Kapitel 5 – Die Halbeinfachen AMN

Version: V2.0 vom 24.12.2007 00:19

Inhaltsverzeichnis

5 Bestimmung aller halbeinfachen AMN 2

5.1 Die halbeinfachen AMNs im Fall 1 2

5.2 Die halbeinfachen AMNs im Fall 2 3

5.3 Zusammenfassung 3

5 Bestimmung aller halbeinfachen AMN

Eine Algebra $\mathscr{A}$ heißt **halbeinfach**, wenn sie kein Algebraradikal hat, $\mathscr{R}_{\mathscr{A}}=\{0\}$. Zur Bestimmung aller halbeinfachen AMNs benutzen wir den bekannten Zerlegungssatz, vgl. z.B. [Wae.II.67, §98, §99]:

(5.1) **Satz:** Jede assoziative *halbeinfache* K-Algebra ($\mathscr{A}$, K) mit $[\mathscr{A}:K]<\infty$
(i) hat eine Eins **1**
und lässt sich (bis auf die Reihenfolge) *eindeutig* zerlegen in *einfache* 2-seit-Ideale $A_i \neq \{0\}$
(ii) $\mathscr{A} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$
(iii) mit je einer Eins $e_i \in A_i$,
(iv) $A_i.A_k = \{0\}$ für $i \neq k$ und
(v) $e_1+\ldots+e_n = \mathbf{1}$ = Eins von $\mathscr{A}$

D.h. jedes $a \in \mathscr{A}$ schreibt sich eindeutig als Summe

(5.2) $a = a_1 + \ldots + a_n$ mit $a_i a_k = 0$ für $i \neq k$

(5.3) **DEF**.: Die Anzahl n der einfachen Komponenten in (5.1.ii) nennen wir den "Zerlegungsgrad" n($\mathscr{A}$).

Anwendung auf AMNs: Sei ab jetzt ($\mathscr{A}$, K, N) eine halbeinfache AMN ($\mathscr{R}_{\mathscr{A}}=\{0\}$) mit einer Zerlegung wie in (5.1) mit **n>1**, und sei

(5.4) **DEF**.: Sei $N_i := N|A_i$ die Beschränkung der Norm N auf das Ideal A_i.

(5.5) **Lemma**: Bis auf die Reihenfolge der Nummerierung gibt es nur zwei Fälle:
Fall 1: $N_1 \neq 0$ und $N_i = 0$ für alle $i \in \{2,\ldots,n\}$;
Fall 2: $N_k = 0$ für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$.

Bew. Fall 1: Sei $N_1 \neq 0$; wie in (2.5) folgt aus (5.1.iii): **(a)** $N(e_1)=1$. Daraus für $i \neq 1$: $\langle e_1, e_i\rangle = 1.\langle e_1, e_i\rangle = N(e_1).\langle e_1, e_i\rangle = .\langle e_1^2, e_1 e_i\rangle = 0$ wegen (5.1.iv). Also **(b)** $\langle e_1, e_i\rangle = 0 \ \forall i \in \{2,\ldots,n\}$ und entsprechend für $i,k \neq 1$: (c) $\langle e_i , e_k\rangle = 0$ und $N(e_i) = 0$. Schließlich für $i \neq 1$, $a \in A_i$: $N(a) = N(e_i a) = N(e_i)N(a) = 0$. Aus $N_1 \neq 0$ folgt also $N_i = 0$ für alle $i \neq 1$ ➔Fall 1. Die einzige Alternative zu Fall 1 (bis auf die Reihenfolge der Nummerierung) ist Fall 2. •

(5.6) **Korollar**: Im **Fall 1** gilt: $N(e_1)=1$, $N(e_i)=0$ für $i \in \{2,\ldots,n\}$ und $\forall i,k$: $\langle e_i, e_k\rangle$.
Im **Fall 2** gilt: $\forall i$: $N(e_i)=0$.

Bew.: Die Formeln für **Fall 1** folgen aus dem Beweis für (5.5). Im **Fall 2** gilt wegen $N_i=0 \ \forall i$: $\mathbf{N(e_i)=0}$. •

5.1 Die halbeinfachen AMNs im Fall 1

(5.7) Jede halbeinfache Fall-1-AMN ($\mathscr{A}$,K,N) mit Zerlegungsgrad $n=n(\mathscr{A}) \geq 1$ hat die Form
(i) $\mathscr{A}$ **= $\mathbf{A_1}$ ⊕ RadN**, wobei
(ii) $\mathbf{A_1}$ eine *einfache reguläre* KA und somit von Dimension $[A_1:K] \in \{1,2,4\}$ ist, und weiter gilt:
(iii) $\mathbf{A_1}$.RadN = RadN.$\mathbf{A_1}$ = {0},
(iv) RadN hat eine Eins e_R , und mit der Eins e_1 von $\mathbf{A_1}$ gilt
(v) $e_1+e_R = \mathbf{1}$ (Eins von $\mathscr{A}$) und $e_1 e_R = e_R e_1 = 0$

Bew. zu **(i)**: Mit (5.2) sei $a=a_2+...+a_n$ und $x=x_1+…+x_n$, dann folgt wegen $N(e_1)=1$: $<a,x>= N(e_1)<a,x>= <e_1a, x_1>=<0,x_1>=0$, also $A_2\oplus...:\oplus A_n\subseteq$RadN. Andererseits ist mit A_1 und RadN ebenfalls $B:=A_1\cap$RadN ein 2-seit-Ideal in $\mathscr{A}$. Da A_1 einfach ist, kann nur $B=\{0\}$ oder $B=A_1$ sein. Die zweite Möglichkeit scheidet wegen $N(e_1)=1$ aus. Also $B=\{0\}$ ➔ RadN $\subseteq A_2\oplus...:\oplus A_n$. Somit RadN = $A_2\oplus...:\oplus A_n$, also $\mathscr{A}=A_1\oplus$RadN. Zu **(ii)**: Wegen $A_1\cap$RadN=\{0\} ist (A_1,K,N_1) reguläre AMN, also mit (2.24) reguläre KA und somit nach (3.20) $[A_1:K]\in\{1,2,4\}$. **(iii)** ergibt sich aus (5.1). Zu **(iv)**: Setze $e_R:=e_2+...+e_n$, dann gilt mit $a=a_2+...+a_n\in$RadN: $ae_R = a_2e_2+...+a_ne_n = e_2a_2+...+e_na_n = e_Ra = a$ ➔ e_R ist Eins von RadN. **(v)** folgt aus (5.1.iv,v).

Bemerkung: Für $K=\mathbb{R}$ ergeben sich aus Tabelle 3.5 für A_1 nur die folgenden Alternativen (1) $A_1 \sim \mathbb{R}$, (2) $A_1 \sim \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen), (3) $A_1 \sim L(2,\mathbb{R})$ (voller Ring der reellen 2x2-Matrizen), (4) $A_1 \sim Q(\mathbb{R})$ (Schiefkörper der Hamilton-Quaternionen).

5.2 Die halbeinfachen AMNs im Fall 2

(5.8) Jede halbeinfache Fall-2-AMN $(\mathscr{A},K,N)$ mit Zerlegungsgrad $n\geq 1$ hat die Form

(i) $\boldsymbol{\mathscr{A}} = \mathbf{A} \oplus$ **RadN**, wobei

(ii) **A** eine *kommutative, reguläre* KA der Dimension $[\mathbf{A}:K]=2$ ist mit

(iii) $\mathbf{A} = Ke_1 \oplus Ke_2$ mit Eins $e_A = e_1+e_2$, mit $e_1e_2=0$, $N(e_A)=1$ ist, und weiter gilt:

(iv) **A**.RadN = RadN.**A** = \{0\},

(v) RadN hat eine Eins e_R, mit $N(e_R)=0$ und

(vi) $e_A+e_R = \mathbf{1}$ (Eins von $\mathscr{A}$) und $e_Ae_R = e_Re_A=0$

Bew.: Im Fall 2 ist $N(a_i)=0$ für $a_i\in A_i$ und alle $i\in\{1,...,n\}$. Da die Komponenten A_i alle *einfache* Ideale in $\mathscr{A}$ sind, gilt entweder $A_i \subseteq$RadN oder $A_i\cap$RadN=\{0\}. Man kann also mit geeigneter Nummerierung die Zerlegung (5.1) so aufteilen: $\mathscr{A} = A \oplus$ RadN mit $A:=A_1\oplus ...\oplus A_r$., RadN $=A_{r+1}\oplus ...\oplus A_n$. Setzt man $e_A:=e_1+...+e_r$, $e_R:=e_{r+1}+...+e_n$, so ist e_A Eins von A, e_R Eins von RadN und e_A+e_R = **1** Eins von $\mathscr{A}$. Setzt man $N_A := N|A$ (Beschränkung der Norm N auf A), so ist (A,K,N_A) nach Konstruktion wegen $A\cap$RadN=\{0\} eine *reguläre* AMN. ($\mathrm{RadN}_A=\{0\}$), somit wegen (2.24) eine reguläre KA, und nach (3.20) kommt nur die Dimension $[A:K]\in\{1,2,4\}$ in Frage. Nun ist aber A zwar halbeinfach aber *nicht* einfach (andernfalls wäre r=1, $A=A_1$ und $e_A=e_1$ ➔ $N(e_1)=1$ im Widerspruch zu $N(e_i)=0\ \forall i$).

Gemäß Tabelle 3.5 und Bemerkung (3.21) kommt für A nur der Typ 3 ("anomal-komplexe Zahlen" über K) infrage, weil die anderen regulären KAs einfach sind; das gilt auch für beliebigen Körper K mit $\mathrm{char}K\neq 2$. Also $\mathbf{A} = Ke_1 \oplus Ke_2$ mit Eins $e_A=e_1+e_2$, $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$, $N(e_A)=1$. •

5.3 Zusammenfassung

(5.9) **Konstruktion:** Die *halbeinfachen* ausgearteten AMN zu gegebenem Körper K ($\mathrm{char}K \neq 2$) lassen sich folgendermaßen konstruieren: Man nehme irgendeine **reguläre** kinematische Algebra **A** mit Eins 1_A und die durch die KA-Eigenschaft auf **A** induzierte Norm $N':\mathbf{A}\rightarrow K$. Ferner nehme man eine *beliebige* endlichdimensionale halbeinfache K-Algebra R mit Eins 1_R, bilde die direkte Summe $\mathbf{A}\oplus R$, so dass $\mathbf{A}.R=R.\mathbf{A} = \{0\}$ gilt, und erweitere die Norm N' auf $N:\mathbf{A}\oplus R\rightarrow K$, durch die Definition $N(a+b):=N'(a)\ \forall a\in\mathbf{A}, b\in R$ gilt. Dann ist $(\mathbf{A}\oplus R, K, N)$ eine halbeinfache AMN mit Eins $\mathbf{1} = 1_A+1_R$ und R = RadN. Auf diese Weise bekommt man *alle* ausgearteten halbeinfachen AMN.

(5.10) **Satz**: (i) Alle halbeinfachen *ausgearteten* AMN $\mathscr{A}=\mathbf{A}\oplus$RadN ($\mathscr{R}_{\mathscr{A}}=\{0\}$, RadN$\neq\{0\}$) sind *nicht-konisch, und es gilt:*
$\mathscr{NT}(\mathscr{A}) = \mathscr{S}(\mathscr{A}) \cup (\mathbf{A}+(\mathscr{NT}(\mathrm{RadN}) - \{0\})) \neq \mathscr{S}(\mathscr{A}) = \mathscr{NT}(\mathbf{A})+\mathrm{RadN}$.

Bem.:Die Formel bleibt übrigens auch noch für RadN={0} richtig, wenn wir A+∅=∅ vereinbaren.

(ii) Somit sind die konischen ausgearteten AMN ($\mathcal{NT} = \mathcal{S}$, RadN≠{0}) alle nicht-halbeinfach ($\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$≠{0}).

Bew.**(i):** Mit $\mathcal{S}$(X) bzw. $\mathcal{NT}$(X) seien Nullkonus bzw. Nullteilermenge der AMN X bezeichnet; $\mathcal{A}$ **=** **A**⊕**R** sei halbeinfache AMN ($\mathcal{A}$, K,N) (Fall 1 oder Fall 2), wobei **A** reguläre KA und **R**=RadN≠{0} das Normradikal von $\mathcal{A}$ ist und **A.R**=**R.A**={0} gilt.
Bemerkung: Es ist immer **A**≠$\mathcal{NT}$(**A**) und **R**≠$\mathcal{NT}$(**R**), da **A** und **R** beide halbeinfach sind, also je eine Eins haben. Zu beweisen ist $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{NT}(\mathcal{A})$.
(i1) Berechnung von $\mathcal{S}(\mathcal{A})$: Da N|**R** =0 und da **A** eine KA, also konisch ist, gilt $\mathcal{S}$**(A)=** $\mathcal{NT}$**(A)** und damit $\mathcal{S}$**(**$\mathcal{A}$**)=**$\mathcal{S}$**(A)+R =** $\mathcal{NT}$**(A)+R**.
(i2) Berechnung von $\mathcal{NT}(\mathcal{A})$: Sei **x =a+r≠0** (a∈**A**, r∈**R**) Nullteiler von $\mathcal{A}$. Dann muss es ein y=b+s ≠0 (b∈**A**, s∈**R**) geben mit 0=xy=ab+rb+as+rs=ab+rs. Entweder wird x von einem y=s∈**R**-{0} annulliert, wenn r∈$\mathcal{NT}$(**R**)-{0}, dabei kann a∈**A** beliebig sein wegen **A.R**=**R.A**={0}. Oder x wird von einem y=b∈**A**-{0} annulliert, wenn a∈$\mathcal{NT}$(**A**), dabei kann r∈**R** beliebig sein wegen **A.R**=**R.A**={0}. Zusammen also x∈(**A**+($\mathcal{NT}$(**R**)-{0}))∪($\mathcal{NT}$(**A**)+**R**); umgekehrt: wenn x aus dieser Menge ist, ist x Nullteiler von $\mathcal{A}$. Also $\mathcal{NT}(\mathcal{A})$=(**A**+($\mathcal{NT}$(**R**)-{0}))∪($\mathcal{NT}$(**A**)+**R**); nach (i1) ist aber der zweite Teil dieser Vereinigung gleich $\mathcal{S}$**(**$\mathcal{A}$**);** keiner der Teile der Vereinigung ist aber im anderen enthalten (auch nicht im Fall dass **A** und **R** selbst keine Nullteiler ≠0 haben), da zumindest die Einsen in **A** und **R** verschieden sind. Damit ist (i) bewiesen.
Bew.**(ii)** ergibt sich als eine Folge von (i).