Kapitel 2 – Grundformeln

Version: V2.0 vom 22.12.07

Inhaltsverzeichnis

1 Definition "AMN" und Grundformeln

(2.1) **DEF.:** Das Tripel ($\mathscr{A}$, K, N) heißt eine AMN - "**Algebra mit multiplikativer Norm**" (AMN) - wenn gilt:

(AMN1) $\mathscr{A}$ ist assoziative Algebra **mit Eins** über dem kommutativen Körper K mit char$K \neq 2$. Schreibweise: K sei in $\mathscr{A}$ eingebettet, d.h. die Null 0 bzw. die Eins 1 von K ist auch die von $\mathscr{A}$.
(Zunächst wird nichts weiter über K vorausgesetzt. Erst in Kap.6 setzen wir zusätzlich voraus, dass K nur separable Körpererweiterungen gestattet.)

(AMN2) $\mathscr{A}$ ist **endlichdimensional** : **$[\mathscr{A}:K]<\infty$.** Den Trivialfall, $[\mathscr{A}:K]=1$ schließen wir i.allg. nicht aus.

(AMN3) N: $\mathscr{A}\to K$ ist eine *nicht identisch verschwindende* **multiplikative quadratische Form** $N(x)=\langle x,x\rangle$ ("Norm"): **$N(xy)=N(x)N(y)$** für alle $x,y \in \mathscr{A}$.

1.1 Grundformeln und Erläuterungen

Die zu N gehörige symmetrische K-Bilinearform $\langle,\rangle$: $\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to$ **K**

(2.3) $2\langle x,y\rangle = N(x+y)-N(x)-N(y)$ heißt auch **Skalarprodukt** mit

(2.3a) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$, $\alpha\langle x,y\rangle=\langle \alpha x,y\rangle=\langle x,\alpha y\rangle$, $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$
für alle $\alpha\in K$, $x,y,z\in\mathscr{A}$

Bem.: (2.3), (2.3a) gelten nach Definition für "symmetrische K-Bilinearform".

(2.4) x ,y heißen **orthogonal**, in Zeichen **$x \perp y$**, wenn $\langle x,y\rangle=0$ ist

(2.5) $N(1) = 1$

Denn da $N\neq 0$ ist, gibt es $y\in\mathscr{A}$ mit $0\neq N(y)=N(1.y)=N(1).N(y)$, also $N(1)=1$.

(2.6) $N(x^{-1})=(N(x))^{-1}$ (für invertierbare Elemente x)

Denn $1=N(1)=N(xx^{-1})=N(x)N(x^{-1})$, also ist $N(x^{-1})=(N(x))^{-1}$.

(2.7) $\langle zx,zy\rangle=\langle xz,yz\rangle=N(z)\langle x,y\rangle$,

folgt aus der Multiplikativität von N und aus (2.3)

Die folgende Identität ist weittragend:

$$\boxed{(2.8)\qquad \langle ac,bd\rangle+\langle bc,ad\rangle = 2\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle \quad \text{für alle } a,b,c,d\in\mathscr{A}}$$

Beweis: Bilde $F(t;a,b,c,d) :=N(a+tb)N(c+td) -N((a+tb)(c+td))$ in der Variablen $t\in K$ mit beliebigen Konstanten $a,b,c,d \in\mathscr{A}$. F soll ja wegen der Multiplikativität für alle $t\in K$ verschwinden. $F = (N(a)+2t\langle a,b\rangle+t^2N(b))(N(c)+2t\langle c,d\rangle+t^2N(d)) -N(ac+tbc+tad+t^2bd)$. Klammert man weiter aus, bekommt man ein Polynom 4. Grades $F =t^4A_4 +t^3A_3 +t^2A_2 +tA_1 +A_0$ mit Koeffizienten $A_i \in K$. Aus (2.3) - (2.7) folgt bereits $A_0 =A_1 =A_3 =A_4 =0$, also $F =t^2A_2$. Wegen F=0 für alle t also auch $A_2 =0$, woraus die Behauptung folgt. (Bemerkung: char$K\neq 2$ wurde vorausgesetzt). •

Aus (2.8) lassen sich viele nützliche Spezialformeln ableiten. Hier nur eine, die im nächsten Paragraphen gebraucht wird:

(2.8a) $N(v) = -\langle 1,v^2\rangle$ für alle $v \in\mathscr{V}$

Folgt aus (2.8) für $v:=a=c \perp 1$, $b=d=1$

1.2 Definition der "geometrischen Stücke" von $\mathscr{A}$

(2.9) $\mathscr{U}(A) := \{a \in A \mid a^{-1}$ existiert$\}$ heiße Gruppe der Einheiten von A

(2.10) $\mathscr{NT}(A) := \{x \in A \mid$ es gibt $y \neq 0$ mit $xy=0$ oder $yx=0\}$ heiße die Menge der **Nullteiler**

(2.11) $\mathscr{S}(N) := \{x \in \mathscr{A} \mid N(x)=0\}$ heiße sei der "**Nullkegel**" oder "Nullkonus"

(2.12) $\mathscr{P}(N) := \{x \in \mathscr{A} \mid N(x) \neq 0\}$ heiße die Menge der "**N-regulären**" Elemente

(2.13) $\mathscr{V}(N) := \{x \in \mathscr{A} \mid \langle 1,x\rangle = 0\}$ das zu **1 orthogonale Supplement**

(2.14) $\mathrm{RadN} := \{r \in \mathscr{A} \mid \langle r,x\rangle = 0 \ \forall\, x \in \mathscr{A}\}$ heiße das "**Normradikal**" der AMN

Einfache Folgerungen:

(2.15) $\mathscr{A} = \mathscr{U} \cup \mathscr{NT}$, $\mathscr{U} \cap \mathscr{NT} = \emptyset$

Bew.: Aus $[\mathscr{A}:K] < \infty$ folgt, dass, wenn a kein Linksnullteiler ist, die durch $x \to ax$ vermittelte lineare Abbildung $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ ein Vektorraumisomorphismus und daher die Eins Bild eines a' ist: aa'=1. Ferner a= 1.a =(aa')a =a(a'a) ➔ a'a =1, also a' Inverses von a. D.h. jeder Nicht-Linksnullteiler ist invertierbar. Ähnlich folgt aus $[\mathscr{A}:K] < \infty$, dass jeder Rechtsnullteiler auch Linksnullteiler ist. •

(2.16) $\mathscr{A} = \mathscr{P} \cup \mathscr{S}$, $\mathscr{P} \cap \mathscr{S} = \emptyset$

Denn entweder $N(x) \neq 0$ oder $N(x)=0$ für alle $x \in \mathscr{A}$.

(2.17) (i) $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}$, (ii) $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{NT}$

Bew.: $x \in \mathscr{U}$ ➔ $1=N(1)=N(xx^{-1})=N(x)N(x^{-1}) \neq 0$ ➔ $N(x) \neq 0$, $N(x^{-1}) \neq 0$ ➔ $x, x^{-1} \in \mathscr{P}$ ➔(i). Und aus (2.15), (2.16) folgt (ii).

(2.17a) DEF: Für $N(a)=1$ heißt $L_a : x \to L_a(x) := ax$ eine "Linksschiebung" und $R_a : x \to R_a(x) := xa$ eine "Rechtsschiebung".

(2.17b) (i) Der Übergang $x \to x^{-1}$ ($x \in \mathscr{U}$) erhält die Orthogonalität.
(ii) Ist $u \in \mathscr{V} \cap \mathscr{U}$, so auch $u^{-1} \in \mathscr{V} \cap \mathscr{U}$.
(iii) Orthogonalität bleibt bei Links- und Rechtsschiebungen erhalten, d.h. mit $x \in \mathscr{U}$ gilt: $a \perp b \Leftrightarrow ax \perp bx \Leftrightarrow xa \perp xb$

Bew.: (i) Sei $x,y \in \mathscr{U}$ und $\langle x,y\rangle$. Mit (2.7) folgt: $0=N(x^{-1})\langle x,y\rangle N(y^{-1}) = \langle x^{-1}x\, y^{-1}, x^{-1}y\, y^{-1}\rangle = \langle y^{-1}, x^{-1}\rangle$. (ii) Daraus folgt für $x \in \mathscr{V}$: $0=\langle 1,x\rangle=\langle 1^{-1},x^{-1}\rangle=\langle 1,x^{-1}\rangle$ ➔ $x^{-1} \in \mathscr{V}$. (iii) folgt aus (2.7). •

(2.18) $\mathscr{A} = K \oplus \mathscr{V}$

Bew.: Wegen $\langle 1,1\rangle \neq 0$ ist $K+\mathscr{V}$ *direkte* Summe. Wegen $[\mathscr{A}:K] < \infty$ spannt $K+\mathscr{V}$ spannt ganz $\mathscr{A}$ auf. •

Mit der Zerlegung $\mathscr{A}=K \oplus \mathscr{V}$ schreibt sich jedes $x \in \mathscr{A}$ eindeutig in der Form

(2.19) $x = \xi + v$ ($\xi \in K$, $v \in \mathscr{V}$)

(2.20) **Satz:** RadN ist ein in $\mathscr{V} \cap \mathscr{S}$ enthaltenes Zweiseitideal von $\mathscr{A}$.

Bew.: (i) RadN ist wegen der K-Bilinearität von $\langle , \rangle$ linearer Teilraum. $x \in \mathrm{RadN}$ ➔ $\langle x,x\rangle = N(x) = 0$ und $\langle x,1\rangle = 0$, also $\mathrm{RadN} \subseteq \mathscr{V} \cap \mathscr{S}$.
(ii) Aus (2.8) folgt für d=1: (*) $\langle ac,b\rangle = 2\langle a,b\rangle\langle c,1\rangle - \langle a,bc\rangle$ für alle $a,b,c \in \mathscr{A}$. Ist $a \in \mathrm{RadN}$, dann ist die rechte Seite in (*) gleich 0, also auch die linke (**) $\langle ac,b\rangle = 0$ für alle $c,b \in \mathscr{A}$, d.h. mit $a \in \mathrm{RadN}$ ist auch $ac \in \mathrm{RadN}$ (Rechtsidealeigenschaft); wenn man die Rollen von a und c vertauscht, folgt auch $ca \in \mathrm{RadN}$ (Linksidealeigenschaft). Also ist RadN ein 2-seitiges Ideal. •

(2.21) **DEF.**: Wir nennen die Norm N bzw. die AMN

"**nicht ausgeartet**" oder "**regulär**", wenn $\mathrm{RadN}=\{0\}$ ist,
"ausgeartet vom Grad r", wenn $\dim \mathrm{RadN} = r > 0$ ist,
"**geschlitzt**", wenn $\dim \mathrm{RadN} = \dim\mathcal{A} - 2$ ist,
"total ausgeartet", wenn $\mathrm{RadN} = \mathcal{V}$ ist.

(2.22) $v^2 \in K+\mathrm{RadN}$ für alle $v\in\mathcal{V}$

Bew.: Aus (2.8) folgt für $a=1$ und $b=d:=v\in\mathcal{V}$, $c\in\mathcal{V}$ zusammen mit (2.7): $\langle c,v^2\rangle=0$ ➔ v^2 ist $\perp$ zu allen Vektoren in $\mathcal{V}$➔v^2 kann daher nur je eine Komponente in **K** und RadN haben ➔ Behauptung. •

Aus (2.22) ergibt sich zusammen mit der Zerlegung (2.21) sofort

(2.23) **Satz: $x^2 \in K + Kx + \mathrm{Rad(N)}$ für alle $x\in\mathcal{A}$**

(2.24) **Korollar**: Ist N *nicht ausgeartet* ($\mathrm{RadN}=\{0\}$), so ist die AMN „***kinematisch***“, d.h. es gilt $\mathbf{x^2 \in K + Kx}$ für alle $x\in\mathcal{A}$.

Da die "kinematischen Algebren" unter den AMN eine besondere Rolle spielen, werden sie in Kap.3 gesondert behandelt. (Eine AMN kann auch „kinematisch“ sein, wenn $\mathrm{RadN}\neq\{0\}$ ist; vgl. (2.25d).)

Da wir (2.22), (2.23) öfter brauchen, drücken wir die Formeln mit Hilfe der orthogonalen Zerlegung (2.21), der Norm N und einer zusätzlichen symmetrischen Bilinearform $\mathbf{s}:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to \mathrm{RadN}$ aus:

(2.25a) $v^2 = -N(v) - \mathbf{r}(v)$ mit $\mathbf{r}(v)\in\mathrm{RadN}$ $\quad\forall\, v\in\mathcal{V}$

(2.25b) $x^2 = -N(x) + 2\langle 1,x\rangle x - \mathbf{r}(v)$ $\quad\forall\, x=\xi+v$ mit $\xi\in K$, $v\in\mathcal{V}$

(2.25c) $\mathbf{r}: \mathcal{V}\to \mathrm{RadN}$ ist quadratische Form über K, und für die zugehörige symmetrische K-Bilinearform
$\mathbf{s}: \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to \mathrm{RadN}$, $\mathbf{s}(u,v) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}(u+v) - \mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(v))$, gilt
$\mathbf{s}(u,v) = -\langle u,v\rangle - \tfrac{1}{2}(uv+vu)$

(2.25d) Wenn **s** identisch verschwindet, ist $\mathcal{A}$ kinematisch.
Die AMN ist dann im Fall $\mathrm{RadN}\neq\{0\}$ eine *ausgeartete* kinematische Algebra, (Genaueres → Kap. 3, 5 und 6).

Bew. (2.25a,b): Wegen (2.22) und (2.8a) machen wir den Ansatz: (i) $v^2 = -N(v)-r(v)$ mit $r(v)\in\mathrm{RadN}$. (2.25b) ergibt sich daraus mit (2.19), (2.23) und mit dem Ansatz (ii) $x=\xi+v$, (iii) $x^2 = \alpha+\beta x-r(x)$ ($\xi,\alpha,\beta\in K$, $r(x)\in\mathrm{RadN}$): $x^2 =_{(ii)} \xi^2+2\xi v+v^2 =_{(i)} \xi^2-N(v)+2\xi v-r(v) =_{(iii)} \alpha+\beta\xi+\beta v-r(x)$ ➔ (iv) $\xi^2-N(v)-\beta\xi-\alpha = (\beta-2\xi)v+r(v)-r(x)$. Die linke Seite von (iv) ist in K, die rechte in $\mathcal{V}$ ➔ (v) $\alpha=\xi^2-N(v)-\beta\xi$ und (vi) $(\beta-2\xi)v = r(x)-r(v)\in\mathrm{RadN}$.
Fall $v\notin\mathrm{RadN}$: (vi) ➔$\beta=2\xi$ und $r(x)=r(v)$ ➔$_{(v)}$ $\alpha=-N(x)$ ➔$x^2=-N(x)+2\langle 1,x\rangle x-r(v)$ (behauptete Form).
Fall $v\in\mathrm{RadN}$: (i),(ii) ➔$v^2=(x-\xi)^2=x^2-2\xi x+\xi^2=-r(v)\in\mathrm{RadN}$ ➔$x^2 = -\xi^2+2\xi x-r(v) = -N(x)+2\langle 1,x\rangle x-r(v)$ (behauptete Form).
Bew. (2.25c): Es ist (i) $r(v) = -N(v)-v^2$. Sei $u,v\in\mathcal{V}$: $\mathbf{2s(u,v)} := r(u+v)-r(u)-r(v) = -N(u+v)-(u+v)^2+N(u)+u^2+N(v)+v^2 = -N(u)-2\langle u,v\rangle-N(v)-u^2-uv-vu-v^2+N(u)+u^2+N(v)+v^2 = \mathbf{-2\langle u,v\rangle-uv-vu}$; dieser Ausdruck ist symmetrisch und K-bilinear in (u,v).
Bew. (2.25d): Wenn **s** identisch verschwindet, dann auch **r**. Aus (2.25b) folgt dann $x^2\in K+Kx$ für alle x, also $\mathcal{A}$ kinematisch.•

1.3 Zusammenhang zwischen $\mathcal{U}$, $\mathcal{NT}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}$ und RadN

Der allgemeine Zusammenhang zwischen $\mathcal{U}$, $\mathcal{NT}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}$ und RadN wird durch folgendes Schema veranschaulicht. Der interessante Bereich "!!!" ist $\mathcal{P}\cap\mathcal{NT}$**.**

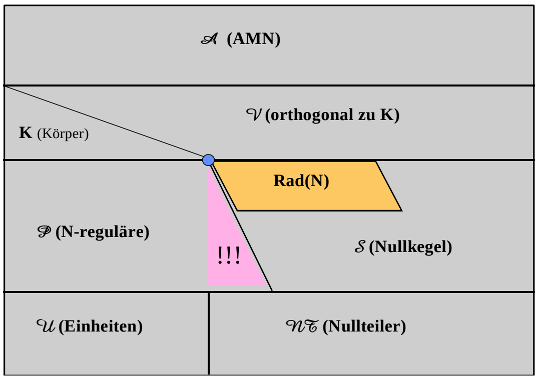

Abbildung 1: AMN- Merkschema

(2.26) **DEF.:** Eine AMN mit $\mathcal{P}\cap\mathcal{NT} = \emptyset$ heißt **konisch ("kAMN")**.

Aus $\mathcal{P}\cap\mathcal{NT} = \emptyset$ folgt wegen (2.16), (2.17): $\mathcal{S} = \mathcal{NT}$, $\mathcal{P} = \mathcal{U}$. Eine konische AMN zeichnet sich dadurch aus, dass alle Nullteiler auf dem Nullkegel liegen, und dass jedes N-reguläre Element eine Einheit ist.

Es gibt nicht-konische AMNs ("nkAMN").

Man kann z.B. eine nkAMN aus einer *einfachen* kAMN ($\mathcal{A}$, K, N, Eins **f**) (z.B. L(2,K), Einheitsmatrix **f**) herstellen, indem man eine zu $\mathcal{A}$ isomorphe K-Algebra $\mathcal{A}'$ nimmt, die Eins von $\mathcal{A}'$ mit **f '** bezeichnet, aber statt der gegebenen Norm die triviale Norm N'=0 nimmt. Sodann betrachte man die direkte Summe $\mathcal{B} := \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}'$ und setze a.a' =0 für alle $a \in \mathcal{A}$, $a' \in \mathcal{A}'$, dann ist **1 := f+f '** die Eins von $\mathcal{B}$, und $\mathcal{B}$ wird zu einer nkAMN, wenn als Norm M:=N⊕N' mit M(a+a') = N(a) $\forall a \in \mathcal{A}$, $a' \in \mathcal{A}'$ genommen wird. M ist trivialer weise multiplikativ.

Alle Involutionsalgebren (vgl. Eigenschaft **IA** in Kap.3) sind konisch bezüglich der durch **IA** induzierten "*kinematischen Norm*" N(x):=xx*. Es gibt aber konische AMNs, die keine Involutionsalgebren sind.

Beispiel: Die Algebra L(2, $\mathbb{D}$) der dualen 2x2-Matrizen über den Dualzahlen $\mathbb{D} = \mathbb{R}+\varepsilon\mathbb{R}$ ($\varepsilon \notin 3$, $\varepsilon^2=0$) aufgefasst als $\mathbb{R}$-Algebra mit Norm N(a+εb):=det(a) für a,b∈L(2,$\mathbb{R}$); N ist trivialer weise multiplikativ. Man kann eine gegebene nicht entartete Involutionsalgebra (RadN = {0}) auch unter Beibehaltung der Dimension zu einer nkAMN machen, wenn sie nicht-einfach ist, indem man den Ausartungsgrad der kinematischen Norm N unter Beibehaltung der Multiplikativität so erhöht, dass RadN' der neuen Norm N' ein maximales Ideal ausfüllt. (Beispiel später).