. wie in **(a)**). Ferner ist auch ev_{k+1} nicht in V_{2k}, denn wäre $ev_{k+1}\in V_{2k}$, so auch $e^2v_{k+1}=v_{k+1}\in V_{2k}$ im Widerspruch zu $v_{k+1}\notin V_{2k}$. Da $\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ endlich ist, erreicht man mit dieser Konstruktion schließlich einmal $V_{2m}=\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, also $\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=2m$. q.e.d.

(6.6a) Im Fall (II.1) ist also bei geeigneter Basis {1,e} von B und $\{v_1,w_1,...,v_m,w_m\}$ von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ die KA $\mathcal{A}=B\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ bestimmt durch die **Produkttafel**
$e^2=\varepsilon\in K$, $ev_i=-v_ie=w_i$, $ew_i=-w_ie=\varepsilon v_i$, $v_iv_k=v_iw_k=-w_kv_i=w_iw_k=0$ (i,k=1,...,m}.

(6.7) **Satz**: Im Fall (II.2) ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ von beliebiger Dimension n (gerade oder ungerade) über K und es gibt eine Aufteilung n=2m+s+t mit m≥=0, s≥0, t≥0, so dass $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ im allgemeinen durch drei Ideale aufgespannt wird:

$\boldsymbol{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=V_{2m}\oplus W_s\oplus W'_t}$

mit $V_{2m}=T_1\oplus...\oplus T_m$ und Unteridealen $T_k=Kv_k\oplus Kev_k$ (k=1,...,m) wie in (6.6), sowie $W_s:=\{v\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\mid ev=v\}$, $\dim W_s=s$ und $W'_t:=\{w\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\mid ew=-w\}$, $\dim W'_t=t$.

Bew.: Betrachten wir die Mengen $W:=\{v\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\mid ev=v\}$ und $W':=\{w\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\mid ew=-w\}$. Wegen der Normierung $e^2=1$ und vw=0 für alle $v,w\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ist eW=We=W und eW'=W'e=W', sind W und W' sind 2-seit-Ideale von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. $W\cap W'=\{0\}$, denn $v\in W\cap W'$ heißt $v=ev=-v$ ➔ 2v=0 ➔v=0 (da charK≠2), also ist W+W' direkte Summe und die $v\in W+W'$ sind genau die Elemente von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, für die v und ev=-ve linear abhängig sind. W bzw. W' sind die gesuchten Ideale W_s bzw. W'_t. Falls $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ noch nicht alleine durch W+W' aufgespannt wird, gibt es ein Supplement V≠{0} mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=V\oplus(W+W')$, so dass für alle $x\in V-\{0\}$ die beiden Elemente x, ex linear unabhängig sind. Wie in (6.6) beweist man, dass $V=V_{2m}$ ein 2-seit-Ideal von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ gerader Dimension ist. q.e.d.

(6.7a) **Produkttafel**: Im Fall (II.2) ist also bei geeigneter Basis {1,e} von B und $\{v_1,w_1,...,v_m,w_m, u_{1,...,}u_s, u'_1,...,u'_t\}$ von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ die KA $\mathcal{A}=B\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ bestimmt durch die Produkttafel
$e^2=1$, $ev_i=-v_ie=w_i$, $ew_i=-w_ie=v_i$, $eu_k=-u_ie=u_k$, $eu'_p=-u'_pe=-u'_p$,
$v_iv_k=v_iw_k=-w_kv_i=w_iw_k=0$ (i,k=1,...,m; k=1,...,s; p=1,...,t}.

6.3.2 Die totalausgearteten KAs

Im total ausgearteten Fall (III) lautet die KA: $\mathcal{A}=K\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, es ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\neq\{0\}$, und die Norm N ist trivial, $N(\alpha+v)=\alpha^2$ (für alle $\alpha\in K$, $v\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$). Wegen $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=\mathcal{V}(N)$ und Satz (4.18) haben wir zur Bestimmung des Algebraradikals nur:
(6.8a) $u^2=0$, sowie uvw=0 für alle $u,v,w\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, d.h. $\mathrm{NilExp}\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\leq 3$,

zur Verfügung. – Bemerkung:
(6.8b) Aus $u^2=0$ für alle u folgt uv=-vu für alle u,v; und umgekehrt, da char$K\neq 2$.

(6.8c) **Lemma:** Die Menge $W:=\{w\in\mathcal{R}_\mathcal{A} \mid vw=0 \text{ für alle } v\in\mathcal{R}_\mathcal{A}\}$ ist identisch mit dem Ideal $\mathcal{R}_\mathcal{A}^2$: $W=\mathcal{R}_\mathcal{A}^2$.

Bew.: (a) $\mathcal{R}_\mathcal{A}^2\subseteq W$ ist klar, denn für $w:=uv\in\mathcal{R}_\mathcal{A}^2$ folgt aus (6.8): $xw=0$ für alle $x\in\mathcal{R}_\mathcal{A}$. (b) Zu zeigen ist $W\subseteq_? \mathcal{R}_\mathcal{A}^2$: Gäbe es $w\in W-\{0\}$, das nicht durch eine Summe aus Produkten u_iv_i dargestellt werden kann, dann wäre $w\in\mathcal{R}_\mathcal{A}-\mathcal{R}_\mathcal{A}^2$, also gäbe es $v\in\mathcal{R}_\mathcal{A}$ mit $vw\neq 0$, entgegen der Definition von W. Also gilt $W\subseteq\mathcal{R}_\mathcal{A}^2$.

Mit (6.8), (6.8c) unterscheiden sich dann zwei Fälle:

(III.1) NilExp $\mathcal{R}_\mathcal{A}=2$: $\mathcal{R}_\mathcal{A}=W\neq\{0\}$. In irgendeiner Basis $w_1,\dots w_n$ von $\mathcal{R}_\mathcal{A}$ ist das Algebraprodukt durch die einfache Produkttafel $w_iw_k=0$ (i,k=1,...,n) bestimmt.

(III.2) NilExp $\mathcal{R}_\mathcal{A}=3$: W ist 2-seit-Ideal von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{R}_\mathcal{A}$ und $\{0\}\neq W=\mathcal{R}_\mathcal{A}^2\neq\mathcal{R}_\mathcal{A}$.

Bemerkung: Im Fall (III.2) geht es um die Bestimmung aller nilpotenten K-Algebren $\mathcal{R}$ vom Nilexponenten 3 mit der speziellen Eigenschaft

uv=-vu für alle u,v∈$\mathcal{R}$.

Diese Eigenschaft erinnert stark an K-Vektorräume V mit „symplektischer Geometrie“, d.h. mit einer antisymmetrischen Bilinearform $\beta: V\times V\to K$, $\beta(u,v)=-\beta(v,u)$. Der einzige Unterschied in unserem Fall (III.2) ist, dass die Bilinearform nicht in den Grundkörper K, sondern in das Subideal $\mathcal{R}_\mathcal{A}^2$ abbildet. Wir übertragen daher zunächst einmal einige Begriffe aus der symplektischen Geometrie (vgl. z.B. [Art.II.60]) und setzen zur Unterscheidung vom Skalarprodukt <,> davor das Präfix „s“ wie „symplektisch“.

(6.9) Definitionen:

(i) $u,v\in\mathcal{R}_\mathcal{A}$ heißen „**s-orthogonal**“, in Zeichen **u⫫v**, wenn uv=0.
(ii) Zwei lineare Teilräume $U,V\subseteq\mathcal{R}_\mathcal{A}$ heißen s-orthogonal, in Zeichen **U⫫V**, wenn uv=0 für alle $u\in U$, $v\in V$.
(iii) Das **s-Radikal** eines Teilraums $U\subseteq\mathcal{R}_\mathcal{A}$ ist erklärt durch **sradU**$:=\{u\in U \mid uv=0 \text{ für alle } v\in U\}$. (Bem.: sradU ist Teilraum von U)
(iv) Teilraum $U\subseteq\mathcal{R}_\mathcal{A}$ heißt **s-ausgeartet**, falls sradU$\neq\{0\}$, andernfalls nicht-s-ausgeartet.
(v) Sei $\mathbf{V}\subseteq\mathcal{R}_\mathcal{A}$ ein von {0} verschiedener Teilraum. Das **s-orthogonale Komplement *in V*** eines Teilraums $U\subseteq V$ ist erklärt durch $U^{⫫}:=\{v\in V \mid vu=0 \text{ für alle } u\in U\}$. (Bem.: $U^{⫫}$ ist Teilraum von V und $U^{⫫}$⫫U) (Beachte, dass die Definition „$U^{⫫}$“ relativ zu V erfolgt ist! Der Kürze halber schreiben wir aber „$U^{⫫}$“ statt „$U^{⫫}{}_V$“)
(vi) Teilraum $U\subseteq\mathcal{R}_\mathcal{A}$ heißt **s-orthogonal zerlegbar**, wenn es zwei von {0} verschiedene Teilräume $X,Y\subseteq U$ gibt mit $U=X\oplus Y$ und X⫫Y. Andernfalls heißt U s-orthogonal unzerlegbar.
(vii) Die Summe $V=U_1+\dots+U_r$ von Teilräumen heißt **s-orthogonale Summe**, wenn U_i⫫U_k für alle $i\neq k$ (i,k=1,...,r). Die Summe heißt eine **s-orthogonale Zerlegung**, wenn sogar $V=U_1\oplus\dots\oplus U_r$.

Zunächst ein paar einfache Folgerungen aus diesen Definitionen für unseren Fall (III.2):

(6.10) **Lemma**: Sei $V \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ eine von {0} verschiedene s-orthogonale Summe: $V=U+U'$ mit $U \perp\!\!\!\perp U'$; dann gilt:

(i) $U'=U^{\perp\!\!\!\perp}$ und $U'^{\perp\!\!\!\perp}=U$, also $U^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}=U$ (wobei die s-orthogonale Komplementarität bezüglich V gemeint ist).

(ii) $U \cap U' = \mathrm{srad}U = \mathrm{srad}U'$

(iii) V ist genau dann s-orthogonale Zerlegung, $V=U \oplus U'$, wenn U nicht s-ausgeartet ist.

(iv) Wenn U nicht-s-ausgeartet ist, so auch U', und umgekehrt.

Bew.(i): $U^{\perp\!\!\!\perp}$ ist die Menge aller $u \in V$ mit $u \perp\!\!\!\perp U$, also wegen $U \perp\!\!\!\perp U'$: $U^{\perp\!\!\!\perp} \subseteq U'$. Jedes $u' \in U'$ ist $\perp\!\!\!\perp U$, also $u' \in U^{\perp\!\!\!\perp}$ ➔ $U'=U^{\perp\!\!\!\perp}$. Genau so: $U'^{\perp\!\!\!\perp}=U$; daraus folgt $U^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}=U$.
Bew.(ii): Sei $u \in U \cap U'$: also ist $u \in U$, aber auch $u \in U'$ und damit $\perp\!\!\!\perp$ zu U ➔ $U \cap U' \subseteq \mathrm{srad}U$. Umgekehrt sei $u \in \mathrm{srad}U$: dann ist $u \perp\!\!\!\perp U$, also $u \in U'$ ➔ $\mathrm{srad}U \subseteq U \cap U'$; also $\mathrm{srad}U = U \cap U'$. Vertauschung von U und U' ergibt entsprechend $\mathrm{srad}U' = U' \cap U$.
Bew.(iii): U nicht-s-ausgeartet genau wenn $\mathrm{srad}U=\{0\}$, und wegen (ii): $U \cap U'=\{0\}$, d.h. $V=U \oplus U'$ ist s-orthogonale Zerlegung.
Bew.(iv): folgt aus (ii).

(6.11) **Lemma**: Zu jedem $u \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}-W$ gibt es ein $v \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}-\{0\}$, so dass u,v,uv linear unabhängig sind; also insbesondere $uv \neq 0$.

Bew.: Sei $u \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}-W$. Klar, dass $uv \in W$ ist für alle $v \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Wäre $uv=0$ für alle $v \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}-\{0\}$, so wäre $u \in W$, entgegen der Voraussetzung. Also gibt es $v \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}-\{0\}$ mit $uv \neq 0$. Es ist auch $v \notin W$, denn sonst wäre wieder $uv=0$. Aus Ansatz $\alpha u+\beta v+\gamma uv=0$ mit Koeffizienten aus K folgt wegen (6.8) durch Multiplikation von links mit u: $\beta=0$, durch Multiplikation von rechts mit v: $\alpha=0$ und damit wegen $uv \neq 0$ auch $\gamma=0$; also sind u,v,uv linear unabhängig über K.

(6.12) **Lemma**: Für jede Zerlegung $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=V \oplus W$ des Algebraradikals $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ in einen linearen Teilraum V und das Ideal $W=\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$ gilt:

(i) V ist nicht-s-ausgeartet: $\mathrm{srad}V=\{0\}$.

(ii) Ist $V' \subseteq V$ nicht-s-ausgearteter Teilraum, so enthält V' (und damit V selbst) einen s-orthogonal unzerlegbaren, nicht-s-ausgearteten 2-dimensionalen Teilraum T, weswegen. $\dim V \geq \dim V' \geq \dim T=2$ (und damit $\dim \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \geq 3$) gilt.

(iii) $V^2=W$, d.h. W wird durch V erzeugt.

Bemerkung: V ist kein Ideal; (sonst wäre $W \subseteq V$). V enthält Elemente u, v mit $uv \neq 0$.

Bew.: Eine Zerlegung $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=V \oplus W$ ist wegen (6.11) möglich.
Bew.(i): Wäre $\mathrm{srad}V \neq \{0\}$, so gäbe es $u \in V-\{0\}$ mit $uv=0$ für alle $v \in V$, dann wäre auch $ux=0$ für alle $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ und damit nach (6.9) $u \in W$, entgegen $V \cap W=\{0\}$, also $\mathrm{srad}V=\{0\}$.
Bew.(ii): Da $V' \subseteq V$ nicht-s-ausgeartet sein soll, ist $\dim V' \geq 2$, denn jeder 0- oder 1-dimensionale Teilraum Ku ist wegen $u^2=0$ s-ausgeartet. Nach (6.11) gibt es also $u,v \in V'-\{0\}$, so dass u,v (und $uv \in W-\{0\}$) linear unabhängig sind. $T:=Ku \oplus Kv$ ist nicht s-ausgeartet, denn aus $x=\alpha u+\beta v \in T$ mit $xu=xv=0$ folgt: $0=xu=\beta vu$ ➔$\beta=0$ und $0=xv=\alpha uv$ ➔$\alpha=0$ ➔$x=0$. Also $\mathrm{srad}T=\{0\}$. Damit folgt auch, dass es kein linear unabhängiges Paar $x,y \in T-\{0\}$ mit $xy=0$ gibt; also ist T s-orthogonal unzerlegbar.
Bew.(iii): Mit (6.10) gilt $V^2 \subseteq W$; mit (6.8c) gilt $W \subseteq V^2$; also $V^2=W$.

Ziel ist es, mit diesem Rüstzeug für jede Zerlegung $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=V \oplus W$ eine Basis von V und eine von $W=\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$ zu bekommen, so dass die Produkttafel für $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ möglichst einfach wird. Dazu entwickeln wir – in Analogie zu [Art II, 60] das Konzept der „**Komplementärbasis**" von V zu einer gegebenen Basis von V.

(6.13a) **Lemma**: Sei $\underline{A}=\{a_1,...,a_n\}$ eine Basis eines Teilraums $V' \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, $\underline{M}=\{w_1,...,w_m\}$ eine Basis von $M:=V'^2 \subseteq \mathcal{R}^2_{\mathcal{A}}$

(i) dann ist $x \in \mathrm{srad}V'$ äquivalent zu $a_i x=0$ für alle i=1,...,n.

(ii) $\mathrm{srad}V'=\{0\}$ ist genau dann der Fall, wenn das Gleichungssystem $a_i x=0$ (i=1,...,n) nur die Null-Lösung x=0 hat.

(iii) Mit $(a_i a_k)_s \in K$ bezeichnen wir die Komponenten von $a_i a_k \in M$ in der Basis $\underline{M}$, also $a_i a_k = (a_i a_k)_1 w_1 + ... + (a_i a_k)_m w_m$; $\det(a_i a_k)_s$ sei die Determinante der nxn-Matrix $(a_ia_k)_s$ bei festem s. Dann gilt: $\mathrm{srad}V'=\{0\}$ ist genau dann der Fall, wenn $\det(a_ia_k)_1\neq 0,\dots,\det(a_ia_k)_m\neq 0$

Bew. (i): $x\in \mathrm{srad}V' \Leftrightarrow zx=0$ für alle $z\in V' \Leftrightarrow a_ix=0$ für alle $i=1,..,n$.
Bew.(ii): Die Lösungen x des homogenen Gleichungssystems $a_ix=0$ $(i=1,..,n)$ bilden nach (i) die Menge sradV. Also $x\in \mathrm{srad}V'=\{0\} \Leftrightarrow$ das Gleichungssystem $a_ix=0$ $(i=1,..,n)$ hat nur die Null-Lösung $x=0$.
Bew.(iii): Mit $x=\sum_k\xi_ka_k$ $(\xi_k\in K)$ lautet a_ix in Komponenten der Basis $\underline{M}$: $a_ix=\sum_k\xi_ka_ia_k=\sum_s\sum_k\xi_k(a_ia_k)_sw_s$. Da die w_s linear unabhängig sind, ist das Gleichungssystem $a_ix=0$ $(i=1,..,n)$ äquivalent zu den m Gleichungssystemen

$\sum_k\xi_k(a_ia_k)_1=0,\ \dots,\ \sum_k\xi_k(a_ia_k)_m=0.$

$a_ix=0$ $(i=1,..,n)$ hat genau dann nur die Null-Lösung $x=0$, wenn alle diese m Gleichungssysteme nur die Null-Lösung $\xi_k=0$ $(k=1,...,n)$ haben; und dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(a_ia_k)_1\neq 0,\dots,\det(a_ia_k)_m\neq 0$ gilt.

(6.13b) **Lemma**: Sei V' irgendein nicht-s-ausgearteter Teilraum von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ und $W=\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$, also $\mathrm{srad}V'=\{0\}$, $V'\cap W=\{0\}$. Sei $\dim V'=n$, $\dim M=m$ für das Subideal $M:=V'^2\subseteq W$, also $\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\geq n+m$). Dann gilt:
Zu jeder Basis $\underline{A}=\{a_1,...,a_n\}$ von V ist das inhomogene Gleichungssystem
(*) $\mathbf{a_ix=\lambda_iu_i}$ mit $u_i\in a_iV'$ $(i=1,...,n)$
universell, d.h. für jede rechte Seite $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ eindeutig lösbar.

Bew.: Sei $\underline{A}=\{a_1,...,a_n\}$ Basis von V und $\underline{M}=\{w_1,\dots,w_m\}$ eine Basis von $M=V^2\subseteq W$. Zu lösen ist das Gleichungssystem
(*) $a_ix=\lambda_iu_i$ mit $u_i\in a_iV'$ $(i=1,...,n)$.
Die Voraussetzung $u_i\in a_iV$ (und damit auch $\lambda_iu_i\in a_iV$) ist notwendig, damit x jede der n Gleichungen einzeln überhaupt erfüllen kann. Mit $x=\sum_k\xi_ka_k$, $u_i=\sum_s\mu_{is}w_s$ $(\xi_k,\ \mu_{is}\in K)$ ist (wegen (6.13a) das Gleichungssystem $a_ix=\lambda_iu_i$ $(i=1,...,n)$ äquivalent zu den m simultan zu lösenden Gleichungssystemen
(**) $\sum_k\xi_k(a_ia_k)_1=\boldsymbol{\lambda_i}\mu_{i1},\ \dots,\ \sum_k\xi_k(a_ia_k)_m=\boldsymbol{\lambda_i}\mu_{im}$ $(i=1,...,n)$
Ist $\mathrm{srad}V'=\{0\}$ vorausgesetzt und damit (wegen (6.13a)) $\det(a_ia_k)_1\neq 0,\dots,\det(a_ia_k)_m\neq 0$, so haben alle diese Gleichungssysteme zu jeder rechten Seite $\boldsymbol{\lambda_1},\dots,\boldsymbol{\lambda_n}\in K$ eine gemeinsame eindeutige Lösung $x=\sum_k\xi_ka_k$.

(6.13c) **Satz**: Die Voraussetzungen seien wie in Lemma (6.13). Dann gilt: Zu jeder Basis $\underline{A}=\{a_1,...,a_n\}$ des nicht-s-ausgearteten Teilraums $V'\subseteq\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ und jedem n-Tupel $u_1\in a_1V'-\{0\}\subseteq M,\dots,u_n\in a_nV'-\{0\}\subseteq M$ gibt es genau eine Basis $\underline{B}=\underline{B}(u_i)=\{b_1,...,b_n\}$ von V', so dass gilt
(***) $\mathbf{a_ib_k=\delta_{ik}u_i}$ (also $=0$ für $i\neq k$ und $=u_i$ für $i=k$).
B heißt die „**Komplementärbasis**" zu $\underline{A}$ bezüglich $u_1,...,u_n\in M-\{0\}$.

Bew: Wir wählen die rechte Seite $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in M$ in (6.13b)(*) n mal: Beim ersten Mal $\lambda_i:=\delta_{i1}$, Lösung dazu sei $x=b_1$;...; beim n-ten Mal $\lambda_i:=\delta_{in}$, Lösung dazu sei $x=b_n$. Damit ergibt sich die Behauptung (***). Die b_k sind linear unabhängig, denn der Ansatz $\beta_1b_1+...+\beta_nb_n=0$ ergibt nach Multiplikation mit a_i : $0=a_i(\beta_1b_1+...+\beta_nb_n)=\beta_ia_ib_i=\beta_iu_i$ und wegen der Voraussetzung $u_i\neq 0$ ➔ $\beta_i=0$ für alle $i=1,...,n$. Also $b_1,...,b_n$ linear unabhängig und damit eine Basis von V'.

Nun zeigen wir, wie V vollständig s-orthogonal in Teilräume zerlegt werden kann, die selbst s-orthogonal unzerlegbar sind; dies wird eine Basis ergeben, in der die Produkttafel für $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ sehr einfach aussieht. Dazu zeigen wir vorher, wann ein nicht-s-ausgearteter Teilraum V' s-orthogonal zerlegt werden kann:

(6.14) **Lemma**: Sei V' nicht-s-ausgearteter Teilraum von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ($\mathrm{srad}V'=\{0\}$) der Dimension $\dim V'\geq 3$. Ist T echter nicht-s-ausgearteter Teilraum von V' ($\mathrm{srad}T=\{0\}$) und ist $T^{\perp\!\!\perp}$ das s-orthogonale Komplement von T bezüglich V', so ist auch $\mathrm{srad}T^{\perp\!\!\perp}=\{0\}$, und es gilt: $V'=T\oplus T^{\perp\!\!\perp}$.

Bew.: Sei V' nicht-s-ausgearteter Teilraum, $\mathrm{srad}V'=\{0\}$, $\dim V'=n\geq 3$. Zu einem echten Teilraum $T\subseteq V'$ mit Basis $\underline{T}=\{a_1,...,a_t\}$, $t<n$, bilde $T^{\perp\!\!\perp}=\{x\in V' \mid xu=0 \text{ für alle } u\in V'\}$. Wir zeigen **(a)** $V'=_?T+T^{\perp\!\!\perp}$ und dann **(b)** $V'=_?T\oplus T^{\perp\!\!\perp}$.
Zu (a): Ergänze $\underline{T}$ durch $a_{t+1},...,a_n$ zu einer Basis $\underline{A}=\{a_1,...,a_n\}$ von V'. Wegen $\mathrm{srad}V'=\{0\}$ gibt es nach (6.13c) zu $\underline{A}$ und einem n-Tupel $u_1\in a_1V',\dots,u_n\in a_nV'$ $w\in V^2-\{0\}\subseteq\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ genau eine Komplementärbasis $\underline{B}=\underline{B}(u_i)=\{b_1,...,b_n\}$ von V' mit
(1) $a_ib_k=\delta_{ik}u_i$.
Sei $x\in T^{\perp\!\!\perp}$ in $\underline{B}$ dargestellt als $x=b_1\xi_1+...+b_n\xi_n$; nach Voraussetzung ist $x\perp\!\!\perp T$, also $a_1x=...=a_tx=0$; aus (1) ergibt sich: $a_ib_i\xi_i=w\neq 0$ für $i=1,...,t$ ➔ $\xi_1=...=\xi_t=0$ ➔ $x=b_{t+1}\xi_{t+1}+...+b_n\xi_n$. Also ist $T^{\perp\!\!\perp}\subseteq b_{t+1}K+...+b_nK$. Nach Def. der Komplementärbasis ist aber $(b_{t+1}K+...+b_nK)\perp\!\!\perp(a_1K+...a_tK)=T$; also auch $T^{\perp\!\!\perp}\supseteq b_{t+1}K+...+b_nK$; und damit $T^{\perp\!\!\perp}=b_{t+1}K+...+b_nK$. Spannt die Summe $T+T^{\perp\!\!\perp}$ ganz V auf? Aus $T=a_1K+...+a_tK$, $T^{\perp\!\!\perp}=b_{t+1}K+...+b_nK$ folgt $\dim T+\dim T^{\perp\!\!\perp}=t+(n-t)=n=\dim V$, also $T+T^{\perp\!\!\perp}=V'$.

Zu (b) Wir zeigen schließlich, dass aus $\mathrm{srad}T=\{0\}$ folgt: $V'=T\oplus T^{\perp\!\!\!\perp}$: V ist nach (a) s-orthogonale Summe, $T+T^{\perp\!\!\!\perp}=V'$. Aus (6.10) folgt $T^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}=T$ und damit $T\cap T^{\perp\!\!\!\perp}=\mathrm{srad}T=\mathrm{srad}T^{\perp\!\!\!\perp}$. Aus $\mathrm{srad}T=\{0\}$ folgt damit $T\cap T^{\perp\!\!\!\perp}=\{0\}$, daher $V'=T\oplus T^{\perp\!\!\!\perp}$. q.e.d.

(6.15) **Satz**: Für jede Zerlegung des Algebraradikals $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=V\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$ einer total ausgearteten kinematischen Algebra (KA) gilt:

(i) V ist s-orthogonale Zerlegung von $m\geq 1$ Teilräumen $T_i=Ku_i\oplus Kv_i$ $(i=1,...,m)$, die selbst nicht mehr s-orthogonal zerlegbar sind: $V=T_1\oplus...\oplus T_m$.
Die Dimension von V ist stets gerade, **$\dim V=2m\geq 2$**.

(ii) Ferner gilt **$1\leq\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2\leq m$.**

Bew.(i): V ist nach (6.12) nicht-s-ausgeartet, $\mathrm{srad}V=\{0\}$, und enthält einen s-orthogonal unzerlegbaren, nicht-s-ausgearteten 2-dimensionalen Teilraum $T_1=Ku_1\oplus Kv_1$. Ist $\dim V=2$, so sind wir fertig. Im Fall $\dim V>2$ ist V nach (6.14) s-orthogonal zerlegbar, $V=T_1\oplus T_1^{\perp\!\!\!\perp}$. Setzen wir $V_2:=T_1^{\perp\!\!\!\perp}$. V_2 ist nach (6.14) wieder nicht-s-ausgeartet, und wir können (6.14), statt auf V, auf V_2 anwenden. Da $\dim V$ endlich ist, kommen wir nach m Schritten zu einem Ende: $V=T_1\oplus...\oplus T_m$ mit $T_i=Ku_i\oplus Kv_i$ $(i=1,...,m)$, und damit $\dim V=2m\geq 2$.
Bew.(ii): $1\leq\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$ gilt wegen (6.11). Die einzigen aus V gebildeten von 0 verschiedenen 2-er-Produkte sind K-proportional zu u_iv_i $(i=1,..,m)$, daher $\dim V^2\leq m$. Nach (6.12)(iii) gilt $V^2=\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$, also $\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2\leq m$. q.e.d.

(6.15a) **Produkttafel**: Im Fall (III.2) einer total ausgearteten KA $\mathcal{A}=K\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ist das Algebraradikal $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=V+\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$ bei geeigneter Basis $\{u_1,v_1,...,u_m,v_m\}$ für V und $\{w_1,...,w_s\}$ für $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$ bestimmt durch die Produkttafel

(i) $0=u_i^2=v_i^2=w_r^2=u_iu_k=u_iv_k=v_iu_k=v_iv_k=u_iw_r=v_iw_r$ für $i\neq k$, $i,k=1,..,m$, $r=1,..,s$.
und

(ii) im Fall $s=1$: $u_iv_i=-v_iu_i=w_1$ für alle $i=1,...,m$
im Fall $s=m$: $u_iv_i=-v_iu_i=w_i$ für $i=1,...,s$
im Fall $1<s<m$: $u_iv_i=-v_iu_i=w_i$ für $i=1,...,s$; und Wiederholungen
$u_kv_k=-v_ku_k=w_i$ für $s<k\leq 2s$) und ggf.
$u_kv_k=-v_ku_k=w_i$ für $2s<k\leq 3s$)
usw. ...,bis $k=m$ erreicht ist

Bew. (i): Ergibt sich aus Eigenschaft (6.8) für $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=V\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$, sowie aus der in (6.15) gezeigten s-orthogonalen Zerlegung von V.
Bew. (ii): Bemerkung (α): Die u_iv_i bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$.
Falls $s=\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2=1$, kann man $w_1:=u_1v_1$ setzen; alle $u_iv_i\in Kw_1-\{0\}$; man kann die u_i und die v_i $(i=2,..,n)$ so normieren, dass auch $u_iv_i=w_1$ für alle $i=2,..,n$ wird.
Falls $s=\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2=m$, müssen die $u_1v_1, ..., u_mv_m$ wegen (α) linear unabhängig sein, bilden also eine Basis $u_1v_1=w_1,..., u_mv_m=w_m$ von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$.
Falls $1<s=\dim\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2<m$, kann nur eine maximale echte Teilmenge U der u_iv_i linear unabhängig sein. Ist etwa $U:=\{u_1v_1,...,u_rv_r\}$ $(r\leq s)$ linear unabhängig, so muss u_jv_j für alle $j>r$ Linearkombination der $u_1v_1,...,u_rv_r(r\leq s)$ sein, andernfalls wäre U nicht maximal. Daraus folgt, dass U bereits eine Basis von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$ bildet, also $r=s$. Wir können also $w_1=u_1v_1,...,w_s=u_sv_s$ setzen. Danach, also für $s<k<m$, kann man die Nummerierung und so wählen, dass sich die Produktwerte u_kv_k (ggf. mehrfach) wiederholen, also zum Beispiel $u_{s+1}v_{s+1}=w_1$, $u_{s+2}v_{s+2}=w_2$ usw. ... q.e.d.

6.4 Bestimmung der konischen ausgearteten AMNs

In (5.10)(ii) stellten wir fest, dass die *konischen* ausgearteten AMNs alle nicht-halbeinfach sind. Sie bilden also eine Unterklasse der nicht-halbeinfachen AMNs. In dieser Unterklasse sind als Spezialfall die ausgearteten KAs enthalten, die wir in Kap.6.3 vollständig bestimmt haben. Nun wollen wir allgemein *alle* konischen ausgearteten AMNs bestimmen.

Einfaches **Beispiel** einer nicht-halbeinfachen *konischen* AMN, die keine KA mehr ist, ist die Algebra der **„dualen“ 2x2-Matrizen** $L(2,\mathbb{D})=L(2,\mathbb{R})\oplus L(2,e\mathbb{R})$ über den sogenannten „dualen Zahlen“ $\mathbb{D}=\mathbb{R}+e\mathbb{R}$ mit $\alpha e=e\alpha$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$, $e\notin\mathbb{R}$, $e^2=0$. $L(2,\mathbb{R})$ ist nach Tabelle (3.5) eine reguläre KA der Dimension 4 über $\mathbb{R}$ mit Norm $N'(x)=\det(x)$.

Die Norm $N:L(2,\mathbb{D})\to\mathbb{R}$ ist einfach definiert durch $N(x+ey):=N'(x)$ ($x,y\in L(2,\mathbb{R})$), womit die Multiplikativität von N gegeben ist durch die der Determinante det. Das Algebraradikal von $L(2,\mathbb{D})$ ist $L(2,e\mathbb{R})=eL(2,\mathbb{R})$. Für das zu N gehörige Skalarprodukt rechnet man aus: $\langle x,ey\rangle=\langle ex,ey\rangle=0$ für alle $x,y\in L(2,\mathbb{R})$; damit ergibt sich das zu $\mathbb{R}$ orthogonale Supplement in $L(2,\mathbb{D})=\mathbb{R}\oplus\mathcal{V}(N)$ zu $\mathcal{V}(N)=\mathcal{V}(N')+eL(2,\mathbb{R})$.

$L(2,\mathbb{D})$ ist zwar ***konisch***, denn genau die $z=x+ey$ des Nullkonus $\mathcal{S}(N)=\{z\in L(2,\mathbb{D})|\ N(z)=0\}$ sind auch die Nullteiler von $L(2,\mathbb{D})$.

Bew.: Sei $x,y\in L(2,\mathbb{R})$-{0}; dann gilt $z=x+ey\in\mathcal{S}(N)=\mathcal{S}(N')+eL(2,\mathbb{R}) \Leftrightarrow 0=N(z)=N'(x)=xx^* \Leftrightarrow x\in\mathcal{NT}(L(2,\mathbb{R}))$ und z wird wegen $e^2=0$ von $ex^*\neq 0$ anulliert, wobei y beliebig ist $\Leftrightarrow z.ex^*=(x+ey)ex^*=exx^*=0 \Leftrightarrow z\in\mathcal{NT}(L(2,\mathbb{R})+eL(2,\mathbb{R})=\mathcal{NT}(L(2,\mathbb{D})$. Also $\mathcal{S}(N)=\mathcal{NT}(L(2,\mathbb{D})$, d.h., $L(2,\mathbb{D})$ ist *konisch*.

$L(2,\mathbb{D})$ ist jedoch **keine KA**, sonst müsste $v^2\in\mathbb{R}$ sein für alle $v\in\mathcal{V}(N)$. Setzen wir $v:=w+e$ mit $w\in\mathcal{V}(N')$, so ist $v\in\mathcal{V}(N)$, aber $v^2=w^2+ew\notin\mathbb{R}$, denn es ist zwar $w^2\in\mathbb{R}$ aber nicht ew.

Das bringt uns zu dem

(6.16) **Satz:** Sei $(\mathcal{A},N,K)$ eine nicht-halbeinfache AMN, d.h. sie hat die Form $\mathcal{A}=B\oplus\mathcal{R}$ mit Algebraradikal $\mathcal{R}:=\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\neq\{0\}$ und der halbeinfachen Teil-AMN (B,N',K), $B=A\oplus R$, wobei $R:=Rad(N_B)$ das Normradikal von B und A eine reguläre KA ist.
$\mathcal{A}$ ist genau dann konisch, wenn $R:=Rad(N_B)=\{0\}$ ist, d.h. wenn B eine reguläre KA ist.

Bemerkung: Wie das Beispiel $L(2,\mathbb{D})$ zeigt, folgt daraus nicht, dass auch $\mathcal{A}$ eine (wenn zwar ausgeartete) KA sei.

Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten. Ist (X,N,K) eine AMN, so sei mit $\mathcal{U}(X)$ die Einheitengruppe (d.h.die invertierbaren Elemente), mit $\mathcal{NT}(X)$ die Nullteilermenge und mit $\mathcal{S}(X)$ der Nullkonus von X bezeichnet, und wir erinnern (aus Kap.2) daran, dass gilt:

(6.17) (i) $X=\mathcal{U}(X)\cup\mathcal{NT}(X)$, $\mathcal{U}(X)\cap\mathcal{NT}(X)=\emptyset$,
(ii) $\mathcal{S}(X)=\{x\in X|\ N(x)=0\}$,
(iii) X ist genau dann konisch, wenn $\mathcal{S}(X)=\mathcal{NT}(X)$ ist.

(6.18) Lemma: Sei $\mathcal{A}=B\oplus\mathcal{R}$ wie in (6.16). Dann ist
(i) $\mathcal{U}(\mathcal{A})=\mathcal{U}(B)+\mathcal{R}$ und
(ii) $\mathcal{NT}(\mathcal{A})=\mathcal{NT}(B)+\mathcal{R}$

Bew.(i): Sei $x=b+c\neq 0$ mit $b\in B$, $c\in\mathcal{R}$. Die Behauptung lautet dann

(*) $x\in\mathcal{U}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow b\in\mathcal{U}(B)$

Bew. „$\Rightarrow$“: Sei $x=b+c\in\mathcal{U}(\mathcal{A})$, dann gibt es ein Inverses $x'=b'+c'$ mit $b'\in B$, $c'\in\mathcal{R}$ und $1=xx'=bb'+(bc'+cb'+cc')$. Da B Teilalgebra, $\mathcal{R}$ ein Ideal und $1\in B$ ist, folgt $bb'=1$, d.h. $b\in\mathcal{U}(B)$.

Bew. „$\Leftarrow$“: Sei $x=b+c\neq 0$ und $b\in\mathcal{U}(B)$ und $c\in\mathcal{R}-\{0\}$. Wir zeigen, dass x nur von 0 anulliert werden kann. Ansatz: Finde $y=b'+c'$ ($b'\in B$, $c'\in\mathcal{R}$), so dass $0=xy=bb'+(cb'+bc'+cc')$; darin ist $bb'\in B$ und $cb'+bc'+cc'\in\mathcal{R}$ (weil B Teilalgebra und $\mathcal{R}$ Ideal ist), woraus mit $B\cap\mathcal{R}=\{0\}$ folgt:

(**) $b'=0$ (wegen $b\neq 0$) und

(***) $bc'+cc'=0$.

Betrachten wir die Idealkette $\mathcal{R}\supseteq\mathcal{R}^2\supseteq\ldots\supseteq\mathcal{R}^{s-1}\supseteq\mathcal{R}^s=\{0\}$, wobei $s=\mathrm{NilExp}\mathcal{R}$ ist, und beachten, dass für alle k mit $1\leq k\leq s-1$ gilt: $\mathcal{R}^k\neq\{0\}$ und $\mathcal{R}^k\neq\mathcal{R}^{k+1}$. Wir nehmen $c'\in\mathcal{R}^k$ an. Wegen $b\in\mathcal{U}(B)$ ist dann auch $bc'\in\mathcal{R}^k$, aber $cc'\in\mathcal{R}^{k+1}$. Mit geeigneter Zerlegung $\mathcal{R}^k=V_k\oplus\mathcal{R}^{k+1}$ in einen Teilraum V_k und das Ideal $\mathcal{R}^{k+1}$ muss dann $bc'\in V_k$ und $cc'\in\mathcal{R}^{k+1}$ sein. Wegen $V_k\cap\mathcal{R}^{k+1}=\{0\}$ folgt aus (***) $bc'=0$, $cc'=0$, und daraus wegen $b\in\mathcal{U}(B)$: $c'=0$. Zusammen mit (**) ergibt sich: $x=b+c$ kann nur von 0 anulliert werden. x muss daher in $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ liegen. Damit ist (*) und somit auch (6.18)(i) bewiesen.

Bew.(ii): Aus (6.17)(i) und (*) folgt für $x=b+c$ ($b\in B$, $c\in\mathcal{R}$): $x\in\mathcal{NT}(\mathcal{A})\Leftrightarrow b\in\mathcal{NT}(B)$, und damit (6.18)(ii).

(6.19) Lemma: Für die Nullkegel der AMN $\mathcal{A}=B\oplus\mathcal{R}=A\oplus R\oplus\mathcal{R}$ ($R=\mathrm{RadN}_B$) gilt:

(i) $\mathcal{S}(A)=\mathcal{NT}(A)$,

(ii) $\mathcal{S}(B)=\mathcal{S}(A)+R$,

(iii) $\mathcal{S}(\mathcal{A})=\mathcal{S}(B)+\mathcal{R}$.

Bew.: (i) gilt, weil A eine reguläre KA ist (vgl. (3.16)). (ii) gilt mit (5.10)(i). (iii) gilt wegen Übertragung der Norm von B auf $\mathcal{A}$: $N_{\mathcal{A}}(b+c)=N_B(b)$ füralle $b\in B$, $c\in\mathcal{R}$.

Aus (5.10)(i) merken wir uns schließlich noch:

(6.20) Für die Nullteilermenge der halbeinfachen Teil-AMN B=A+R gilt:

$\mathcal{NT}(B)=\mathcal{S}(B)\cup(\mathbf{A}+(\mathcal{NT}(R)-\{0\}))$,

wobei der 2. Term genau dann wegfällt, wenn $R:=\mathrm{RadN}_B=\{0\}$, d.h. B mit der regulären KA **A** identisch ist.

Nun haben wir alles für den Beweis des Satzes (6.16) zusammen.

Bew.(6.16) „$\Leftarrow$“: Sei $R=\mathrm{Rad}(N_B)=\{0\}$. Dann fällt in (6.20) der 2. Term weg: $\mathcal{NT}(B)=\mathcal{S}(B)$, und mit (6.18)(ii), (6.19)(iii): $\mathcal{NT}(\mathcal{A})=\mathcal{NT}(B)+\mathcal{R}=\mathcal{S}(B)+\mathcal{R}=\mathcal{S}(\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{A}$ konisch.

Bew.(6.16) „$\Rightarrow$“: Sei $\mathcal{A}$ konisch. Mit (6.18)(ii), (6.20) also: $\mathcal{S}(\mathcal{A})=\mathcal{S}(B)+\mathcal{R}=\mathcal{NT}(B)+\mathcal{R}=\mathcal{NT}(\mathcal{A})$. Aus $\mathcal{S}(B)\subseteq B$, $\mathcal{NT}(B)\subseteq B$ und $B\cap\mathcal{R}=\{0\}$ folgt $\mathcal{NT}(B)=\mathcal{S}(B)$; in (6.20) fällt also der 2. Term weg, d.h. $R=\mathrm{Rad}(N_B)=\{0\}$.

6.5 Konstruktion einer größeren Klasse von nicht-halbeinfachen AMNs

Wir geben Konstruktionen von (separablen) nicht-halbeinfachen AMNs an.

Zu beachten ist mit (6.5), dass in $\mathcal{A}=B\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=A\oplus R\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ zwar $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ein Ideal aber B nur eine Teilalgebra von $\mathcal{A}$ ist. Da eine AMN immer eine Eins haben soll und diese notwendigerweise in B liegt, anullieren sich B und $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ **nicht**, $B\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\neq\{0\}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}B\neq 0$. Weiter zu beachten: A und R sind zwar Ideale von $B=A\oplus R$ ($A.R=R.A=\{0\}$) aber nicht von $\mathcal{A}$. Das erschwert die Konstruktion.

Die halbeinfachen AMNs haben wir in Kap.5 vollständig konstruiert. Als ersten Teil der zu konstruierenden nicht-halbeinfachen separablen AMN $\mathcal{A}$ können wir eine beliebige halbeinfache AMN $B=A\oplus R$ als Teilalgebra von $\mathcal{A}$ nehmen mit A als regulärer Teil-AMN und R als dem Normradikal von B. Der zweite Teil $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ist ein nilpotentes Ideal von $\mathcal{A}$, so dass $\mathrm{RadN}_{\mathcal{A}}=R\oplus\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ wird. Nur die Multiplikation zwischen B und

$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ müssen wir neu und möglichst allgemein konstruieren, weil wir nicht $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}.B=\{0\}$, $B.\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=\{0\}$ voraussetzen können.

Aus dem Beispiel in Kap.6.4, den „dualen" 2x2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, $L(2,\mathbb{D})= L(2,\mathbb{R})\oplus e.L(2,\mathbb{R})$ ($e\notin\mathbb{R}$, $e^2=0$), ergibt sich eine Idee, wie man eine größere Klasse nicht-halbeinfacher AMNs konstruieren kann: Sei B irgendeine halbeinfache AMN mit Norm N_B. J sei irgendein von {0} verschiedenes 2-seit-Ideal von B und $\mathcal{N}\neq\{0\}$ irgendeine nilpotente Algebra (über demselben Körper K wie B). Wir bilden das *Tensorprodukt* $C:=J\otimes\mathcal{N}=\{b\otimes r \mid b\in J,\ r\in\mathcal{N}\}$. [Zum Begriff „Tensorprodukt" vgl. das Glossar oder Wae.II, S.43f.] Ist $\{u_1,...,u_m\}$ eine Basis von J, $\{v_1,...,v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{N}$, also $J=Ku_1+...+Ku_m$, $\mathcal{N}=Kv_1+...+Kv_n$, so kann man C sowohl als n-Modul mit Linksoperatorenbereich J, $C=J\otimes v_1+...+J\otimes v_n$, als auch als m-Modul mit Rechtsoperatorenbereich $\mathcal{N}$, $C= u_1\otimes\mathcal{N}+...+u_m\otimes\mathcal{N}$ auffassen, und $\{u_i\otimes v_j \mid i=1,..,m;\ j=1,..,n\}$ ist eine Basis von C. Damit ergeben sich die Modul-Rechenregeln

(a) $k.(b\otimes r):= kb\otimes r = b\otimes kr$ (für $k\in K$), und daher

(b) $0.(b\otimes r) = 0\otimes r = b\otimes 0=0_C$ (Null von C),

(c) $(b+b')\otimes r := (b\otimes r)+(b'\otimes r)$, $b\otimes(r+r') :=(b\otimes r)+(b\otimes r')$,

(d) In einer Basisdarstellung $b=\sum\beta_i u_i\in J$, $r=\sum\mu_k v_k\in\mathcal{N}$ wird mit (a), (c):
$b\otimes r=\sum\beta_i u_i \otimes \sum\mu_k v_k = \sum_{i,k} \beta_i\mu_k\, u_i\otimes v_k$

$C:=J\otimes\mathcal{N}$ wird selbst zu einer K-Algebra gemacht durch die Festsetzung

(e) $(b\otimes r).(b'\otimes r') := bb'\otimes rr'$.

Die Algebra C ist wieder nilpotent, da $\mathcal{N}$ es ist; denn ist s der Nilexponent von $\mathcal{N}$, also $r^s=0$, so ist auch $(b\otimes r)^s =b^s\otimes r^s= b^s\otimes 0 = 0_C$.

Schließlich bilden wir die direkte Summe $\mathcal{A}:=B\oplus C$. Um auch $\mathcal{A}$ zu einer Algebra über K zu machen, brauchen wir nur noch für $b\in B$ und $c=j\otimes r\in C=J\otimes\mathcal{N}$ das Produkt zu definieren:

(f) $b.c = b.(j\otimes r) := bj\otimes r$; $c.b = (j\otimes r).b := jb\otimes r$

dabei ist $bj, jb\in J$, da J ein Ideal von B ist; also ist $b.c, c.b\in C$

(6.5) Konstruktion: Ist B eine halbeinfache AMN über Körper K (Norm N_B), J irgendein 2-seit-Ideal von B und $\mathcal{N}$ eine beliebige nilpotente Algebra über K (charK ≠ 2, mit Separabilitätsbedingung, vgl. die Einschränkung (6.1)), so ist $\mathcal{A} := B \oplus J\otimes\mathcal{N}$ eine nicht-halbeinfache AMN mit Norm

(g) $N(b+j\otimes r) = N_B(b)$ ($b\in B$, $j\in J$, $r\in\mathcal{N}$)
und Algebraradikal $C=J\otimes\mathcal{N}$. Ist ferner die Teilalgebra B gemäß (5.9) aufgespalten in eine reguläre KA A und das Normradikal $RadN_B$, also $B=A\oplus RadN_B$, so ist $RadN = RadN_B\oplus C$.

Bew.: Wir brauchen nur zu zeigen, dass (i) N multiplikativ und dass (ii) $RadN = RadN_B \oplus C$ ist.
Zu (i): $N((b+j\otimes r)(b'+j'\otimes r')) =_{(f)} N(bb' + jb'\otimes r\ bj'\otimes r' + jj'\otimes rr') = N(bb'+\text{<Element von C>}) =_{(g)} N_B(bb') =_{B\ AMN} N_B(b)\, N_B(b') = N(b+j\otimes r)\, N(b'+j'\otimes r')$ ➔ N multiplikativ.
Zu (ii): Mit der Aufspaltung $B=A\oplus RadN_B$ gilt für $b=a+s$ ($a\in A$, $s\in RadN_B$) $N_B(b)=N_B(a) =N_A(a)$. Da A reguläre KA ist, folgt $RadN = RadN_B \oplus C$.

Damit kann man – wenn zwar nicht alle, aber doch – eine größere Klasse von nicht-halbeinfachen AMNs konstruieren.

6.6 Schlussbemerkung

Einige Fragen sind in dieser Untersuchung offen geblieben:

(1) In Kap.6.5 haben wir nicht alle nicht-halbeinfachen AMNs bestimmen können, sondern nur eine Konstruktion für eine größere Teilklasse angegeben, wobei das Algebraradikal $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ aus einer beliebig vorgegebenen nilpotenten Algebra $\mathcal{N}\neq\{0\}$ hervorgeht. Auch bei dieser Sonderkonstruktion wäre es wünschenswert, *alle* assoziativen nilpotenten Algebren über K zu kennen.

(2) Analog dem Vorgehen bei Bestimmung aller total ausgearteten kinematischen Algebren in Kap.6.3 kann man eine Unterklasse von nilpotenten (assoziativen) Algebren $\mathcal{N}$ mit NilExp$\mathcal{N}$ = s >3, nämlich die „symplektischen“, d.h. die mit der Eigenschaft $u^2=0$ für alle $u\in\mathcal{N}$, bestimmen: Man betrachtet eine Zerlegung $\mathcal{N}=V\oplus\mathcal{N}^{s-1}$, weist nach, dass der lineare Teilraum V nicht-s-ausgeartet ist (sradV={0}), bestimmt für V (bzw. jeden nicht-s-ausgearteten Teilraum von V) zu gegebener Basis $\underline{A}=\{a_1,..,a_n\}$ und gewissen $u_1\in a_iV-\{0\},..,u_n\in a_iV-\{0\}$ (alle in $\mathcal{N}^{s-1}$) die eindeutig existierende Komplementärbasis $\underline{B}(u_i)=\{b_1,..,b_n\}$ vermittels der Bedingung $a_ib_k=\delta_{ik}u_i$ und zerlegt schließlich V soweit wie möglich s-orthogonal.

Eventuell ist auf diesem Gebiet noch etwas Arbeit zu leisten, denn mir ist bislang keine vollständige Klassifikation der nilpotenten (endlichdimensionalen), ***assoziativen*** Algebren über einem Körper K bekannt, wogegen es für die sogenannten nilpotenten Lie-Algebren genügend Literatur gibt.

Dokumentkontrollen

Datum	Version	Notiz, Maßnahme
26.05.08	V2.3	Die Beweise zu (6.11) – (6.15a) überarbeitet. **Jetzt scheint's OK**. Die Lösung des Problems ergab sich am Sa.24.5.08 in Hofheim in der Mittagspause des MB-Seminars bei einem Kaffee in der Sonne: Ich hatte bisher **sradV** nicht eingehend genug – insbesondere nicht in Komponentenschreibweise – untersucht. Das Ergebnis wird auch für andere Überlegungen von Nutzen sein (vgl. „Kleiner Nachtrag zu AMN").
20.05.08	V2.3	Den Beweis von Satz (6.13) überarbeitet: In ein Lemma (6.13) und einen Satz (6.13a) aufgespalten. &&& Es ist immer noch ein Bug drin! Die darauf folgenden Behauptungen (6.14) etc... sollten noch mal auf Vereinfachung überprüft werden!
30.12.07	V2.1	Kap. 6.4 – Bestimmung aller konischen nheAMN eingefügt; daher Schlussbemerkung gekürzt.
23.12.07	V2.0	In 6.5 herausgestellt dass B$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$B ≠{0} ist, weil jede AMN eine Eins haben soll, und diese notwendigerweise in der Teilalgebra B liegt.
22.12.07	V2.0	In 6.1 die „Voraussetzung" einfacher formuliert; ich habe mich einfach auf „vollkommene" Körper beschränkt.
19.12.07	V2.0	(615a) in der Produkttafel den Fall **m>s** (dimV=2m, dim$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$=s) noch mal genauer bestimmt, so dass die Basisvektoren des Radikals immer durch Produkte u_iv_i bzw. $u_{s+i}v_{s+i}$ usw... bestimmt werden. (Man könnte es auch noch anders machen, man muss nur V²=$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2$ irgendwie umsetzen!).
16.12.07	V0.5	Schlusswort noch mal umgeschrieben. Es ist möglich, alle nilpotenten (asszoz.!) Algebren mit der „symplektischen" Eigenschaft u²=0 auch für NilExp$\mathcal{N}$>3 zu bestimmen!
15.12.07	V0.5	Bestimmung aller total ausgearteten KAs, also aller „symplektischen" nilpotenten Algebra vom NilExp 2 und NilExp 3.; letzteres sowie für die total ausgearteten KAs. (Methode der symplektischen Geometrie von Artin [Art.II.60] auf nilpotente Algebren übertragen). Abgeschlossen- OK. – Schlusswort neu geschrieben. – Spellcheck des Kap.6 durchgeführt.
10.12.07	V0.5	Kap. 6.3 (vor dem Endkap. von V04) eingefügt: Abschluss der geschlitzten KAs mit Produkttafel (nach der Methode der Habil.Schrift [Lü76], aber etwas eleganter und einen Fehler aus [Lü76] korrigiert).
05.12.07	V0.5	Den misslungenen Versuch im letzten Kap. wieder gelöscht. Fehler in Kap.6.4 beseitigt: Den Fall B.$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$={0}, $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$B={0} gibt es nicht! Bsp. L(2,$\mathbb{D}$) eingefügt. im neuen Kap. 6.3 mit der Bestimmung der geschlitzten KAs begonnen.
02.12.07	V0.4	Im letzten Kap. Versuch der Bestimmung einer Klasse von ausgearteten KAs (misslungen!).
20.11.07	V0.3	In Kap. 6.1 und 6.4 weitergerechnet und eine Konstruktion von nheAMNs aus heAMNs und bel.Nilpot. Alg. angegeben. Diese Idee hatte ich schon früher, sie ist mir aber im Dez.2005 durch einen Computervirenbefall verloren gegangen
05.06.05	V0.2	In 6.1 etwas weitergerechnet.
17.10.03	V0.1	Vorbereitende Sätze aus [Wae.II.67] und [Alb61] über separable (assoz.) Algebren
12.10.03	V0.1	begonnen