Kapitel 3 - IA und KA

Version V2.0 vom 22.12.07

Inhaltsverzeichnis

3 Involutorische und Kinematische Algebren

3.1 Vorbemerkung

In Kap.1 (Motivation und Zielsetzung) wurde angedeutet, dass die AMN-Eigenschaft (**AMN**) ("Algebren mit multiplikativer Norm") eng verknüpft ist mit zwei weiteren Eigenschaften (**IA**) ("Involutionsalgebren") und (**KA**) (kinematische Algebren). Eine **reguläre** AMN (Rad(N)={0}) ist nach Kap.1 eine KA.

Da die Eigenschaften IA und KA bei der Bestimmung aller AMN eine Rolle spielen, zeigen wir zunächst, dass "IA" und "KA" äquivalent sind, und bestimmen sodann alle KA über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$.

3.2 Involutionsalgebren (IA)

(3.1) **DEF.:** Sei $\mathcal{A}$ eine assoziative Algebra ($\mathcal{A}$, K, *) mit Eins 1 über einem Körper K, char K $\neq 2$, $[\mathcal{A}:K]<\infty$, heißt **Involutionsalgebra (IA)**, wenn $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, x^* ein Verktorraumautomorphismus mit $x^{**}=x$, $(xy)^*=y^*x^*$ ist, und gilt: $z^*=z \Leftrightarrow z \in K$ (für alle $x,y,z \in \mathcal{A}$)

x^* heißt das ***Konjugierte*** zu x. Aus der Definition von * folgt sofort:

(3.2) $<,>: \mathcal{A} \times \mathcal{A} : (x,y) \to <x,y> := \frac{1}{2}(xy^*+yx^*) \in K$ ist eine symmetrische K-Bilinearform und $xy^*+yx^*=x^*y+y^*x$.

Damit erhalten wir den

(3.3) **Satz:** Jede IA ist eine AMN mit der multiplikativen Norm
$N: x \in \mathcal{A} \to N(x) := xx^*=x^*x = <x,x> \in K$.

Bew.: Die K-Bilinearität folgt aus (**3.**2). Multiplikativität: $N(xy) = (xy)(xy)^* = xyy^*x^* = xN(y)x^* = N(y)xy^* = N(y)N(x) = N(x)N(y)$. •

(3.4) Satz: Jede IA ist mit der induzierten Norm $N(x)=xx^*$ eine konische AMN, d.h. $\mathcal{NT} = \mathcal{S}(N)$ und $\mathcal{U} = \mathcal{P}(N)$.

Bew.: Wegen (2.17) brauchen wir nur $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}$ zu zeigen. Sei also $x \in \mathcal{P}$, d.h. $N(x) \neq 0$: Setzen wir $y := x^*/N(x)$, dann gilt $xy=1 \Rightarrow y=x^{-1} \Rightarrow \mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}$. •

Das Inverse einer Einheit u schreibt sich also

(3.5) $u^{-1} = u^*/N(u)$ für alle $u \in \mathcal{U}$

(3.6) **Corolar:** $x \in \mathcal{NT} \Leftrightarrow xx^*=x^*x=0$. Jeder Nullteiler einer IA wird durch sein *Konjugiertes* annulliert.

Mit (3.3) ergibt sich für das orthogonale 1-Supplement $\mathcal{V} := 1^{\perp}$ und das Normradikal $RadN := \{r \in \mathcal{A} \mid <r,y>=0 \ \forall y \in \mathcal{A}\}$ aus (3.1) und (3.2):

(3.7) (i) $\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{A} \mid x^* = -x\}$,
(ii) $RadN = \{r \in \mathcal{V} \mid rx^* - xr = 0$ für alle $x \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{V}$

Bew. (i): $x^*=-x \Leftrightarrow 0=x^*+x= 1.x^*+x.1^*=2<1,x> \Leftrightarrow x\in\mathcal{V}$
Bew. (ii): $r\in RadN$, $x\in\mathcal{A} \Leftrightarrow 0 = 2<x,r> =_{(3.2)} rx^*+xr^* \Leftrightarrow rx^*=-xr^*$; für x=1: $r=-r^*$ d.h. $r\in\mathcal{V}$, also $rx^*+xr^* = rx^*-xr$ für alle $x\mathcal{A}$. •

Damit gilt für jedes x und das Konjugierte die eindeutige Zerlegung

(3.8) $x = \xi+v$ und $x^* = \xi -v$ ($\xi\in K$, $v\in V$)

Anmerkung: Im Trivialfall $[\mathcal{A}:K]=1$ ergibt sich $\mathcal{V}=\{0\}$ und damit wäre * die Identität. Ist umgekehrt * nicht die Identität, so muss $\mathcal{A}$ wegen ($z^*=z \Leftrightarrow z \in K$) größer als K und damit $\mathcal{V}\neq\{0\}$ sein.

Wegen $RadN\subseteq\mathcal{V}$ ist RadN gekennzeichnet durch

(3.9) $r \in Rad(N) \Leftrightarrow rv+vr=0$ für alle $v\in V$

Schlussbemerkung: $\mathcal{V}$ kann man auch in einer Form darstellen, in der weder die Involution * noch die Norm N vorkommt; dies werden wir später noch brauchen:

(3.10) $x\in\mathcal{V} \Leftrightarrow x^2 \in K$ und $x \notin K\backslash\{0\}$

Bew.: Dass die $x \in\mathcal{V}-\{0\}$ diese Eigenschaft haben, verifiziert man sofort wegen $x^*=-x$, und aus $x \neq 0$, $x\perp 1$ folgt $x \notin K$. Umgekehrt ist $\mathcal{V}$ durch diese Eigenschaft bestimmt, denn: Sei $x^2 \in K$, $x \notin K\backslash\{0\}$. Wir können schreiben $x=k+v$ ($k \in K$, $k\neq 0$, $v \in\mathcal{V}$); dann ist $x^2=k^2+2kv+v^2 = (k^2+v^2)+2kv$; der erste Term ist in K wegen $v^2 \in K$. Aus $x^2 \in K$ folgt dann $kv=0$. Im Fall $k=0$ ist $x=v \in\mathcal{V}$. Im Fall $v=0$ ist $x=k$; da x nicht in $K-\{0\}$, kann nur $k=0$ sein, also $x=0 \in\mathcal{V}$. Aus der Eigenschaft folgt also in jedem Fall $x \in\mathcal{V}$. •

3.3 Kinematische Algebren (KA)

(3.11) **DEF.:** Eine assoziative Algebra mit Eins 1 über einem Körper K ($charK\neq 2$) heißt **Kinematische Algebra** (KA), wenn $\mathbf{x^2 \in K +Kx}$ gilt für alle $x \in\mathcal{A}$.

Nach (2.24) ist eine nicht-entartete AMN eine KA, daher spielen die kinematischen Algebren unter den AMN eine besondere Rolle.

Wir wollen jetzt zeigen, dass "KA" mit "IA" äquivalent ist. Die Beweisideen sind nicht neu, sie wurden zum Beweis anderer Sätze z.B. in [Ka74] verwendet.

(3.12) **Satz:** Jede KA ist eine IA und jede IA ist eine KA.

Beweise: Die eine Richtung bekommt man schnell:

(3.13) **Lemma: IA → KA**, jede Involutionsalgebra ist kinematisch.

Bew.: Sei $\mathcal{A}$ eine IA und $x=k+v$ ($k \in K$, $v \in \mathcal{V}=1^\perp$) beliebig. Dann ist $x^2 = (k^2+v^2)+2kv$; wegen (3.10) ist $v^2 \in K$ und somit $x^2 \in K + Kx$, also $\mathcal{A}$ kinematisch. •

Der Beweis der Umkehrung ist etwas länger.

(3.14) **Lemma: KA → IA**, d.h. jede kinematische Algebra ist Involutionsalgebra.

Bew.: Sei $\mathcal{A}$ eine KA ($x^2 \in K+Kx$ für alle $x \in\mathcal{A}$). Die Beweisidee ist die folgende: In Anlehnung an (3.10) definieren wir in der KA $\mathcal{A}$ die Menge

(A) $\mathbf{M :=\{ x \in\mathcal{A} \mid x^2 \in K \text{ und } x \notin K-\{0\} \}}$
und haben zu beweisen:

(B1) M ist linearer Teilraum von $\mathcal{A}$
(B2) $\mathcal{A} = K \oplus M$
(B3) Die Abbildung $x =k+m \rightarrow x'= k-m$ ($k \in K$, $m \in M$) ist Involution mit den IA-Eigenschaften, Def. (3.1)

Beweis (B1):

(i) Mit $x \in M$ ist auch $kx \in M$ für jedes $k \in K$, denn $(kx)^2=k^2x^2 \in K$.
(ii) Ist mit $x, y \in M$ auch $x+y \in M$? Im Trivialfall, x=0 oder y=0, ist das klar.

Bew. (ii): Sei $x,y \in M$, und $x\neq 0$, $y \neq 0$, also
(C) $x^2, y^2 \in K$ und $x,y \notin K$

Fall 1: 1,x,y lin. abhängig, z.B. y=t+sx (t,s $\in$ K), dann ist mit x,y $\in$M: y^2-$(sx)^2$-t^2=2tsx $\in$K also ts=0; s $\neq$ 0, da y$\notin$K; also t=0 und daher: $(x+y)^2$ =$(1+s)^2x^2$ ebenfalls in K und somit x+y $\in$M.

Fall 2: 1,x,y lin. unabhängig: Die KA-Eigenschaft besagt, dass es zu jedem z $\in\mathscr{A}$ Größen a(z), b(z) $\in$ K gibt mit
(D) $z^2 = a(z) + b(z)z$.

Wir bilden $(x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2$, $(x-y)^2 = x^2-xy-yx+y^2$. Die Summe $(x+y)^2+(x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$ ist in K wegen x,y $\in$M. Kürzen wir *b*(x+y) mit *b*(+), b(x-y) mit *b*(-) ab, so folgt für die linke Seite wegen *a*(x-y), *a*(x-y) $\in$K:
(E) $[b(+)+b(-)]x + [b(+)-b(-)]y \in K$.

Da 1,x,y lin. unabhängig vorausgesetzt sind, folgt zum einen x+y $\notin$K und aus (E): b(+)=b(-)=0, also wegen (D): $(x+y)^2=a(x+y)$ $\in$K. Somit erfüllt x+y beide Bedingungen vom M. Damit ist x,y $\in$ M ➔ x+y $\in$ M bewiesen, also M linearer Teilraum von $\mathscr{A}$.

Beweis (B2): Die Summe K+M ist direkt, da nach Konstruktion (A) gilt: M $\cap$ K = $\emptyset$. Zu zeigen ist, daß K +M den ganzen Raum $\mathscr{A}$ aufspannt, also jedes x$\in\mathscr{A}$ von der Form x =k+m (k $\in$ K, m $\in$ M) ist: Sei x $\in\mathscr{A}$ beliebig und x^2 =a+bx (a,b $\in$K) gemäß (D): Setze
y :=b -2x. Dann folgt $y^2=b^2$ -4bx +4x^2= b^2+4a $\in$K, also y $\in$M, und somit x =b/2 - y/2 $\in$K+M, d.h., K und M spannen zusammen ganz $\mathscr{A}$ auf. Damit gilt
$$\mathscr{A} = K \oplus M$$

Wir zeigen nun die Existenz einer multiplikativen Norm und einer Involution x→x' mit den IA-Eigenschaften:

Beweis (B3): Für die Abbildung

(F) x =k+m → x' :=k-m (k $\in$K, m $\in$M) zeigen wir die Involutionseigenschaften:

(IA1) x → x' linearer Verktorraumautomorphismus von $\mathscr{A}$;
(IA2) x → x' ist involutorisch, d.h. x''= x für alle x $\in\mathscr{A}$;
(IA3) x → x' ist "anti", d.h.(xy)' = y'x' und
(IA4) x'= x genau für x $\in$ K.

(IA1), (IA2) und (IA4) ergeben sich sofort aus der Definition (F) und der Zerlegung $\mathscr{A}$=K$\oplus$M. Für (IA4) wird wieder charK $\neq$2 vorausgesetzt. Der Beweis von (IA3) ist etwas länger.

Beweis (IA3): Für beliebiges x=k+m (k $\in$K, m $\in$M) bilden wir zunächst
(G) $n(x) := xx' = (k+m)(k-m) = k^2-m^2$.
Aus der Definition (A) von M folgt m^2 $\in$K und damit n(x)$\in$K. n(x) ist also eine K-wertige quadratische Form auf $\mathscr{A}$, von der zu zeigen ist, dass sie multiplikativ ist (dies folgt erst aus der Behauptung (IA3)). Wir konzentrieren uns zuerst auf die M-Komponenten, wollen also (uv)' $=_?$ v'u' für beliebige u,v $\in$M oder, was wegen u'=-u dasselbe ist, ist (uv)' $=_?$ vu zu beweisen. Es gilt
(H) n(u) = -u^2 für alle u $\in$M; wegen -n(u+v)= $(u+v)^2$= -n(u) +uv+vu - n(v) $\in$K folgt
(J) uv +vu = -n(u+v)+n(u)+n(v) =: -2<u,v>: =l $\in$K für alle u,v $\in$M, wobei <,> die zu n() gehörige symmetrische Bilinearform sei.
(K) uvu = lu + n(u) v.

Zum Beweis von (uv)' $=_?$ vu setzen wir an:
(L) z:= uv = k + m (k $\in$ K, m $\in$ M)
und drücken m^2 $\in$ K durch z aus: $m^2 = (z-k)^2 = z^2 -2kz + k^2$ = (uvu)v -2kz +k^2, mit (K) ➔
(M) $m^2 = (l-2k)z - n(u)n(v) + k^2 \in K$,

Wir unterscheiden 3 Fälle:

Fall 1, z $\notin$K: Aus (M) folgt (l-2k)z $\in$K und damit wegen z$\neq$0
(N) l-2k =0.
Schließlich erhalten wir mit (J) und (N): (uv)'-vu = (uv)'+uv-l=z'+z -l = 2k-l=0.

Fall 2, z in K-{0}: Dann ist z=k $\neq$0, m=0 und m^2=0, und aus (M) folgt
(O) 0 = lk-2k^2-n(u)n(v) +k^2 = lk-k^2-n(u)n(v)
Es ist aber n(u)n(v) =uuvv = u(uv)v = uzv=ukv=k^2 . Aus (O) ➔ 0 =lk -2k^2 =k(l-2k). Wegen k$\neq$0 folgt wieder l-2k=0. Wir erhalten mit (J) und z=k wieder: (uv)'-vu = k -vu =k -l +k=2k-l=0.

Fall 3, z =uv=0, also m=0 und k=0: Aus (K) folgt, dass u und v linear abhängig sind, z. B. v=su (s $\in$K). Dann ist aber vu = suu =usu =uv =z=0. Also auch in diesem Fall: (uv)'-vu = 0.

Somit ist in allen drei Fällen die Behauptung (uv)'= vu bewiesen. Die Eigenschaft (IA3) verifiziert man im allgemeinen Fall nun sofort: x = k+u, y=r+v (k,r $\in$ K, u,v $\in$ M) ➔(xy)' = (kr+ru+kv+uv)' = kr+ru'+kv' +(uv)' = kr-ru-kv+vu =(r-v)(k-u) = y'x'. Also (xy)'=y'x'.
•

Damit sind alle IA-Eigenschaften für jede KA bewiesen. Die Kategorie KA ist identisch mit der Kategorie IA, *und wir werden in Zukunft nur noch „KA“ und nicht mehr „IA“ erwähnen*. Die Abbildung x→x' ist die gewünschte IA-Involution x→x*; die oben eingeführte quadratische Form n( ) ist die gewünschte multiplikative Norm N( ), und M ist bezüglich dieser Norm das orthogonale 1-Supplement $\mathcal{V} = 1^{\perp}$.

(3.15) $N(x):= xx^* = k^2-v^2 = <x,x>$ für alle $x=k+v$ ($k\in K$, $v\in M$),
$M =\{u\in \mathcal{A} \mid u^2\in K, u \notin K-\{0\}\} = \mathcal{V} =\{u\in \mathcal{A} \mid <1,u> =0\}$.

(3.16) Für jede KA $\mathcal{A}$ gilt mit der induzierten Norm N:
(i) $x^2=-N(x)+2<1,x>x$ für alle $x\in \mathcal{A}$,
(ii) $\mathcal{A}$ ist eine konische AMN, d.h. $\mathcal{S} = \mathcal{NT}$, $\mathcal{P}= \mathcal{U}$
(iii) Der Nullkonus ist $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{A} \mid x^2\in Kx, x \notin K-\{0\}\}$.

Bew.(i): Sei $x=k+v$ ➔ $x^2=k^2+2kv+v^2 =(-k^2+v^2) +2kx$. Nach (3.15) ist $N(x)=k^2-v^2$ und $k=<1,x>$, also $x^2=-N(x)+2<1,x>x$.
Bew.(ii): Da jede KA konisch ist, ist mit (3.12) auch jede KA konisch bezüglich der induzierten Norm N: $\mathcal{S}=\mathcal{NT}$.
Bew.(iii): $\mathcal{S}=\{x\in \mathcal{A} \mid N(x)=0\}$. Aus (i) folgt: $N(x)=0 \Leftrightarrow k^2=v^2 \Leftrightarrow x^2=2<1,x>x$; wäre $x \in K-\{0\}$, so würde aus der letzten Gleichung $x^2=0$, also $x=0$ (wegen $x\in K$) folgen ➔ Widerspruch zu $x\neq 0$. Also ist $x\notin K-\{0\}$. Zusammen haben wir: $N(x) =0 \Leftrightarrow x^2=2<1,x>x$ und $x\notin K-\{0\}$, d.h. $\mathcal{S}$ **= {x** $\in \mathcal{A}$ **|** $x^2 \in Kx$, $x \notin K-\{0\}$**}.** •

3.4 Die Dimension einer regulären AMN

Da die kinematischen Algebren KA für die vollständige Klassifikation aller AMN eine Rolle spielen, bestimmen wir sie nun vorab gemäß dem Vorgehen in [Lü77].

Zum Beweis des Satzes (3.20) vorab ein paar Hilfssätze: In Anlehnung an die IA-Eigenschaft führen wir in einer AMN $\mathcal{A} =K \oplus\mathcal{V}$ die lineare Abbildung „*“ durch

(3.17a) **DEF.:** $x= \xi+v \rightarrow x^* :=\xi-v$ ($\xi\in K$, $v\in\mathcal{V}$) "Fastinvolution".

ein; dann gilt für $x,y,z\in \mathcal{A}$:

(3.17b) (i) $x^{**} = x$,
(ii) $z^*=z \Leftrightarrow z\in K$ und $z^*=-z \Leftrightarrow z \in \mathcal{V}$
(iii) $xx^* = x^*x = N(x) +\mathbf{r}(x) =N(x^*) +\mathbf{r}(x^*)$ für alle $x\in \mathcal{A}$,
(iv) $x\in \mathcal{S}$ ➔ $xx^*=x^*x = \mathbf{r}(x) \in RadN$,
(v) $xy^*+yx^* = 2<x,y> +2\mathbf{s}(x,y) \in K+RadN$,
wobei $\mathbf{r}$: $\mathcal{A}\rightarrow RadN$ und $\mathbf{s}$: $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\rightarrow RadN$ die in (2.25) eingeführten Formen sind und durch $\mathbf{r}(x):=\mathbf{r}(u)$, $\mathbf{s}(x,y):=\mathbf{s}(u,v)$ ($x=\xi+u$, $y=\eta+v$, $\xi,\eta\in K$, $u,v\in\mathcal{V}$) der Definitionsbereich von $\mathcal{V}$ auf ganz $\mathcal{A}$ erweitert wurde.

Bew. (i) & (ii) ergibt sich aus der Definition. (iii): $xx^*= (\xi+v)(\xi-v)=\xi^2-v^2=\xi^2+N(v)+\mathbf{r}(v)=N(x)+\mathbf{r}(x)= \xi^2-v^2=(\xi-v)(\xi+v)=x^*x$. Und $N(x^*)=N(\xi-v)=\xi^2+N(v)=N(\xi+v)=N(x)$. (iv) und (v) folgt aus der Grundformel (2.25) und aus (iii). •

Bemerkung: Die lineare Abbildung $*:\mathcal{A}\rightarrow \mathcal{A}$ ist i.allg. *keine* Involution im Sinne von Def. (3.1). Da sie aber bei Faktorisierung nach dem Normradikal (vgl. Kap. 4) in eine Involution übergeht nennen wir sie vorübergehend die mit der AMN verbundene "Fastinvolution".

(3.17c) In jeder AMN gilt: (i) $u,v \in\mathcal{V}$ ➔ uv und vu $\perp$u und $\perp$v
(ii) $u,v \in\mathcal{V}$ und $u\perp v$ ➔ uv, vu $\in\mathcal{V}$

Bew. (i): $u,v \in\mathcal{V}$ ➔ $<uv,u>=<vu,u>=N(u)<v,1>=0$ ➔ uv und vu $\perp$ u. Genau so: uv und vu $\perp$v
Bew. (ii): $u,v\in\mathcal{V}$ und $u\perp v$ ➔$_{(3.17b)}$ $uv^*+vu^* = -uv-vu =2<u,v> + 2s(u,v)=2s(u,v)$; also gilt: (*) $-uv =vu+2s(u,v)$. Andererseits folgt aus (3.17b.v) ➔ (**) $(uv)^* =vu+2s(u,v)$. (*) und (**) ➔ $(uv)^* = -(uv)$ ➔$_{(3.17b.ii)}$ $uv\in\mathcal{V}$. Genauso $vu\in\mathcal{V}$. •

(3.18) In jeder KA gilt:
(i) Aus $x\in\mathcal{U}$ folgt für das orthogonale Supplement $x^{\perp} = x\mathcal{V} = \mathcal{V}x$ und $\mathcal{A} = Kx\oplus x^{\perp}$, $RadN\subseteq x^{\perp}$
(ii) Ist $T :=Ka+Kb$ 2-dimensionaler Teilraum mit $a,b\in\mathcal{U}$, so gilt $T^{\perp}=a\mathcal{V}\cap b\mathcal{V} =\mathcal{V}a\cap\mathcal{V}b$ mit $RadN\subseteq T^{\perp}$

Bew. **(i):** $y \in x^{\perp} \Leftrightarrow <x,y>=0$. (a) $v \in \mathcal{V} \rightarrow 0=<1,v>=N(x)<1,v>=<x,xv>=<x,vx> \rightarrow x\mathcal{V}, \mathcal{V}x \subseteq x^{\perp}$. (b) Sei $x \in \mathcal{U}$, also $N(x)\neq 0$, und $y \in x^{\perp}$; setze $z := yx^{-1}$, dann: $0= <x,y>=<x,zx>=N(x)<1,z> \rightarrow_{N(x)\neq 0} <1,z>=0 \rightarrow z= yx^{-1} \in \mathcal{V} \rightarrow y \in \mathcal{V}x \rightarrow x^{\perp} \subseteq \mathcal{V}x$. Genau so $x^{\perp} \subseteq x\mathcal{V}$, wenn man $z= x^{-1}y$ setzt. (a), (b) zusammen: $x^{\perp} = x\mathcal{V} = \mathcal{V}x$. Aus $N(x)\neq 0$ folgt noch $x \notin x^{\perp}$, also $\mathcal{A} = Kx \oplus x^{\perp}$. $RadN \subseteq x^{\perp}$ ist klar.
Bew.**(ii):** Folgt aus (i), sowie $y \in T^{\perp} \Leftrightarrow 0=<\lambda a+\mu b, y> \ \forall \lambda,\mu \in K \Leftrightarrow y \perp a \ \& \ y \perp b$.

(3.19) In jeder KA gilt: Der "Zentralisator" $Z(u) := \{y \in \mathcal{U} \mid \exists \lambda \in K-\{0\}: uy \in \lambda yu \}$ eines Elements $u \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$, ist gleich $(G(u) \cup G^{\perp}(u)) \cap \mathcal{U}$ mit $G(u):= K+Ku$

Bew.: $y \in Z(v) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K : uy = \lambda yu$. Aus $N(uy)=N(yu)\neq 0$ folgt $\lambda^2=1$, also $(\lambda-1)(\lambda+1)=0$, d.h. für $charK\neq 2$ zwei verschiedene Lösungen $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. Mit der Zerlegung $y=\eta+v$ ($\eta \in K$, $v \in \mathcal{V}$) rechnet man für λ_1**=+1** aus: $0=uy-yu = uv-vu= uv-(uv)^* \rightarrow uv=\mu \in K$ $\rightarrow$
$y=\eta+(\mu/N(u))u \in K+Ku=G(u)$. Für λ_2**=-1**: $0=uy+yu=2\eta u+uv+vu=2\eta u + 2<u,v> \rightarrow \eta=0$ und $<u,v>=0 \rightarrow y \in \mathcal{V}$ und $y \perp u \rightarrow y \in G^{\perp}(u)$. •

(3.20) **Satz**: Eine KA ($\mathcal{A}$,K,N) $\dim_K RadN \leq \dim_K \mathcal{A} - 3$ ist regulär (RadN={0}) und von der Dimension 1, 2 oder 4 über dem Körper K.

Bew.: Die KAs bis zur Dimension 4 kann man ausrechnen (vgl. nächster §). Wir nehmen daher an ($\mathcal{A}$,K,N) sei eine IA mit (i) $\dim \mathcal{A} = n \geq 4$ und $\dim RadN \leq n-3$ und wollen $\dim_K \mathcal{A} =4$ zeigen. Wegen (i) gibt es in $\mathcal{V}$ zwei orthogonale Einheiten: (ii) a, b $\in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$, $a \perp b$, und aus (3.25) folgt, (iii) $c:=ab=-ba \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ ist eine weitere zu a und b orthogonale Einheit in $\mathcal{V}$. Mit (3.16.i) gilt also $a^2,b^2,c^2 \in K-\{0\}$; setze zur Abkürzung (iv) $\alpha:=a^2=-N(a)$, $\beta:=b^2=-N(b) \rightarrow c^2=-N(c)=\alpha\beta$. Sei (v) **H:=Ka+Kb**; **G:=K+Kc**. Aus (3.18.ii) folgt: (vi) $H^{\perp} = a\mathcal{V} \cap b\mathcal{V} = \mathcal{V}a \cap \mathcal{V}b$ und $G^{\perp} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}c = \mathcal{V} \cap c\mathcal{V}$. Nach Konstruktion von c gilt (vii) $G \subseteq H^{\perp}$; wir wollen $H^{\perp} = G$ zeigen. Sei $y \in H^{\perp} \cap \mathcal{U}$ beliebig. Aus (ii) bis (iii) folgt $ya \in H^{\perp}a = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}c = G^{\perp}$, $yb \in H^{\perp}b = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}c = G^{\perp}$ und damit: (viii) $ya, yb \in \mathcal{V}$, also mit (iv) und der Abkürzung $\nu:=-N(y)$: $(ya)^2=-N(ya)=\nu\alpha \in K$, $(yb)^2=-N(yb)=\nu\beta \in K$ und daraus errechnet man: $cy = +yc$, d.h. $y \in Z(c)= (G \cup G^{\perp}) \cap \mathcal{U}$. Aus dem Beweis zu (3.19) ergibt sich, dass y in G (und nicht in $G^{\perp}$) liegt $\rightarrow H^{\perp} \subseteq G$, also mit (vii): $\mathbf{H^{\perp}=G}$, 2-dimensional, daher $\mathcal{A} = H+H^{\perp}$ 4-dimensional. Da dann $\dim \mathcal{V}=3$ und $a,b,c \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ Basis von $\mathcal{V}$ aus orthogonalen Einheiten ist, folgt RadN={0}. •

Anmerkung: Die nicht-regulären KAs (RadN≠{0}) – also die „geschlitzten" und die „total ausgearteten" KAs (vgl. (2.21)) – können beliebige Dimension haben. Sie sind in [Lü77] ebenfalls bestimmt worden. Wir geben diese Klassifikation hier nicht weiter an, da sie in der in Kap.5 und 6 vorgenommenen Klassifikation der AMNs aufgeht.

3.5 Bestimmung aller KA der Dimension ≤ 4 (für K=ℝ)

Für K= ℝ (reelle Zahlen) gibt es 12 nichtisomorphe Typen von kinematischen Algebren (KA), darunter reguläre nur zwei der Dimension 2 und zwei der Dimension 4. Die 12 KA-Typen wurden in [Lü77] für K= ℝ berechnet und geometrisch ausgewertet. Um Beispiele für später parat zu haben, listen wir alle KAs der Dimension ≤ 4 in der folgenden Tabelle auf.

Tabelle 3.5: Die KAs der Dimension ≤ 4 über K=ℝ

Typ Nr.	dim $\mathcal{A}$	dim RadN	Multiplikations-tabelle in einer geeigneten Orthogonalbasis $\{1,e_i\}$, $e_i \in \mathcal{V}$	Norm für $x=\xi_0+\sum\xi_i e_i$ und Nullkonus $\mathcal{S}$	Ideale (≠{0}, ≠$\mathcal{A}$), RadN, Ausartungstyp	Namen für die Algebra
1	1	0	-	$N(x)=\xi_0^2$, $\mathcal{S}=\{0\}$	keine, RadN={0}, reguläre, **einfache** AMN	$\mathcal{A}$= ℝ, (Trivialfall)
2	2	0	$e_1 = i \notin$ ℝ, $i^2=-1$	$N(x) = \xi_0^2+\xi_1^2$, $\mathcal{S}=\{0\}$	keine, RadN={0}, reguläre, **einfache** AMN	$\mathcal{A}$ = ℂ = ℝ + ℝi, komplexe Zahlen ("elliptische IA")
3	2	0	$e_1 = j \notin$ ℝ, $j^2=+1$	$N(x) = \xi_0^2-\xi_1^2$, $\mathcal{S}$= ℝ(1+j)+ ℝ(1-j)	Mit $f:= 1+e_1$, $g:= 1-e_1$: ℝf, ℝg Zweiseitideale, RadN={0} reguläre nicht-einfache, halbeinfache AMN	$\mathcal{A}$ = A= ℝ + ℝj = ℝf+ ℝg, "anomal-komplexe Zahlen" ("hyperbolische IA")

Typ Nr.	dim $\mathcal{A}$	dim RadN	Multiplikations-tabelle in einer geeigneten Ortho-gonalbasis $\{1,e_i\}$, $e_i \in \mathcal{V}$	Norm für $x=\xi_0+\sum\xi_i e_i$ und Nullkonus $\mathcal{S}$	Ideale ($\neq\{0\}$, $\neq\mathcal{A}$), RadN, Ausartungstyp	Namen für die Algebra
4	2	1	$e_1=\varepsilon\notin\mathbb{R}$, $\varepsilon^2=0$	$N(x)=\xi_0^2$, $\mathcal{S}=\mathbb{R}\varepsilon$ =RadN	$\mathbb{R}\varepsilon$ =RadN = $\mathcal{V}$ total ausgeartete, nicht-halbeinfache AMN	$\mathcal{A}=\mathbb{D}=\mathbb{R}+\mathbb{R}\varepsilon$, "Dualzahlen" ("parabolische KA")
5	3	0	*gibt es nicht*	-	-	-
6	3	1	$e_1^2=1$, $e_2^2=0$, $e_1e_2=-e_2e_1=e_2$	$N(x)=\xi_0^2-\xi_1^2$, $\mathcal{S}=(\mathbb{R}f+\mathbb{R}e_2)\cup(\mathbb{R}g+\mathbb{R}e_2)$	Mit $f:=1+e_1$, $g:=1-e_1$: Linksideale: $\mathbb{R}f$, $\mathbb{R}g+\mathbb{R}e_2$; Rechtideale: $\mathbb{R}g$, $\mathbb{R}f+\mathbb{R}e_2$; Zweiseitideal: $\mathbb{R}e_2$ =RadN, nicht-halbeinfache AMN	$\mathcal{A}\sim Ht^3(\mathbb{R})$, "Homothetiealgebra" ("geschlitzte KA")
7	3	2	$e_1^2=e_2^2=e_1e_2=-e_2e_1=0$	$N(x)=\xi_0^2$, $\mathcal{S}$ = RadN= $\mathcal{V}$	$\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2$ =RadN = $\mathcal{V}$ total ausgeartete, nicht-halbeinfache AMN	"Translationsalgebra"
8	4	0	$e_1^2=e_2^2=-e_3^2=1$, $e_1e_2=e_3$, $e_2e_3=-e_1$, $e_3e_1=-e_2$; $e_ie_k=-e_ke_i$ ($i\neq k=1,2,3$)	$N(x)=\xi_0^2-\xi_1^2-\xi_2^2+\xi_3^2$; $\mathcal{S}=\cup$ aller Linksid. $=\cup$ aller Rechtsid.	Mit **n**:=$1+e_1$ fest, $a\in\mathcal{U}$ beliebig: L(a) :=$\mathcal{A}$**na** Linksideale, R(a) :=**an**$\mathcal{A}$ Rechtsideale; keine Zweiseitideale; RadN=$\{0\}$; reguläre, **einfache** AMN	$\mathcal{A}\sim L(2,\mathbb{R})$, reelle 2x2-Matrizen ("hyperbolische IA")
9	4	0	$e_i^2=-1$ ($i=1,2,3$), $e_ie_k=e_r$. i,k,r=zykl.1,2,3; $e_ie_k=-e_ke_i$ ($i\neq k$)	$N(x)=\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$; $\mathcal{S}=\emptyset$	keine, RadN=$\{0\}$ reguläre, **einfache** AMN	$\mathcal{A}\sim Q(\mathbb{R})$, Schiefkörper der Hamiltonquaternio-nen ("elliptische IA")
10	4	1	*gibt es nicht*	-	-	-
11	4	2	$e_1^2=-1$, $e_2^2=e_3^2=0$ $e_1e_2=e_3$, $e_2e_3=0$, $e_3e_1=+e_2$ $e_ie_k=-e_ke_i$ ($i\neq k$)	$N(x)=\xi_0^2+\xi_1^2$, $\mathcal{S}=\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2$ =RadN	$\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2$ =RadN geschlitzte AMN (nicht-halbeinfach)	$\mathcal{A}\sim qEl^4(\mathbb{R})$, "quasiellip-tische IA" ("geschlitzte KA")
12	4	2	$e_1^2=+1$, $e_2^2=e_3^2=0$ $e_1e_2=e_3$, $e_2e_3=0$, $e_3e_1=-e_2$ $e_ie_k=-e_ke_i$ ($i\neq k$)	$N(x)=\xi_0^2-\xi_1^2$ $\mathcal{S}=(\mathbb{R}f$+RadN) $\cup(\mathbb{R}g$+RadN)	Mit $f:=1+e_1$, $g:=1-e_1$: Linksideale: $\mathbb{R}f$, $\mathbb{R}g+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$; Rechtsideale: $\mathbb{R}g$, $\mathbb{R}f+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$; Weitere Links- bzw. Rechts-ideale ergeben sich daraus wie in Typ 4 durch Multiplikation von rechts bzw. von links mit beliebigem $a\in\mathcal{U}$ Zweiseitideal: $\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$=RadN	$\mathcal{A}\sim qHy^4(\mathbb{R})$, "quasihyperbolische IA" ("Minkowski KA"); geschlitzte AMN (nicht-halbeinfach)
13	4	2	$e_1^2=1$, $e_2^2=e_3^2=0$, $e_1e_2=e_2$, $e_2e_3=0$ $e_3e_1=-e_3$ $e_ie_k=-e_ke_i$ ($i\neq k$)	$N(x)=\xi_0^2-\xi_1^2$, $\mathcal{S}=(\mathbb{R}f$+RadN) $\cup(\mathbb{R}g$+RadN)	Mit $f:=1+e_1$, $g:=1-e_1$: Linksideale: $\mathbb{R}f$, $\mathbb{R}g+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$; Rechtsideale: $\mathbb{R}g$, $\mathbb{R}f+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$; Weitere Links- bzw. Rechts-ideale ergeben sich daraus wie in Typ 4 durch Multiplikation von rechts bzw. von links mit beliebigem $a\in\mathcal{U}$ Zweiseitideal: $\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$=RadN	$\mathcal{A}\sim Ht^4(\mathbb{R})$ "Homothetie-algebra", geschlitzte AMN (nicht-halbeinfach)
14	4	3	$e_ie_k=0$ ($i,k=1,2,3$)	$N(x)=\xi_0^2$, $\mathcal{S}$=RadN	$\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$=RadN total ausgeartete, nicht-halbeinfache AMN	"Translationsalgebra"

(3.21) **Bemerkung**: Tabelle 3.5 gilt statt für K= $\mathbb{R}$ auch für beliebige separable Körper K mit char$K\neq 2$, mit folgenden Ausnahmen:

(i) Der Typ **2**
- fällt entweder weg, falls K Zerfällungskörper für alle Polynome $p\in K[X]$ ist, also keine endliche algebraische Körpererweiterung mehr gestattet,
- oder "$\mathscr{A} \sim \mathbb{C}$" ist zu ersetzen durch "$\mathscr{A} \sim K(i)=K+Ki$" Körpererweiterung), wobei $i^2=-N(i)\in K$ i.allg. nicht auf -1 normierbar ist.

(ii) Im Typ **9** ist "$Q(\mathbb{R})$" durch eine *verallgemeinerte* Quaternionenalgebra Q(K) zu ersetzen, die (körper- und normabhängig) nicht notwendig Schiefkörper ist, sondern Nullteiler haben kann.

Dokumentenkontrolle

Datum Vers.	Bemerkung / Maßnahme (Aktuelles oben!)
22.12.07 V2.0	kl.Ergänzung bei (3.17b) wegen der Änderung in (2.25); „voll ausgea.“ weg. Korr. in der Tabelle: Eine KA mit RadN≠{0} ist immer nicht-halbeinfach!
19.12.07 V2.0	Doku.Kontrolle wieder angefügt. Spellcheck. Fertig zum Druck.
21.11.07 V0.6	Nach Klärung „KA“ = „IA“ überall „KA oder IA“ durch „KA“ ersetzt
08.10.03 V06	KapNr von 3 Referenznummern angepasst & i.d. Beweisen korrigiert.
06.10.03 V0.6	Bew. des Hauptsatzes über KA/IA sauber gemacht. Einleitung gekürzt.
03.10.03 V0.6	Tabelle der IA /KA bis Dimension 4
27.09.03 V0.6	Ab jetzt ist dieses Kap 3 nur noch für IA+KA!!!!!!! Der Rest ist in Kap.4
14.09.2003 V0.5	Neues über **Symmetrisierung** allgemeiner AMNs: Neben <,>, N, RadN, $\mathscr{S}$(N) (alt) und s, r, radr, σr (s:$\mathscr{A}$x$\mathscr{A}$ → RadN, r:$\mathscr{A}$→RadN) ➔Einführung von g, n, radn, σn (das ist neu) durch $g(x,y) := {}^1/_2(xy^*+yx^*) = <x,y> + s(x,y)$ und $n(x) := N(x) + r(x)$ also g = [<,> + s] : $\mathscr{A}$x$\mathscr{A}$ → K+RadN, n = [N + r] : $\mathscr{A}$ → K+RadN sowie **radn**:={x∈$\mathscr{A}$ | g(x,y)=0 ∀y∈$\mathscr{A}$}, **σn**:={ x∈$\mathscr{A}$ | n(x)=0} Damit schreibt sich **x² = -n(x) -2g(1,x)x** für alle x∈$\mathscr{A}$ einer allgemeinen AMN, genannt: "AMN-Formel". Das ist eine ***symmetrische*** Erweiterung der Kinematik-Formel x² =-N(x) + 2<1,x>x für KAs. **Hinweis zur Momentanen Fragestellung:** Die Bestimmung aller halbeinfachen AMNs ist mit Übergang zu $\mathscr{A}/\mathcal{R}_A$ abgeschlossen. Es geht um die Bestimmung aller **nicht-halbeinfachen** AMNs. Wir wissen wir schon, dass für jede AMN $\mathcal{R}_A$ ⊆ RadN gilt, und dass speziell für KAs $\mathcal{R}_A$ = RadN gilt. Im Fall, dass $\mathscr{A}/\mathcal{R}_A$ nicht nur halbeinfach, sondern **einfach** ist, was RadN = $\mathcal{R}_A$ bedeutet (!!), ist $\mathcal{R}_A$ =RadN das **einzige** 2-Seitideal in $\mathscr{A}$, und wir können ausnutzen, dass $\mathcal{R}_A$ **nilpotent** ist. Dann erhebt sich die Frage ob es wenigstens eine **Teilalgebra** T mit $\mathscr{A}$ = T + $\mathcal{R}_A$ (nicht notwendig direkte Summe!) gibt. Vermutung: Wenn $\mathscr{A}/\mathcal{R}_A$ einfach und *nichttrivial* ist, also isomorph zu L(2,K) (oder Q(K)) (und nicht nur isomorph zu K oder einem Erweiterungskörper, z.B. ∀ im Fall K= ℝ) ist, dann ist $\mathscr{A}$ "so ähnlich" wie L(2,𝔻), mit $\mathcal{R}_A$ = eL(2,K) (e≠K, e²=0). Die gesuchte Teilalgebra T wäre dann "so ähnlich wie" L(2,K). Speziell interessieren folgende "Schlüsselmengen": - Das Nilpotente Teilideal S($\mathscr{A}$) ⊆ $\mathcal{R}_A$ mit Nilindex 2, d.h. S²={0}, wo xy=0 ∀x,y∈S($\mathscr{A}$) gilt. - Die Menge M($\mathscr{A}$):={x∈$\mathscr{A}$ | x²∈K, x∉K\{0} } - Die Menge V(r):={x∈$\mathscr{A}$ | s(1,x)=0} (trivial! =$\mathscr{A}$ s(1,x)=0 ∀x) - Die Menge V(n):= {x∈$\mathscr{A}$ | g(1,x)=0} (trivial! =$\mathscr{V}$($\mathscr{A}$) wegen s(1,x)=0 ∀x) (Vermutung: M($\mathscr{A}$)=V(n))
09.09.2003 V0.4	Sätze über Lieklammern weiter ergänzt.
06.06.2003 V0.4	Rechenfehler vom 3.6.03 korrigiert. Einführung von radr, σr und Invarianzen
03.06.2003 V0.4	Satz über die **LIE**-Klammer bei allgemeiner AMN zugefügt! Satz **s**: $\mathscr{A}$x$\mathscr{A}$→RadN ist symm. K-Blf mit quadr. Form **r**:$\mathscr{A}$→RadN. s(x,x)=r(x)
24.05.2003 V0.4	paar weitere Zeichen korrigiert
31.01.2000 V0.4	Einleitung zu KA rückgängig gemacht.
21.01.2000 V0.3	„fast-kinematische“ Algebren. Einleitung zu KA geändert
06.01.2000 V0.3	Zeichen teilweise korrigiert
19.12.1998 V0.2	nach Word konvertiert. Zeichen noch zu korrigieren
28.05.1995 V0.2	letzte inhaltliche Änderung