Algebren mit multiplikativer Norm (AMN)

Christoph Lübbert

Abstract: We present a classification of a certain type of associative, finite-dimensional algebras over a field K where K is of characteristics ≠2 and admits only separable field extensions. The considered algebra type A is defined by the property that A has a quadratic form ("norm") N: A→K with N(xy)=N(x)N(y) for all x,y∈A. A is called "Algebra with multiplicative norm" (AMN). Only the cases where N is non-degenerate have been clarified in the literature ("composition algebra"). Therefore, we want to determine and to construct all *degenerated* AMNs (from non-degenerated ones), i.e. all cases where the "norm radical" RadN:={x∈A | <x,y>=0 for all y∈A} is not {0} (<,> being the symmetric bilinear from belonging to N).

Inhaltsübersicht

Kapitel 1 – Motivation und Zielsetzung

Version: V2.0 vom 21.12.07

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Zielsetzung

1.1 Zur historischen Motivation

Die Algebra L(2,$\mathbb{R}$) der reellen 2x2-Matrizen (oder der Endomorphismen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) hat drei schöne Eigenschaften, die eng miteinander zusammenhängen:

AMN L(2,$\mathbb{R}$) gestattet eine **multiplikative quadratische Form**, nämlich die **Determinante**: det(ab) = deta.detb, wobei <a,b>:=$^1/_2$(det(a+b) -deta -detb) die zugehörige **symmetrische Bilinearform** ist.
(Für L(n, $\mathbb{R}$), n>2, ist **det** leider keine quadratische Form mehr, so dass sich L(n,$\mathbb{R}$) (n>2) nicht mehr als Raum für eine einfache Geometrie eignet).

IA L(2,$\mathbb{R}$) gestattet eine spezielle **Involution zweiter Art,** *: L(2,$\mathbb{R}$) → L(2,$\mathbb{R}$), die genau die Vielfachen der Einheitsmatrix **1** einzeln in sich überführt: x*=x ⇔ x∈$\mathbb{R}$.**1**. Mit der linearen Menge $\mathcal{V}$:= {v∈L(2,$\mathbb{R}$) | <**1**,v>=0} (<,> wie in **AMN**) schreibt sich nämlich jede Matrix x∈L(2,$\mathbb{R}$) eindeutig in der Form x=ξ.**1** +v (ξ∈$\mathbb{R}$, v∈$\mathcal{V}$), und x=ξ.**1** +v → x*:=ξ.**1** -v ist eine Involution der gewünschten Art; sie hängt mit der quadratischen Form det in einfacher Weise zusammen: **det(x) =x*x=xx*.**

KA Das Quadrat jeder Matrix a∈L(2,$\mathbb{R}$) liegt in dem durch **1** und a aufgespannten linearen Teilraum: **a² ∈ $\mathbb{R}$.1 + $\mathbb{R}$a** ("*kinematische Eigenschaft*"). Dies ergibt sich einfach daraus, dass das *charakteristische Polynom* einer 2x2-Matrix a die Form p_a (X) = det(X.1 - a) = X² -tr(a) X +det(a) hat. Die *Spur* **tr** hängt wiederum mit der symmetrischen Bilinearform <,> (wie in **AMN**) in einfacher Weise zusammen: **tr(a) = 2<1,a>**. Wegen p_a(a)=0, gilt also für jedes a∈ L(2,$\mathbb{R}$) : a²= -det(a).**1** +2<1,a>a.

Dies ergibt bekanntlich viele schöne geometrische Eigenschaften im 4-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ =L(2,$\mathbb{R}$), bzw. im 3-dimensionalen projektiven Raum P=L(2,$\mathbb{R}$)$^\bullet$/$\mathbb{R}^\bullet$ (M$^\bullet$ ist Abkürzung für M-{0}), wenn man <,> in $\mathbb{R}^4$ als (nicht-euklidisches) "Skalarprodukt" bzw. in **P** als "Polarität" auffasst. Hiervon sei einiges für den historisch interessierten Leser aufgezählt:

1.2 Ein paar Geometrische Anwendungen der Eigenschaften AMN, IA und KA

Zum Beispiel füllt die projektive Gruppe PGL(2,$\mathbb{R}$) den Raum **P** bis auf das Hyperboloid P$\mathcal{S}$:={Px | x∈L(2,$\mathbb{R}$)$^\bullet$, detx =0} aus und zerfällt durch P$\mathcal{S}$ in die zu SL(2,$\mathbb{R}$) isomorphe Untergruppe PGL+ (Komponente der Eins P**1,** mit deta>0 für Pa∈PGL+) und die Nebenklasse PGL- (mit deta<0 für Pa∈ PGL-). GL(2,$\mathbb{R}$) wirkt in der adjungierten Darstellung ad(a): Pv → P(a^{-1}va) (a∈ GL(2,$\mathbb{R}$)) als "Bewegungsgruppe" der hyperbolischen Ebene **H²** = P$\mathcal{V}$, wobei P$\mathcal{V}$ die zum Einspunkt P**1** *polare* Ebene in P bezüglich des Hyperboloids P$\mathcal{S}$ ist. PGL(2,$\mathbb{R}$) wurde als *"kinematischer Raum"* bezeichnet, weil jeder nicht auf P$\mathcal{S}$ gelegene Punkt Pa ein-eindeutig eine hyperbolische Bewegung ad(a) der Ebene **H²** bestimmt.

Die hyperbolische Bewegungsgruppe ad(GL(2,$\mathbb{R}$)) zerfällt in 3 Teile, Gi, ("Innendrehungen"), Ga ("Außendrehungen") Gg ("Grenzdrehungen"), und ein ad(a) ist in Gi, Ga bzw. Gg, je nachdem der Punkt Pv_a:= (P**1**+Pa) ∩ P$\mathcal{V}$ im Inneren, Äußeren bzw. auf dem Rand des "absoluten Kreises" P$\mathcal{S}$ ∩ P$\mathcal{V}$ liegt.

Fasst man schließlich ***G*** =PGL(2,$\mathbb{R}$) als *Liegruppe* (mit der durch $\mathbb{R}^4$ induzierten natürlichen Topologie) auf, so ist ($\mathcal{V}$, [,]) mit der Lieklammer [x,y] := xy-yx die *Liealgebra* von ***G*** (geometrisch gesprochen: $\mathcal{V}$ ist Tangentialraum von ***G*** im Einspunkt P**1**). Die 1-Parameter-Untergruppen von ***G*** liegen auf den *Geraden* von P durch den Einspunkt P**1**.

Schließlich sei noch eine Aufgabe der klassischen "Kinematik" erwähnt. Bestimme im kinematischen Raum P den Ort aller Bewegungen ad(a), die in der Ebene **H²**=P$\mathcal{V}$ einen gegebenen Punkt X_L in einen gegebenen Punkt X_R überführen (vgl.[Lü79]):

(i) $X_L \rightarrow X_R = ad(a)\, X_L$

Wenn xy≠0, x≠0 und y≠0 ist, sind Px, Py sind Punkte von P, und man darf man die Multiplikation (x,y)→ xy von L(2,$\mathbb{R}$) auf P übertragen: P(xy) := Px.Py. Wenn also X_L und X_R nicht auf dem Kreis P$\mathcal{V}\cap$P$\mathcal{S}$ liegen, darf man für (i) schreiben:

(ii) $Pa.X_R = X_L.Pa$

Betrachten wir die beiden Verbindungsgeraden von X_L und X_R mit dem Einspunkt:

(iii) $g_L := P\mathbf{1}+X_L$, $g_R := P\mathbf{1}+X_R$

und wenden (ii) an, so ergibt sich

$g_L Pa = Pa + X_L Pa = Pa + PaX_R = Pa(P\mathbf{1}+X_R) = Pa.g_R$, d.h.

(iv) $g := g_L Pa = Pa.g_R$ und $Pa \in g \cap PGL(2,3)$

Andererseits liegen aber X_L , X_R nach Voraussetzung in der Ebene P$\mathcal{V}$, sind also wegen (iii) Schnittpunkte der Geraden g_L, g_R mit P$\mathcal{V}$:

(v) $X_L = g_L \cap P\mathcal{V}$, $X_R = g_R \cap P\mathcal{V}$

woraus mit (iv) folgt

(vi) $X_L := g\, Pa^{-1} \cap P\mathcal{V}$ $X_R := Pa^{-1} g \cap P\mathcal{V}$

Diese Relation ist aber von der Wahl des Punktes Pa auf g∩PGL(2) unabhängig!

Beweis (für X_L): $g'_L = g_L \cap PGL(2) = (P\mathbf{1}+X_L) \cap PGL(2)$ ist eine *kommutative Untergruppe*. Dies folgt direkt aus der oben in **KA** erwähnten "*kinematischen Eigenschaft* ", die projektiv geschrieben $Px^2 \in P\mathbf{1} + Px$ lautet und besagt, dass mit Px auch alle Potenzen Px^n, $Px^{-n} \in PGL(2)$ auf der "punktierten" Geraden $(P\mathbf{1} + Px) \cap PGL(2)$ liegen. Ist also Pb (neben Pa) ein beliebiger weiterer Punkt von g'_L , so ist $g'_L = g'_L\, Pa\, Pb^{-1} = g\, Pb^{-1}$, also

(vii) $X_L := g\, Pb^{-1} \cap P\mathcal{V}$. (Entsprechend: $X_R := Pb^{-1} g \cap P\mathcal{V}$).

Rückwärts folgt aus (vii):

(viii) $X_R = Pb^{-1} X_L\, Pb = P(ad(b))\, X_L$ für alle $Pb \in g \cap PGL(2)$

Die Gerade g ist also der Ort aller Punkte Pb, deren adjungierte Bewegungen ad(b) den Punkt X_L in X_R überführen. Daraus resultiert eine **Geradenabbildung** der Gesamtheit GPGL(2) aller *nicht auf P$\mathcal{S}$ liegenden* Geraden des Raumes P:

(vix) γ : GPGL(2) → P$\mathcal{V}$ x P$\mathcal{V}$; g → $(\gamma_L(g), \gamma_R(g)) = (X_L , X_R)$ mit

$\gamma_L(g) := X_L := g\, Pa^{-1} \cap P\mathcal{V}$ (linkes Geradenbild),

$\gamma_R(g) := X_R := Pa^{-1} g \cap P\mathcal{V}$ (rechtes Geradenbild) und

$X_R = Pb^{-1} X_L\, Pb$ für alle $b \in g \cap PGL(2)$

Die Abbildung γ ist *umkehrbar*, *wenn* X_L und X_R *beide* im Inneren oder *beide* im Äußeren des "absoluten Kreises" P$\mathcal{V}\cap$P$\mathcal{S}$ liegen.

Diese und verwandte Geradenabbildungen und spielten in der klassischen ebenen Kinematik eine besondere Rolle [Hje00], [Bla38], [Mü61]. Zu ihr gibt es eine sehr schöne Veranschaulichung von Eckhart und Rehbock [Eck23], [Eck26], [Reh31].

In ähnlicher Weise haben Grünwald und Blaschke bereits ab 1911 die Bewegungsgruppe zunächst der *euklidischen* [Grü11], [Bla11] und später der *elliptischen* Ebene [Stru30], [Bla42], [Mü61] als kinematische Räume dargestellt. Müller [Mü62], hat danach die kinematische Geradenabbildung im elliptischen Raum ausführlich behandelt und für die sphärische Kinematik nutzbar gemacht. Strubecker hat ähnliche Untersuchungen zur Bewegungsgruppe des "Isotropen Raumes" gemacht [Stru38].

Der projektive Raum **P³** wird von der Bewegungsgruppe im elliptischen Fall ganz, im euklidischen bis auf eine Gerade ("Ferngerade") ausgefüllt wird. Analog zu L(2,$\mathbb{R}$) sind die beiden zugehörigen Algebren im elliptischen Fall der Schiefkörper Q($\mathbb{R}$) der *Hamilton-Quaternionen*, im euklidischen Fall die Algebra qEL($\mathbb{R}$) der ausgearteten, so genannten *"quasielliptischen Quaternionen"*.

1.3 Zielsetzung

Diese geometrischen Sachverhalte sind der Anreiz, möglichst alle assoziativen Algebren $\mathscr{A}$ über einem Körper K zu bestimmen, die zumindest eine der drei oben genannten Eigenschaften **AMN, IA, KA** erfüllen. Meiner Kenntnis nach wurden bisher nur die Algebren mit der Eigenschaft **KA** bzw. **IA** vollständig bestimmt: In [Ka73], [Brö73], [Schrö73], [Ka74] wurden die so genannten "kinematischen Algebren" (KA) bestimmt, welche durch die "kinematische Eigenschaft **KA** ($x^2 \in K + Kx$ für alle $x \in \mathscr{A}$), charakterisiert sind. In [Lü76], [Lü79] wurden die durch die **IA** gekennzeichneten "Involutionsalgebren" bestimmt und für geometrische und kinematische Zwecke im Falle $K=\mathbb{R}$ ausgewertet [Lü77], [Lü80].

Die Eigenschaft **AMN** umfasst jedoch (wie später gezeigt wird) die Fälle **IA** und **KA.** Ein Ansatz wurde in [Lü83] unternommen. Daher wollen wir in dieser Untersuchung möglichst alle assoziativen Algebren $\mathscr{A}$ mit Eins über einem Körper K bestimmen, die eine **multiplikative quadratische Form** N: $\mathscr{A} \rightarrow K$ gestatten: $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x,y \in \mathscr{A}$. Da für nicht-entartetes N die Ergebnisse auf Bekanntes zurückführen, gilt unser Interesse besonders der Bestimmung aller ***Ausartungsfälle***, d.h. solche Fälle, in denen es ein von {0} verschiedenes Normradikal $\mathrm{RadN} := \{x \in \mathscr{A} \mid \langle x,y \rangle = 0$ für alle $y \in \mathscr{A}\}$ gibt; $\langle , \rangle$ ist die zu N gehörige symmetrische Bilinearform; damit sie nicht trivial wird, setzen wir für den Körper K stets $\mathrm{char}K \neq 2$ voraus. Darüber hinaus setzen wir über K bis einschließlich Kapitel 5 nichts weiter voraus; erst in Kapitel 6 ist zur näheren Bestimmung von nicht-halbeinfachen AMNs die Einschränkung auf „separable“ Körpererweiterungen von K erforderlich.

Um den Text nicht zu überlasten, sei wegen bekannter Definitionen und Sachverhalte auf das **Glossar** verwiesen.