Kapitel 4 - Faktorisierungen

Version: V2.0 vom 19.12.2007

Inhaltsverzeichnis

4 Faktorisierung einer AMN nach geeigneten Idealen

Viele Eigenschaften einer Algebra, die ein zweiseitiges Ideal J enthält, lassen sich bereits an der nach J faktorisierten Algebra A/J zeigen. Im Fall einer AMN kommt man durch Faktorisierung nach dem Normradikal auf die regulären kinematischen Algebren (KA, vgl. Kap. 3). Da uns aber besonders die Ausartungsfälle (RadN $\neq\{0\}$) interessieren, ist diese Faktorisierung "zu grob", das RadN als Faktor ist "zu groß". Faktorisiert man jedoch nach dem "kleineren" Algebraradikal $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ (nilpotentes Ideal, welches alle nilpotenten Ideale enthält), so gelingt nach einer Klassifizierung der *halbeinfachen* AMNs ($\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \{0\}$) auch eine für AMNs mit Algebraradikal ($\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \neq \{0\}$).

4.1 Faktorisierung nach dem Normradikal

Sei ($\mathcal{A}$,K;N) eine allgemeine AMN. Da das Normradikal RadN ein zweiseitiges Ideal ist, kann man den Faktorraum $\mathcal{A}$'= $\mathcal{A}$/RadN der Restklassen x' = x+RadN in natürlicher Weise zu einer Algebra machen, indem man die Multiplikation in $\mathcal{A}$ durch x'•y':=(xy)' auf $\mathcal{A}$' überträgt.

(4.1) **Satz:** Ist ($\mathcal{A}$,K,N) eine AMN, so ist
(i) $\mathcal{A}$':=$\mathcal{A}$/RadN eine AMN über K mit *nicht-entarteter* multiplikativer Norm N':$\mathcal{A}$' → K, die durch
(ii) N'(a'):= N(a) für alle a'= a+Rad(N) definiert ist.
(iii) $\mathcal{A}$' =$\mathcal{A}$/Rad(N) ist eine *reguläre* kinematische Algebra (KA), und damit von der Dimension 1, 2 oder 4.

Beweis: **(a)** Ist ($\mathcal{A}$,K,N) eine AMN, so ist $\mathcal{A}$'=$\mathcal{A}$/RadN jedenfalls eine assoziative Algebra mit Eins 1'=1+RadN und dim$\mathcal{A}$'=dim$\mathcal{A}$ -dimRadN. Denn für den K-Vektorraum $\mathcal{A}$' gilt x'+y' =(x+Rad)+(y+RadN) =(x+y)+RadN = (x+y)', k.x' =k(x+RadN) =(kx)+RadN =(kx)' für x,y$\in\mathcal{A}$, k$\in$K und 0'=RadN. Der Vektorraumhomomorphismus π: x$\in\mathcal{A}$ →x'=x+RadN $\in\mathcal{A}$' wird mit der Definition x'y' :=xy +RadN = (xy)', weil nach (2.20) RadN ein 2-seit-Ideal ist, zu einem Algebrahomomorphismus. Da jede Restklasse k'=k+RadN (k$\in$K) genau einen Repräsentanten hat (k' =r' ⇔ k=r für alle k,r$\in$K), der Körper K'=K.1' also isomorph zu K ist, kann man K wieder in $\mathcal{A}$/RadN isomorph einbetten indem man die Eins von K mit der Eins 1' von $\mathcal{A}$/RadN identifiziert. **(b)** Definiert man N'(x') :=N(x) und 2<x',y'>' :=N'(x'+y')-N'(x')-N'(x') =2<x,y>, so folgt aus <x,r>=0 $\forall$x$\in\mathcal{A}$, r$\in$RadN: N'(x'y') =N'((xy)') =N(xy+RadN) =N(xy) =N(x)N(y) =N'(x')N'(y'), also ist mit N auch N' multiplikative Norm, und <,>' ist das zu N' gehörige Skalarprodukt. Wegen r$\in$RadN ⇔ r'=0' gilt RadN'={0'}. Damit ist $\mathcal{A}$' reguläre AMN. Aus (3.20) folgt [$\mathcal{A}$':K] $\in$\{1, 2, 4\}. •

(4.2) **Korollar**: $\mathcal{U}$' :=$\mathcal{U}$/RadN = $\mathcal{P}$'= $\mathcal{P}$/RadN ist die Einheitengruppe und $\mathcal{NT}$' :=$\mathcal{NT}$/RadN =$\mathcal{S}$'=$\mathcal{S}$/RadN, die mit dem Nullkonus zusammenfallende Nullteilermenge von $\mathcal{A}$/RadN, d.h. $\mathcal{A}$/RadN ist konisch.

(4.3) **Korollar**: Die "Fastinvolution" * (3.17b) einer AMN $\mathcal{A}$ geht bei dem natürlichen Homomorphismus π:$\mathcal{A}$→ $\mathcal{A}$/RadN; in die Involution (3.1), $\pi\circ *$, der KA $\mathcal{A}$/RadN über.

Bew.: Ergibt sich direkt aus (2.3), (3.17b), (2.25) und **r**(x) $\in$RadN, d.h. π (**r**(x)) = 0' $\forall$ x$\in\mathcal{A}$.

4.2 Faktorisierung nach dem Algebraradikal

Zum Thema "Algebraradikal" übernehmen wir einige Definitionen und (ohne Beweis) einige Sätze aus der Literatur, vgl. z.B. [Wae.II.67]; ($\mathcal{A}$, K) sei assoziative K-Algebra mit [$\mathcal{A}$:K]<∞:

Im folgenden seien J, J',... Links- oder Rechts- oder 2-seit-Ideal einer Algebra A, sie werden kurz als Ideale bezeichnet.

(4.4) **DEF**: (i) Das Produkt J.J' ist die Menge aller endlichen Summen aus gliedern aa' ($a\in J$, $a'\in J'$). (ii) Die n-te Potenz, J^n ist die Menge aller endlichen Summen aus n-fachen Produkten $a_1 \dots a_n$ ($a_i \in J$)

(4.5) **DEF**: J heißt nilpotent, wenn $J^n=\{0\}$ ist für einen Exponenten n. Der kleinste Exponent m, für den $J^m=\{0\}$ ist, heiße „Nilexponent“: m:=NilExp(J).

(4.6) **Lemma**: (i) Summe, Produkt und Durchschnitt zweier nilpotenter (Links- / Rechts- / 2-seit-) Ideale sind wieder nilpotente (Links- / Rechts-2-seit-) Ideale. (ii) Ein 2-seit-Ideal, das nur aus nilpotenten Elementen x besteht, ist nilpotent.

Bemerkung zu (ii): Ist z.B. $x^k=0$ für alle $x\in J$, so kann der Nilexponent von J trotzdem größer sein als k; es kann also trotzdem $J^k \neq \{0\}$ sein! (Vgl. auch (4.18) weiter unten.)

(4.7) Ist J nilpotent mit m=NilExp(J), so gilt $J\supseteq J^2 \supseteq \dots \supseteq J^m=\{0\}=J^{m+1}=J^{m+2}\dots$und $J^k\neq\{0\}$ für k<m. Ein nilpotentes Ideal J mit m>2 hat also immer echte Unterideale.

(4.8) **DEF**: Das "Algebraradikal" $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ist die Vereinigung aller **nilpotenten** Linksideale.

(4.9) **Satz**: $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ist ein 2-seit-Ideal.

(4.10) **DEF**.: Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt **halbeinfach**, wenn $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}=\{0\}$ ist.

(4.11) **Korollar**: Die Faktoralgebra $\mathcal{A}/\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ist halbeinfach.

(4.12) **Korollar**: Eine halbeinfache Algebra hat eine Eins.

(4.13) **DEF**.: Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt **einfach**, wenn {0} und $\mathcal{A}$ die einzigen **2-seit**-Ideale in $\mathcal{A}$ sind.

(4.14) **Satz**: In einer Algebra mit Eins ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ der Durchschnitt aller maximalen (Links-) Ideale in $\mathcal{A}$.

Anwendung auf AMNs: Zum Beweis des nächsten Satzes benötigen wir das Lemma.

(4.15) **Lemma**: Sei $\mathcal{A}$ =K+$\mathcal{V}$ eine AMN. Jedes in $\mathcal{V}$ enthaltene **2-seit**-Ideal ist in RadN enthalten.

Bew.: Sei $J\subseteq\mathcal{V}$ zweiseitiges Ideal. Sei $x\in J$ und $a\in K+\mathcal{V}=\mathcal{A}$ beliebig: Mit der Fastinvolution in (3.17b) folgt $x^*=-x$ und damit: $xa^*+ax^*= xa^* -ax =2\langle x,a\rangle +\mathbf{s}(x,a)$; links sind beide Terme in J und damit in $\mathcal{V}$, rechts ist $2\langle x,a\rangle \in K$ und $\mathbf{s}(x,a)\in \text{RadN} \subseteq\mathcal{V}$; daraus folgt $\langle x,a\rangle=0\ \forall a$ ➔ $x\in$ RadN ➔ $J\subseteq$ RadN. •

(4.16) **Satz:** Für jede AMN ($\mathcal{A}$,K,N) gilt $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \subseteq \text{RadN} \subseteq \mathcal{V}\cap\mathcal{S}$

Bew.: **(i) Beh.** $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}$: sei $x\in\mathcal{R}$, dann ist nach Def. (4.3) x in einem nilpotenten Linksideal L enthalten und daher selbst nilpotent ➔$\exists$ m>1 mit $x^m=0$ ➔ $N(x^m)=(N(x))^m=0$ ➔ N(x)=0 ➔ $x\in\mathcal{S}$ für alle $x\in\mathcal{R}$ ➔ $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}$.
(ii) Beh. $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{V}$: sei x = k +v $\in\mathcal{R}$ ($k\in K$, $v\in\mathcal{V}$) mit $x\neq 0$. x ist nilpotent: $x^m=0$. Aus (i) folgt $0=N(x)=k^2+N(v)$. Mit der Grundformel (2.23) **x^2=-N(x)+2kx modRadN** ergibt sich ➔
$x^2 = 2kx$ modRadN,
$x^3 = 2kx^2$ modRadN = $(2k)^2x$ modRadN , also $x^3-(2k)^2 \in$ RadN usw. …; schließlich:
$0 =x^m =(2k)^{m-1} x$ modRadN, also (*) $(2k)^{m-1} x \in$RadN. Annahme $k\neq 0$: (*) ➔ $x=k+v\in$RadN; dann aber k=0 ➔ Widerspruch!. Also

gilt k=0 und damit $x=v\in\mathcal{V}$ für alle $x\in\mathcal{R}$, d.h. $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{V}$.
(iii) Aus $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{V}$ und (4.15) folgt $\mathcal{R}\subseteq$ **RadN**, und das ist natürlich in $\mathcal{V}\cap\mathcal{S}$. •

Für die Klassifikationen in Kap. 5 und 6 merken wir uns:

(4.16a) **Korollar**: Für jede AMN ($\mathcal{A}$,K,N) ist $\mathcal{A}'=\mathcal{A}/\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ eine halbeinfache AMN ($\mathcal{A}'$,K,N') mit der durch N'(x') := N(x) ($x':=x+\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$; $x\in\mathcal{A}$) definierten multiplikativen Norm N'.

Bew.: Wegen der Multiplikation für Restklassen $x'y' =(x+\mathcal{R}_{\mathcal{A}})(y+\mathcal{R}_{\mathcal{A}}) :=(xy)' =xy+\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ist $N'(x'y') :=N'((xy)') =N(xy)=N(x)N(y) =N'(x')N'(y')$, also N' multiplikativ. Ist $J' =J +\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ nilpotentes Ideal in $\mathcal{A}' =\mathcal{A}/\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, so ist J nilpotent, also $J\subseteq\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, also $J' =\mathcal{R}_{\mathcal{A}} =0'$, also $\mathcal{R}'_{\mathcal{A}'} =\{0'\}$ und mit Def. (4.10) ist $\mathcal{A}'$ halbeinfach. •

Satz (4.16), speziell auf KAs angewandt, ergibt:

(4.17) **Satz:** Für *jede* KA gilt $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ =RadN $\subseteq\mathcal{V}\cap\mathcal{S}$

Bew.: Da jede KA mit der induzierten Norm N(x)=xx* eine AMN ist, gilt: (i) $\mathcal{R}\subseteq$RadN nach (4.16). Wenn $\mathcal{A}$ eine KA ist gilt mit (2.16.i): $x^2 = -N(x) +2<1,x>x$ für alle $x\in\mathcal{A}$. Daher: $v^2 =0$ $\forall v\in$RadN. Nach (4.6.ii) ist daher RadN nilpotentes Ideal, also nach Def. (4.8): (ii) RadN $\subseteq\mathcal{R}$. (i) und (ii) zusammen ergeben $\mathcal{R}$ **= RadN .** •

Über den Nilexponenten des Algebraradikals einer allgemeinen AMN kann man nicht viel sagen. Im speziellen Fall der KAs schon. Aus (3.16) folgt für jede KA: $r^2=0$ für alle $r\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$=RadN; allein daraus kann man aber noch nicht auf NilExp($\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$)=2 schließen. Es gilt jedoch für die späteren Klassifikationen der nicht-halbeinfachen KAs (Kap.6) der wichtige Satz:

(4.18) **Satz:** Sei $\mathcal{A}$ eine KA mit der orthogonalen Zerlegung $\mathcal{A}$=K+$\mathcal{V}$. Dann gilt:
(i) NilExp$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\leq 3$.
(ii) Gibt es in $\mathcal{V}$ eine Einheit, $e\in\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$, so ist NilExp$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\leq 2$.

Bew.(i): Da $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ =RadN$\subseteq\mathcal{V}$ ein 2-seit-Ideal ist, sind für alle $u\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, $x\in\mathcal{V}$ auch die ux, $xu\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ und es gilt $0=2<u,x>=ux^*+xu^*=-ux-xu$, also **ux=-xu** und wegen (3.16) $\mathbf{u^2=0}$ für alle $u\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Seien $u,v,w\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, dann ist $0=(u+vw)^2=u^2+uvw+vwu+(vw)^2=uvw-vuw=uvw+uvw=2uvw$, also mit charK≠2: uvw=0 für alle $u,v,w\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ➔ NilExp $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\leq 3$
Bew.(ii): Sei e eine Einheit in $\mathcal{V}$, $e\in\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$. Sei $v,w\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$; da $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ein Ideal ist, sind auch ew und $v+ew\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, also mit (3.16): $0=(v+ew)^2= v^2+vew+ewv+(ew)^2=vew+ewv=-evw-evw=-2evw$; wegen $e\in\mathcal{U}$ und charK≠2 folgt vw=0 für alle $v,w\in\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ und damit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^2=\{0\}$, d.h. NilExp$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\leq 2$.